

ELEMENTS D'HYDROLOGIE DE SURFACE

Par J.P. LABORDE *

Professeur à l'Université de Nice - Sophia Antipolis
Ingénieur hydraulicien de l'ENSEEIH Toulouse
Ingénieur hydrogéologue de l'ENSG Nancy
Docteur es Sciences en Hydrologie

Edition 2009

ECOLE POLYTECHNIQUE DE L'UNIVERSITE DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS

Département Hydroinformatique et Ingénierie de l'Eau

1645, Route des Lucioles – 06410 BIOT - France

Tél +33 (0)4 92 38 85 50 • Fax +33 (0)4 92 38 85 02 • laborde@unice.fr • www.polytech.unice.fr

Avertissements

Ce cours correspond essentiellement aux enseignements dispensés à Polytech'Nice (Cycle ingénieur et Master Hydroprotech), à l'Ecole Nationale Supérieure de Géologie de Nancy (Institut National Polytechnique de Lorraine) et à l'Ecole National du Génie de l'Eau de Strasbourg. Certaines parties sont également aux programmes de multiples enseignements de formation initiale (Licences et Master. de l'Université de Nice - Sophia Antipolis) et de formation continue (C.N.F.P.T., Centre International de l'Eau de Nancy, Office International de l'Eau ...).

La version 2007 de ce cours remplace et corrige les versions antérieures. Mais malgré le soin apporté, il ne fait aucun doute que des fautes de frappe et des anomalies persistent. Voici donc quelques :

s, s, s, s, ... x, x, x, ... □□□□□□□□□□□□□□□□, ... ||, [,], ≥, ≤, ≠, ≈, √, -, ±, ∑, →, ∫, ...

que je laisse le lecteur placer où bon lui semblera !

Afin que ce cours puisse s'améliorer au fil des temps, je serais très reconnaissant aux lecteurs de me faire part des erreurs ou anomalies qu'ils auraient détectées à mon adresse électronique :

laborde@unice.fr

Enfin, ce cours s'inspire essentiellement d'ouvrages, d'articles, de communications, de notes internes aux auteurs multiples. Qu'ils me pardonnent de ne pas les citer tous !

"... Le plagiat est à la base de toutes les littératures, sauf la première... qui d'ailleurs est inconnue ! "

Jean Giraudoux (Siegfried)

SOMMAIRE

I - INTRODUCTION A L'HYDROLOGIE DE SURFACE.....	1
I - 1 : DEFINITIONS :	1
I - 2 : SCIENCES UTILISEES	1
I - 3 : DOMAINES D'APPLICATIONS.....	1
I - 4 : LES METHODES DE TRAVAIL EN HYDROLOGIE DE SURFACE.....	1
I - 5 : GRANDES DIVISIONS DU COURS.....	2
II - LE CYCLE DE L'EAU	3
II - 1 : ETATS ET SITUATIONS DE L'EAU	3
II - 2 : STOCKS, FLUX ET INERTIE DES SYSTEMES	3
II - 2 - 1 : Volumes	3
II - 2 - 2 : Flux.....	3
II - 2 - 3 : Inertie des systèmes.....	3
II - 3 : CYCLE DE L'EAU	4
III - LE BASSIN VERSANT	5
III.1 - NOTION DE "BASSIN VERSANT"	5
III.1.1 - Bassin versant topographique.....	5
III.1.2 - Bassin versant hydrogéologique	5
III.2 - CARACTERISTIQUES MORPHOMETRIQUES.....	5
III.2.1 - Caractéristiques de la disposition dans le plan	5
III.2.1.1 - Surface A.....	5
III.2.1.2 - Longueur	5
III.2.2 - Caractéristiques des altitudes (hypsométrie).....	7
III.2.3 - Les indices de pente	7
III.2.3.1 - La pente moyenne.....	7
III.2.3.2 - Indice de pente de Roche I_p	7
III.2.3.3 - Indice de pente globale I_g	8
III.2.3.4 - Dénivelée spécifique D_s	8
III.2.3.5 - "Reliefs ratios"	9
III.2.4 - Les Modèles Numériques de Terrain.....	9
III.3 - CARACTERISTIQUES DU RESEAU HYDROGRAPHIQUE	9
III.3.1 - Hiérarchisation du réseau.....	9
III.3.2 - Les lois de Horton	10
III.3.3 - Autres caractéristiques du chevelu.....	10
III.3.3.1 - La densité de drainage D_d	10
III.3.3.2 - La fréquence des thalwegs d'ordre 1 : F1	10
III.3.3.3 - La courbe aire-distance	10
III.3.3.4 - Endoréisme.....	10
III.3.4 - PROFILS EN LONG.....	10
III.4 - CARACTERISTIQUES GEOLOGIQUES.....	11
III.5 - LE COUVERT VEGETAL	12
III.6 - CARACTERISTIQUES GLACIOLOGIQUES.....	12
IV - L'ATMOSPHERE.....	13
IV.1 - CONSTITUTION DE L'ATMOSPHERE.....	13
IV.1.1 - Composition de l'atmosphère	13
IV.1.1.1 - Atmosphère sèche	13
IV.1.1.2 - Mélange air-eau	13
IV.1.2 - Champ vertical des pressions.....	14
IV.1.3 - Champ vertical des températures.....	14
IV.1.3.1 - Champ vertical moyen	14
IV.1.3.2 - Gradient vertical de l'adiabatique sèche	15
IV.1.3.3 - Gradient vertical de l'adiabatique humide.....	15
IV.1.3.4 - Gradient vertical du point de rosée	15
IV.1.4 - Stabilité et instabilité atmosphérique	15
IV.1.5 - Etude des précipitations	16
IV.1.5.1 - Les nuages.....	16
IV.1.5.2 - Déclenchement des précipitations.....	16
IV.1.5.3 - Entretien des précipitations.....	16
IV.1.5.3.1 Précipitations de convection :	16
IV.1.5.3.2 Précipitations orographiques :	16
IV.1.5.3.3 Précipitations de front :	17
IV.1.5.4 - Précipitations solides	17

IV.1.5.4.1 La grêle :	17
IV.1.5.4.2 La neige :	17
IV.2 - L'ATMOSPHERE, COLLECTEUR DE CHALEUR	17
IV.2.1 - L'énergie solaire	17
IV.2.2 - Diffusion et absorption de l'énergie solaire dans l'atmosphère	18
IV.2.3 - Rayonnement terrestre	18
IV.3 - CIRCULATION GENERALE DANS L'ATMOSPHERE	18
IV.3.1 - Les pressions et les vents	18
IV.3.1.1 - Répartition méridienne	18
IV.3.1.2 - Influence de la rotation terrestre	18
IV.3.1.3 - Influence de la répartition des terres et des océans	19
IV.3.2 - Les masses d'air	19
IV.3.3 - Les fronts et les précipitations associées	19
IV.3.3.2 - Les fronts chauds :	20
IV.3.3.3 - Les fronts occlus :	20
IV.3.3.1 - Les fronts froids :	20
V - MESURES LIEES A L'ESTIMATION DE L'EVAPORATION ET DE L'EVAPOTRANSPIRATION	21
V.1 - MESURE DES PARAMETRES PHYSIQUES CONDITIONNANT L'EVAPORATION	21
V.1.1 - Mesure des températures	21
V.1.2 - Mesure de l'humidité de l'air	22
V.1.2.1 - Psychromètre	22
V.1.2.2 - Hygromètre enregistreur	22
V.1.3 - Mesure des pressions	23
V.1.4 - Mesure du rayonnement solaire	23
V.1.5 - Mesure du vent	23
V.2 - MESURES DE L'EVAPORATION	24
V.2.1 - Mesures de l'évaporation à partir d'une surface libre	24
V.2.1.1 - Bac classe A (du Weather Bureau, U.S.A.)	24
V.2.1.2 - Bac Colorado et Bac ORSTOM	24
V.2.1.3 - Bac CGI 30	24
V.2.1.4 - Utilisation des bacs et des résultats des mesures	24
V.2.2 - Mesure de l'évaporation à partir de surfaces poreuses : les atmomètres	25
V.2.2.1 - Le "Black Bellani"	25
V.2.2.2 - Le "Piche"	26
V.3 - MESURES ET ESTIMATION DE L'EVAPOTRANSPIRATION	26
V.3.1 - Notion d'évapotranspiration réelle et potentielle	26
V.3.2 - Mesures directes	26
V.3.3 - Estimation de l'évapotranspiration	27
V.3.3.1 - Formule de Turc	27
V.3.3.2 - Formule de Thornthwaite	28
V.3.3.3 - Estimation de l'E.T.P. par la méthode de Penman	28
V.3.3.4 - Autres formules	29
V.3.4 - Evaluation de l'évapotranspiration réelle	29
V.3.4.1 - Formule de Turc	29
V.3.4.2 - Bilan simplifié selon THORNTHWAITE	30
V.3.4.3 - Bilan tenant compte du stress hydrique de la végétation	30
VI - MESURES DES PRECIPITATIONS	33
VI.1 - DIFFICULTES DE LA MESURE	33
VI.2 - APPAREILLAGES PLUVIOMETRIQUES	33
VI.2.1 - Les pluviomètres	33
VI.2.2 - Les pluviographes	33
VI.2.2.1 Enregistrement mécanique :	35
VI.2.2.2 Pluviographe transducteur d'impulsions :	35
VI.2.2.3 Mesure de l'équivalent en eau des chutes de neige :	35
VI.2.2.4 Précision des appareils :	35
VI.2.3 - Les nivomètres	35
VI.2.3.1 - Mesures par sondage	35
VI.2.3.2 - Mesures en continu du poids	35
VI.2.3.3 - Nivomètres à rayonnement γ	36
VI.3 - STATIONS PLUVIOMETRIQUES	36
VI.3.1 - Le site	36
VI.3.2 - Précautions d'installation	36
VI.4 - GESTION DU RESEAU	36
VI.4.1 - Fréquence des observations	36
VI.4.2 - Publication des résultats	37

VI.5 EVALUATION DES PRECIPITATIONS PAR LES RADARS METEOROLOGIQUES	37
VI.5.1 Intensité des précipitations	37
VI.5.2 Distribution statistique de la granulométrie des précipitations.....	37
VI.5.3 La zone cible du radar.....	38
VI.5.4 Réflectivité radar et puissance reçue.....	38
VI.5.5 Etalonnage du radar.....	39
VI.5.5.1 Radar utilisé seul.....	39
VI.5.5.2 Radar utilisé conjointement avec des pluviographes.....	39
VII - HYDROMETRIE	43
VII.1 - ACQUISITION DES DEBITS EN FONCTION DU TEMPS.....	43
VII.2 - LES METHODES DE JAUGEAGES	43
VII.2.1 - Réservoirs étalonnés	43
VII.2.2 - Déversoirs	43
VII.2.3 - Jaugeurs à ressaut	44
VII.2.4 - Jaugeages par dilution.....	45
VII.2.4.1 - Choix du traceur	45
VII.2.4.2 - Choix du site.....	46
VII.2.4.3 - Injection à débit constant.....	46
VII.2.4.4 - Méthode dite globale	47
VII.2.4.5 - Mise en oeuvre pratique	47
VII.2.4.5.1 Concentrations C1 à injecter :	47
VII.2.4.5.2 Injection :.....	47
VII.2.4.5.3 Prélèvements et analyses :	48
VII.2.4.6 - Domaine d'application.....	48
VII.2.5 - Jaugeages par exploration du champ des vitesses.....	48
VII.2.5.1 - Le matériel de mesures	49
VII.2.5.1.1 Les capteurs : les hélices :.....	49
VII.2.5.1.2 Traitement du signal : les moulinets	50
VII.2.5.1.3 Enregistrement : les compteurs.....	50
VII.2.5.1.3 Les supports.....	51
VII.2.5.2 - Matérialisation de la section et déplacement transversal	52
VII.2.5.2.1 Jaugeages "en bottes".....	52
VII.2.5.2.3 Jaugeages au saumon depuis un pont :	52
VII.2.5.2.4 Jaugeages avec tringles téléphérique	53
VII.2.5.2.5 Jaugeages en bateau :	53
VII.2.5.3 - Conduite et exploitation du jaugeage	54
VII.2.5.3.1 Choix du site.....	54
VII.2.5.3.2 Choix des verticales :	54
VII.2.5.3.3 Durée et nombre de mesures sur une verticale :	54
VII.2.5.3.4 Exploitation du jaugeage	55
VII.2.5.3.6 Jaugeages par "verticales indépendantes"	56
VII.2.6 - Système mobile de mesure de débit à effet Doppler.....	56
VII.2.7 - Jaugeage au flotteur	57
VII.3 - LES STATIONS DE JAUGEAGE	57
VII.3.1 - Le seuil ou contrôle.....	58
VII.3.2 - Limnimétrie	59
VII.3.2.1- Les échelles	59
VII.3.2.2 - Les limnigraphes à flotteur	60
VII.3.2.3 - Les limnigraphes dits à bulles.....	61
VII.3.2.4 - Sondes piézorésistives immergées (S.P.I.).....	61
VII.3.2.5 - Limnigraphes à ultra-sons.....	62
VII.3.2.6 - Remarques sur la gestion des limnigraphes	62
VII.3.3 - Les sections de jaugeage.....	62
VII.3.4 - Les courbes de tarage	63
VII.4 - ETABLISSEMENT DES HYDROGRAMMES ET DES ANNUAIRES HYDROLOGIQUES	64
VII.4.1 - Digitalisation des courbes de tarage et des limnigrammes.....	64
VII.4.2 - Les annuaires.....	64
VII.5 - TENDANCES ACTUELLES	64
VII.5.1 - Techniques possibles d'enregistrement en continu des débits.....	64
VII.5.1.1 - Jaugeages par ultra-sons	64
VII.5.1.2 - Jaugeages chimiques en continu	64
VII.5.1.3 - Jaugeages électro-magnétiques.....	64
VII.5.2 - Amélioration des techniques existantes.....	64
VII.5.2.1 - Techniques de jaugeage par exploration du champ des vitesses.....	65
VII.5.2.2 - Codage et archivage des données	65
VII.6 - DEVELOPPEMENT DES TELETRANSMISSIONS	65
VII.6.1 - Télétransmissions par réseau téléphonique	65

VII.6.1.1 - Télétransmissions par réseau commuté	65
VII.6.1.2 - Télétransmissions par lignes spécialisées	65
VII.6.2 - Télétransmission radio au sol	65
VII.6.3 - Télétransmission satellitaire	66
VII.6.3.1 - Le système ARGOS	66
VII.6.3.1.1 Orbites et zones de visibilité	66
VII.6.3.1.2 Message : son émission et sa réception par le satellite	66
VII.6.3.1.3 Réémission et réception au sol	67
VII.6.3.1.4 Possibilités et limites du système ARGOS pour l'hydrologie	67
VII.6.3.2 - Le système METEOSAT	68
VII.6.3.2.1 Orbites et zones de visibilité	68
VII.6.3.2.2 Le message : son émission et sa réception par le satellite	68
VII.6.3.2.3 Réémission et réception au sol	68
VII.6.3.2.4 Possibilités et limites du système METEOSAT en hydrologie	68
VIII.6.4 - <i>Éléments de conclusion</i>	68
VIII.- STATISTIQUES APPLIQUEES A L'HYDROLOGIE.....	69
VIII.1. - RAPPELS ET GENERALITES	69
VIII.1.1. - Répartition, échantillon et variable aléatoire	69
VIII.1.2. - Notions de probabilité	69
VIII.1.3. - Résultats fondamentaux	69
VIII.2. LA LOI DE PROBABILITE	70
VIII.2.1. - Notion de loi de probabilité	70
VIII.2.1.1 - Cas des variates discrètes	70
VIII.2.1.2 - Cas des variates continues	70
VIII.2.2. - Construction d'une loi de probabilité	70
VIII.2.2.1 - Des paramètres de forme	70
VIII.2.2.2 - Des paramètres d'échelle s	70
VIII.2.2.3 - Des paramètres de position x_0	70
VIII.2.2.4 - Variable réduite	71
VIII.2.3. - Paramètres définis d'après cette loi	71
VIII.2.3.1 - Paramètres de tendance centrale	71
VIII.2.3.2 - Moments	71
VIII.2.3.3 - Paramètres caractéristiques de la forme	73
VIII.3. - DETERMINATION DES PARAMETRES D'APRES UN ECHANTILLON	73
VIII.3.1. - Qualité des estimations	73
VIII.3.2. - Tests d'ajustement	74
VIII.3.2.1 - Test du χ^2 de Pearson	74
VIII.3.2.2 - Test Wn^2 d'Anderson	74
VIII.3.2.3 - Autres tests	75
VIII.3.3. - Moments déduits d'un échantillon de taille connue	75
VIII.3.4 - METHODES D'AJUSTEMENT	75
VIII.3.3.1 - Méthode des moments	75
VIII.3.3.2 - Méthode du maximum de vraisemblance	75
VIII.3.3.3 - Ajustement graphique	76
VIII.4. - STATISTIQUE DE RANG	76
VIII.4.1. - Probabilité des valeurs d'un échantillon observé	76
VIII.4.2. - Danger d'apparition	76
VIII.4.2.1 - Période de retour	76
VIII.4.2.2 - Fréquence d'apparition d'une valeur connue "a priori"	77
VIII.4.2.3 - Problème inverse	77
VIII.5. - DIFFERENTS TYPES DE LOIS UTILISES EN HYDROLOGIE	77
VIII.5.1. - Loi de Gauss ou loi normale	77
VIII.5.1.1 - Fonction de répartition	77
VIII.5.1.2 - Estimation des paramètres	78
a) Méthode des moments :	78
b) Méthode du maximum de vraisemblance :	78
c) Ajustement graphique :	78
VIII.5.1.3 - Erreurs-types sur les estimations	79
a) Estimation de la moyenne :	79
b) Estimation de l'écart-type :	79
c) Estimation d'un quantile :	79
VIII.5.1.4 - Intervalles de confiance	80
VIII.5.1.5 - Comparaison de deux échantillons	81
a) Comparaison des moyennes :	81
b) Comparaison des écarts-types :	81

VIII.5.2. - <i>Loi de Galton (ou log-normale ou de Gibrat-Gauss)</i>	82
VIII.5.2.1 - Fonction de répartition	82
VIII.5.2.2 - Estimation des paramètres	83
a) Méthode des moments	83
b) Méthode du maximum de vraisemblance	83
c) Méthode graphique	84
VIII.5.2.3 - Intervalles de confiance	84
VIII.5.2.4 - Cas particulier fréquent et simple où x_0 n'est plus un paramètre à ajuster	84
VIII.5.3. - <i>Loi de Gumbel</i>	85
VIII.5.3.1 - Fonction de distribution	85
VIII.5.3.2 - Estimation des paramètres	85
a) Méthode des moments	85
b) Méthode du maximum de vraisemblance	85
c) <i>Méthode graphique</i>	86
VIII.5.3.3 - Intervalle de confiance	86
VIII.5.4. - <i>Loi des extrêmes généralisée (GEV ou loi de Jenkinson)</i>	86
VIII.5.4.1 - Fonction de répartition et densité de probabilité	87
VIII.5.4.2 - Méthode d'ajustement	87
VIII.5.4.3 - Cas particulier où x_0 est fixé à l'avance	87
VIII.5.5. - <i>Loi de Pearson III ou loi Gamma incomplète</i>	88
VIII.5.5.1 - Fonction de distribution	88
VIII.5.5.2 - Estimation des paramètres	89
a) Méthode des moments	89
b) <i>Méthode du maximum de vraisemblance</i>	89
VIII.5.5.3 - Intervalle de confiance	90
VIII.5.5.4 - Estimations de F (x)	90
a) Utilisation des tables de Pearson	90
b) <i>Calcul à l'ordinateur</i>	90
c) Approximation	90
VIII.5.6. - <i>Autres lois</i>	90
VIII.5.6.1 - Loi de Student	90
VIII.5.6.2 - Loi du χ^2	91
VIII.5.6.3 - Distribution binomiale (ou loi de Bernoulli)	92
VIII.5.6.4 - Distribution de Poisson	92
VIII.5.6.5 - Distribution de Fischer-Snedecor	93
VIII.6 - CHOIX D'UNE LOI DE PROBABILITE	93
VIII.6.1 - CONNAISSANCE A PRIORI	93
VIII.6.2. - <i>Utilisation des paramètres de forme</i>	93
VIII.6.3. - <i>Choix graphique</i>	93
VIII.6.4 - UTILISATION DE TESTS	94
VIII.6. - ASSOCIATION ENTRE VARIABLES	94
VIII.6.1. - <i>Notion de corrélation</i>	94
VIII.6.2. - <i>Courbes et droites de régression</i>	95
VIII.6.2.1 - Courbe de régression	95
VIII.6.2.2 - Cas de la distribution de Gauss à deux dimensions	95
VIII.6.3. - <i>Régression simple</i>	97
VIII.6.3.1 - Choix du modèle linéaire - droite des moindres carrés	97
VIII.6.3.2 - Précautions à prendre	98
VIII.6.3.3 - Utilisation pratique de la régression simple	98
- Confiance à accorder à l'échantillon étendu	100
VIII.6.4. - <i>Régression double</i>	100
VIII.6.4.1 - Equation de la régression double linéaire	100
VIII.6.4.2 - Coefficient de corrélation multiple et variance résiduelle	101
VIII.7.4.3 - Notion de coefficient de corrélation partielle	102
VIII.6.5. - <i>Régressions linéaires multiples</i>	102
VIII.6.5.1 - Mise en équation	102
VIII.6.5.2 - Coefficients de régression, de corrélation multiple et de corrélation partielle	103
VIII.6.5.3 - Seuils de signification	104
VIII.6.5.4 - Mise en oeuvre	104
a) Méthode régressive (backward élimination)	104
b) Méthode progressive (Stepwise Regression)	104
VIII.6.6. - <i>Régressions multiples quelconques</i>	105
VIII.6.7. - <i>Analyses en composantes principales</i>	107
VIII.6.7.1 - Notions de base	107
VIII.6.7.2 - Exemple pratique d'utilisation	109

VIII.7. - TECHNIQUES DE CRITIQUE DES DONNEES.....	111
VIII.7.1. - Données unidimensionnelles.....	111
VIII.7.1.1 - Fréquence des chiffres utilisés.....	111
VIII.7.1.2 - Probabilité de chaque observation.....	111
VIII.7.1.3 - Analyse des séries non-autocorrélées.....	112
VIII.7.1.4 - Autocorrélation.....	112
VIII.7.2. - SERIES CHRONOLOGIQUES MULTIDIMENSIONNELLES.....	112
VIII.7.2.1 - Méthode des "doubles masses" (doubles cumuls).....	112
VIII.7.2.2 - Probabilité des résidus.....	113
VIII.7.2.3 - Cumul des résidus.....	113
VIII.7.2.4 - Utilisation des composantes principales.....	114
IX - TRAITEMENT DES DONNEES PLUVIOMETRIQUES.....	115
IX.1 - CHOIX DES VARIABLES.....	115
IX.1.1 - Définition des épisodes pluvieux.....	115
IX.1.2 - Passage d'une définition à l'autre.....	115
IX.2 - ETUDE STATISTIQUE DES PLUIES PONCTUELLES.....	116
IX.2.1 - Hauteurs de pluies annuelles.....	116
IX.2.2 - HAUTEURS DE PLUIES MENSUELLES.....	116
IX.2.3 - Hauteurs de pluies journalières.....	117
IX.2.4 - Hauteurs des pluies extrêmes.....	118
IX.2.5 - Comblement des lacunes dans des séries pluviométriques.....	119
IX.3 - ETUDE DE LA PLUIE DANS L'ESPACE.....	121
IX.3.1 - Pluie et relief.....	121
IX.3.1.1 - L'altitude.....	121
IX.3.1.2 - L'encaissement.....	122
CARACTERISATION D'UN SITE PAR L'ANGLE SOLIDE SOUS LEQUEL ON VOIT L'HORIZON.....	122
IX.3.2. - Interpolation des précipitations.....	122
X.3.2.1 - La pluie, une fonction aléatoire.....	122
X.3.2.1.1 - Fonction aléatoire d'ordre 2.....	122
IX.3.2.1.2 - Homogénéité et isotropie.....	123
IX.3.2.1.3 - Stationnarité d'ordre 2.....	123
IX.3.2.2 - Méthodes d'interpolation.....	124
IX.3.2.2.1 - Auto-corrélation.....	124
X.3.2.2.2 - Interpolation optimale de Gandin.....	126
IX.3.2.2.3 - Krigeage.....	127
KRIGEAGE SIMPLE EN COVARIANCE.....	127
IX.3.3 - Pluies moyennes sur une surface.....	129
IX.3.3.1 - Méthode de Thiessen.....	130
IX.3.3.2 - Méthode des isohyètes.....	130
IX.3.4 - Coefficients d'abattement.....	131
X.3.4.1 - Définition et hypothèses.....	131
IX.3.4.2 - Valeurs relatives du coefficient d'abattement.....	131
IX.3.4.3 - Détermination pratique de K.....	131
IX.3.4.3.1 - Approche de Brunet-Moret.....	131
IX.3.4.3.1 - Approche géostatistique.....	132
IX.4 - ETUDE DE LA PLUIE EN FONCTION DE LA DUREE.....	134
IX.4.1 - Notion d'intensité moyenne sur une durée.....	134
IX.4.2 - Fonctions durée-intensité-fréquence.....	135
IX.4.2.1 - Formules du type Talbot.....	135
IX.4.2.2 - Formules du type Montana.....	135
X - METHODES D'ETUDE DES CRUES.....	137
X.1 - DEFINITION ET INTRODUCTION.....	137
X.2 - METHODES EMPIRIQUES DE PREDETERMINATION DES CRUES.....	137
X.2.1 - Intérêts de la recherche historique.....	137
X.2.2 - Evolution du débit avec la surface.....	138
X.2.3 Evolution du débit avec la fréquence.....	138
X.2.4 - Différentes méthodes empiriques valables pour la France.....	139
X.2.4.1 - Méthode CRUPEDIX.....	139
X.2.4.2 - Abaques SOGREAH.....	139
X.2.4.3 - Méthode SOCOSE.....	141
X.2.5 - Différentes méthodes empiriques valables pour l'Afrique.....	142
X.2.5.1 - Approche déterministe - les débits de crues décennales en Afrique.....	142

X.2.5.1.1	Détermination de l'averse décennale	142
X.2.5.1.2	Passage à l'averse de la pluie nette	142
X.2.5.1.3	Hydrogramme unitaire.....	143
X.2.5.2	Approche stochastique - les débits de crues décennales en Afrique de l'Ouest et Centrale (par PUECH et CHABI GONNI du C.I.E.H.).....	144
X.2.5.2.1	Inventaire des variables explicatives et à expliquer.....	144
X.2.5.2.2	Nature de la régression.....	144
X.3	ETUDE STATISTIQUE DES DEBITS DE CRUE	145
X.3.1	Constitution de l'échantillon.....	145
X.3.2	Choix du type de loi et ajustement	146
X.3.3	Passage des débits moyens journaliers aux débits instantanés	146
X.3.3.1	Le coefficient de pointe n'est pas connu.....	146
X.3.3.2	On connaît quelques valeurs du coefficient de pointe.....	147
X.3.4	Etude des crues maximales annuelles à partir des crues supérieures à un seuil et des données historiques	149
X.3.4.1	Choix des lois de probabilité.....	149
X.3.4.1.1	Fréquence du nombre de jours de crues par an	149
X.3.4.1.2	Fréquence des crues supérieures à un seuil	150
X.3.4.2	Ajustement par le maximum de vraisemblance	150
X.3.4.3	Passage à la fréquence des crues maximales annuelles	151
X.3.4.4	Prise en compte des données historiques	152
X.4	METHODES D'ETUDES HYDROMETEOROLOGIQUES	154
X.4.1	Etude d'un couple averse - crue.....	154
X.4.1.1	Le devenir des précipitations.....	154
X.4.1.2	Séparation des écoulements.....	155
X.4.1.3	Quelques définitions.....	157
X.4.2	Fonctions de production.....	157
X.4.2.1	Hypothèses simplificatrices sur les coefficients de ruissellement.....	158
X.4.2.2	Simulation par modèles à réservoirs.....	158
X.4.2.3	Fonction de production du S.C.S. (Soil Conservation Service of U.S.A.)	158
X.4.3	Fonction de transfert	160
X.4.3.1	Mise en évidence de la notion d'hydrogramme unitaire	160
X.4.3.2	Propriétés des hydrogrammes résultant d'averses unitaires	161
X.4.3.3	Détermination de l'hydrogramme unitaire	162
X.4.3.3.1	Déterminations directes.....	162
X.4.3.3.2	Détermination empirique de l'hydrogramme unitaire	165
X.4.3.3.3	Evaluation de t_m ou de t_c	165
X.4.3.4	Limites à la notion d'hydrogramme unitaire	166
X.4.4	Reconstitution des crues à partir des précipitations.....	166
X.4.4.1	Passage des pluies aux débits pour chaque averse observée.....	167
X.4.4.2	Passage de "la pluie de fréquence F" à la crue de même fréquence.....	167
X.4.4.2.1	Hyétoqramme de projet de la méthode du S.C.S.	167
X.4.4.2.2	Hyétoqramme de la méthode SOCOSE.....	167
X.4.5	Généralisation à de grands bassins.....	168
X.5	ESTIMATION DES CRUES DE FREQUENCE TRES RARE : LA METHODE DU GRADEX.....	170
X.5.1	Constatations justifiant la méthode du gradex	170
X.5.1.1	Comportement asymptotiquement exponentiel des pluies extrêmes	170
X.5.1.2	Méthode d'estimation des gradex	170
X.5.1.3	Variation du gradex avec la durée	170
X.5.1.4	Tendances limites du ruissellement.....	171
X.5.1.5	Répartition des débits dans le temps	171
X.5.1.6	Passage du débit moyen sur une durée t_c au débit de pointe.....	172
X.5.2	Mise en oeuvre pratique de la méthode du gradex.....	172
X.5.2.1	Choix de la durée t_c	172
X.5.2.2	Etude du gradex des précipitations sur une durée t_c	172
X.5.2.3	Etude des crues.....	172
X.5.2.4	Extrapolation aux fréquences rares	173
X.5.3	Limites de la méthode	174
X.6	ESTIMATION DES CRUES DE FREQUENCE TRES RARE : APPROCHE PUREMENT STATISTIQUE	174
X.7	ETUDE DES ECOULEMENTS EN REGIME TRANSITOIRE ET APPLICATIONS A L'ETUDE DE LA PROPAGATION DES ONDES DE CRUE	175
X.7.1	Equations générales.....	175
X.7.1.1	Hypothèses simplificatrices.....	175
X.7.1.2	Mise en équation	175
X.7.1.3	Modes d'intégrations et méthodes de Flood-Routing	177
X.7.2	Méthode de Puls	177
X.7.2.1	Mise en équation	177
X.7.2.2	Intégration graphique	177

X.7.2.3 - Résultats pratiques pour quelques cas simples	178
X.7.3 - <i>Méthode de Muskingum</i>	180
X.7.3.1 - Mise en équation.....	180
X.7.3.2 - Mise en œuvre	181
X.7.3.2.1 Choix du pas de temps.....	181
X.7.3.2.1 Détermination de K et x dans le cas d'un tronçon unique.....	181
X.7.4 - <i>Méthode dite Hayami</i>	182
X.7.5 - <i>Propagation de l'onde de rupture d'un barrage - méthode simplifiée</i>	183
X.7.5.1 - Les hypothèses de base	183
X.7.5.2 - Définition des paramètres utilisés	183
X.7.5.3 - Mise en œuvre pratique	184
X.7.5.4. - Limites de la méthode.....	186
X.8- PROTECTION DES OUVRAGES - CHOIX DE LA FREQUENCE DE LA CRUE DE PROJET ET DE LA CRUE DE CHANTIER.....	186
X.8.1 - <i>Crue de projet</i>	186
X.8.1.1 - Ouvrages présentant un risque pour les populations en cas de rupture.....	186
X.8.1.2 - Ouvrages ne menaçant pas la sécurité publique.....	186
X.8.2 - <i>Crue de chantier</i>	188

I - INTRODUCTION A L'HYDROLOGIE DE SURFACE

I - 1 : DEFINITIONS :

D'une façon très générale, l'hydrologie peut se définir comme l'étude du cycle de l'eau et l'estimation de ses différents flux. L'hydrologie au sens large regroupe :

- la climatologie, pour la partie aérienne du cycle de l'eau (précipitations, retour à l'atmosphère, transferts, *etc.*) ;
- l'hydrologie de surface au sens strict, pour les écoulements à la surface des continents ;
- l'hydrodynamique des milieux non saturés pour les échanges entre les eaux de surface et les eaux souterraines (infiltration, retour à l'atmosphère à partir des nappes, *etc.*) ;
- l'hydrodynamique souterraine (sensu stricto) pour les écoulements en milieux saturés.

L'hydrologie de surface est la science qui traite essentiellement des problèmes qualitatifs et quantitatifs des écoulements à la surface des continents. Ces problèmes se ramènent généralement à des prévisions (associer à une date une certaine grandeur) ou des prédéterminations (associer à une grandeur une certaine probabilité) de débits ou de volume en un point ou sur une surface.

I - 2 : SCIENCES UTILISEES

L'étude de la partie "écoulement superficiel" du cycle de l'eau nécessite quand même de connaître les autres parties de ce cycle. L'hydrologie de surface est une science appliquée qui fait appel à des connaissances dans des domaines très divers :

Sciences et Techniques	Domaines d'application
Météorologie et Climatologie	Etude des pluies et du retour à l'atmosphère
Géologie, Géographie et Pédologie	Analyse du comportement hydrologique du bassin
Hydraulique	Mesure et étude des écoulements à surface libre
Statistique	Traitement des données, simulations...
Calcul numérique	Propagation de crue, modélisations et optimisations...
Informatique	Instrument de travail pour les calculs numériques, le stockage des données...

I - 3 : DOMAINES D'APPLICATIONS

Les domaines d'application de l'hydrologie de surface sont également très variés. Parmi les plus importants et les plus classiques, on notera :

- l'agriculture : irrigation, drainage ;
- l'étude des ressources en eaux : eau potable, eau pour l'industrie ;
- la lutte contre la pollution : étude des débits d'étiage évacuant les effluents, les calories ;
- l'énergie hydraulique ;
- le transport solide (dépôt ou érosion) ;
- la navigation ;
- les loisirs (plans d'eau) ;
- la sécurité des biens et des personnes : protection contre les crues...

I - 4 : LES METHODES DE TRAVAIL EN HYDROLOGIE DE SURFACE

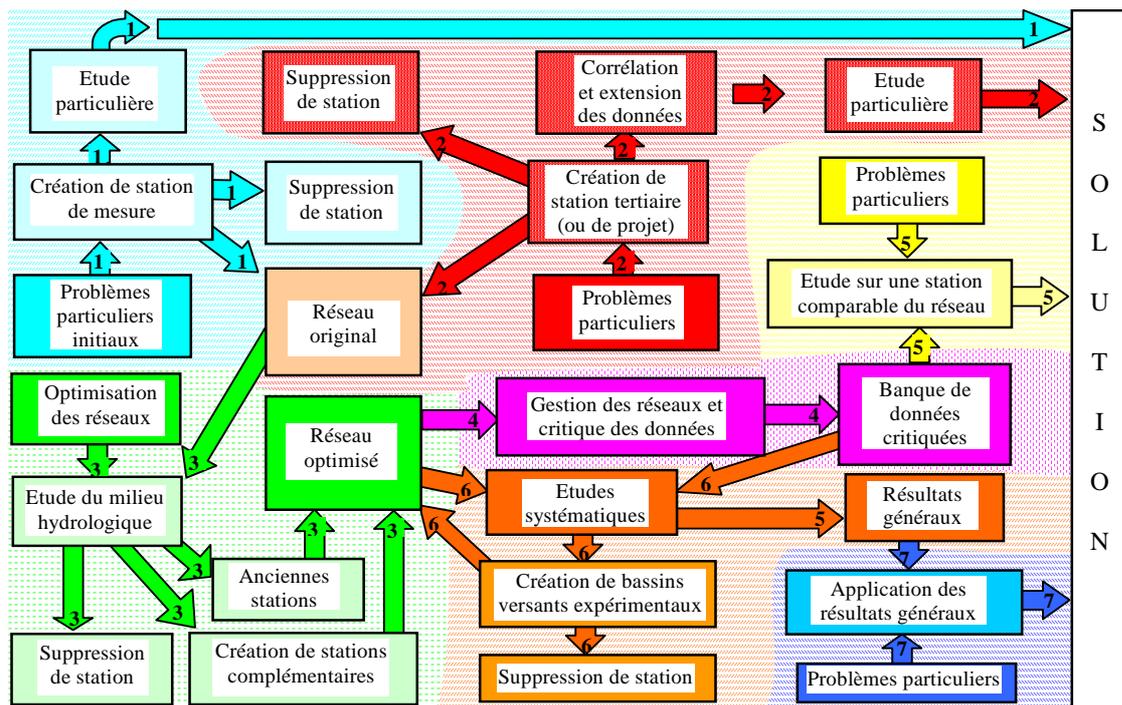
L'hydrologie de surface est une science essentiellement appliquée. La recherche et le développement de cette branche ont toujours été liés à l'existence de problèmes concrets. Ceux-ci ont évolué au cours des temps : on s'est d'abord intéressé aux crues, on en vient seulement à prendre conscience de l'intérêt de l'étude des étiages. En effet, aux besoins quantitatifs s'ajoutent à présent des problèmes de qualité. Parallèlement à l'évolution des besoins, les progrès des techniques ont transformé nos méthodes de travail.

On peut essayer de schématiser chronologiquement ces dernières de la façon suivante :

Dans une première phase, à chaque problème particulier qui se posait, la réponse de l'hydrologue s'appuyait sur des observations effectuées au point particulier intéressant. Il en déduisait les solutions recherchées : alimentation en eau, protection contre les crues, possibilité de navigation, *etc.*

Au cours des temps, les stations créées pour chaque problème particulier n'ont pas toutes été abandonnées, et l'on s'est trouvé en présence d'un réseau appelé réseau original, constitué de stations très hétéroclites : chacune d'entre elles répondait à des besoins divers et spécifiques. Elles étaient gérées en outre par différents services (en France par exemple : Ponts et Chaussées, Electricité de France, Ministère de l'Agriculture, Ministère de l'Industrie, *etc.*). L'ensemble des résultats acquis sur le réseau original constituait donc une banque de données.

On en arrive alors à un deuxième stade où l'hydrologue n'est plus obligé d'établir de nouvelles stations pour résoudre un problème. Il peut obtenir des résultats en extrapolant ceux enregistrés sur des stations du réseau original, voisines ou comparables. Il peut également se contenter d'une station nouvelle (station tertiaire ou station de projet), mais observée sur une courte période. Les données de cette station seront étendues par corrélation avec celles, plus longues, du réseau original.



Organisation schématique et évolution dans le temps d'un service hydrologique.

Par la suite, les services hydrologiques peuvent parfois ne plus s'intéresser uniquement aux problèmes particuliers. On atteint le stade des problèmes généraux qui se ramènent essentiellement à :

- L'optimisation et la planification du réseau (démarche 3) : Ces deux types de travaux reposent sur l'étude du milieu hydrologique. On ramène l'ensemble des paysages à un nombre fini de régions dites hydrologiquement homogènes. La planification permet de déterminer le nombre minimal de stations nécessaires à la connaissance de chaque type de milieu hydrologique. L'optimisation met en évidence, par comparaison avec le réseau original, les zones sur-observées, et par conséquent, les stations à supprimer et éventuellement les zones à équiper.
- L'élaboration d'une base de données fiables (démarche 4) par analyse critique de l'ensemble des observations disponibles.
- Les études systématiques (démarche 6) : Elles s'intéressent à un même phénomène (crues, étiages, etc.) sur les différentes stations du réseau. Elles essaient de mettre en évidence des facteurs explicatifs et, si possible, de quantifier leurs influences, ceci afin d'extrapoler ces résultats généraux à des bassins versants non étudiés.

A ce dernier stade s'ouvre une nouvelle voie 7 pour résoudre un problème particulier en un point. Celle-ci consiste à déterminer au site intéressant, les valeurs des facteurs explicatifs et à appliquer les résultats généraux obtenus sur l'ensemble du réseau.

I - 5 : GRANDES DIVISIONS DU COURS

Partant du principe que l'on ne peut pas faire de bonnes études hydrologiques sans avoir de bonnes données de mesure et que l'on ne peut pas faire de bonnes mesures sur des phénomènes que l'on connaît mal, le cours d'hydrologie sera articulé en trois grandes parties.

La première sera essentiellement descriptive. Elle comportera la caractérisation du milieu hydrologique et la compréhension des phénomènes météorologiques.

La deuxième partie sera réservée à l'acquisition des données : mesures climatologiques et mesures de débits.

Enfin, le traitement de ces données fera l'objet de la troisième partie. En particulier, nous aborderons les problèmes de critique de données, de maximisation de l'information, et enfin, différents types particuliers d'études (crues, étiages, apports, etc.).

II - LE CYCLE DE L'EAU

Le cycle de l'eau, appelé aussi cycle hydrologique, est l'ensemble des cheminements que peut suivre une particule d'eau. Ces mouvements, accompagnés de changements d'état, peuvent s'effectuer dans l'atmosphère, à la surface du sol et dans le sous-sol. Chaque particule n'effectue qu'une partie de ce cycle et avec des durées très variables : une goutte de pluie peut retourner à l'océan en quelques jours alors que sous forme de neige, en montagne, elle pourra mettre des dizaines d'années.

II - 1 : ETATS ET SITUATIONS DE L'EAU

Classiquement, on schématise les états et les situations de l'eau dans le cycle de la façon suivante :

Etats	Principaux stocks	Phénomènes de transport
Vapeur nuages, brouillards	humidité atmosphérique, évapotranspiration	évaporation
Liquide	océans, mers, lacs, eaux souterraines	pluie, cours d'eau, nuages, circulations souterraines
Solide	glaciers, manteaux neigeux, calottes polaires	neige, grêle, écoulement des glaciers

II - 2 : STOCKS, FLUX ET INERTIE DES SYSTEMES

Quelles sont les quantités d'eau correspondant à chacun des termes de ce tableau, et avec quelles vitesses se font les échanges ? Les réponses à ces questions sont très difficiles à donner ; on pourra retenir, pour fixer les ordres de grandeur, les chiffres fournis par G. REMENIERAS :

II. 2. 1 : Volumes

En surface, les terres émergées ne représentent que $146 \cdot 10^6 \text{ km}^2$ sur une surface totale de la planète de $510 \cdot 10^6 \text{ km}^2$ (soit sensiblement 1/4). Cette disparité entre océans et terres est beaucoup plus accentuée entre eaux douces et eaux salées.

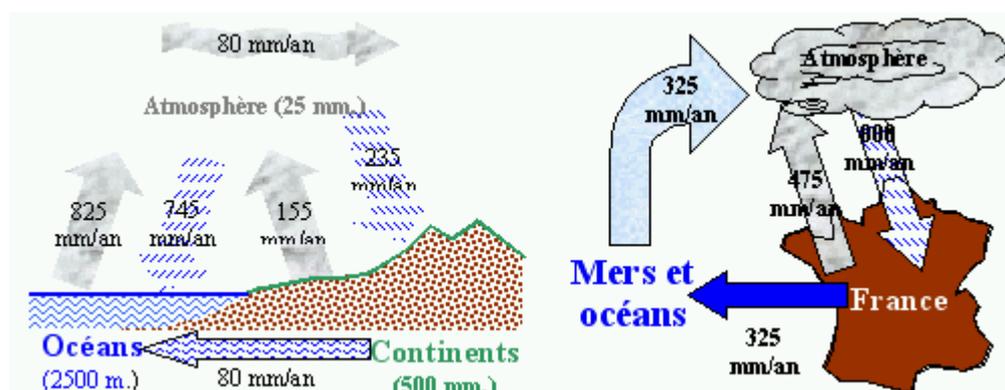
Le volume total des eaux douces est d'environ $36 \cdot 10^6 \text{ km}^3$, soit 2,8 % des réserves totales en eau. Par ailleurs, les eaux se répartissent à peu près ainsi, exprimées en épaisseur uniformément réparties sur la terre :

mers et océans : 2500 m.	eaux souterraines : 300 à 600 mm.
glaciers : 50 à 100 m.	eaux atmosphériques : 20 à 30 mm.
eaux continentales : 350 à 700 mm.	matière vivante : ε !

On retiendra que ce qui circule dans les cours d'eau ne représente qu'une partie absolument infime du volume d'eau total.

II - 2 - 2 : Flux

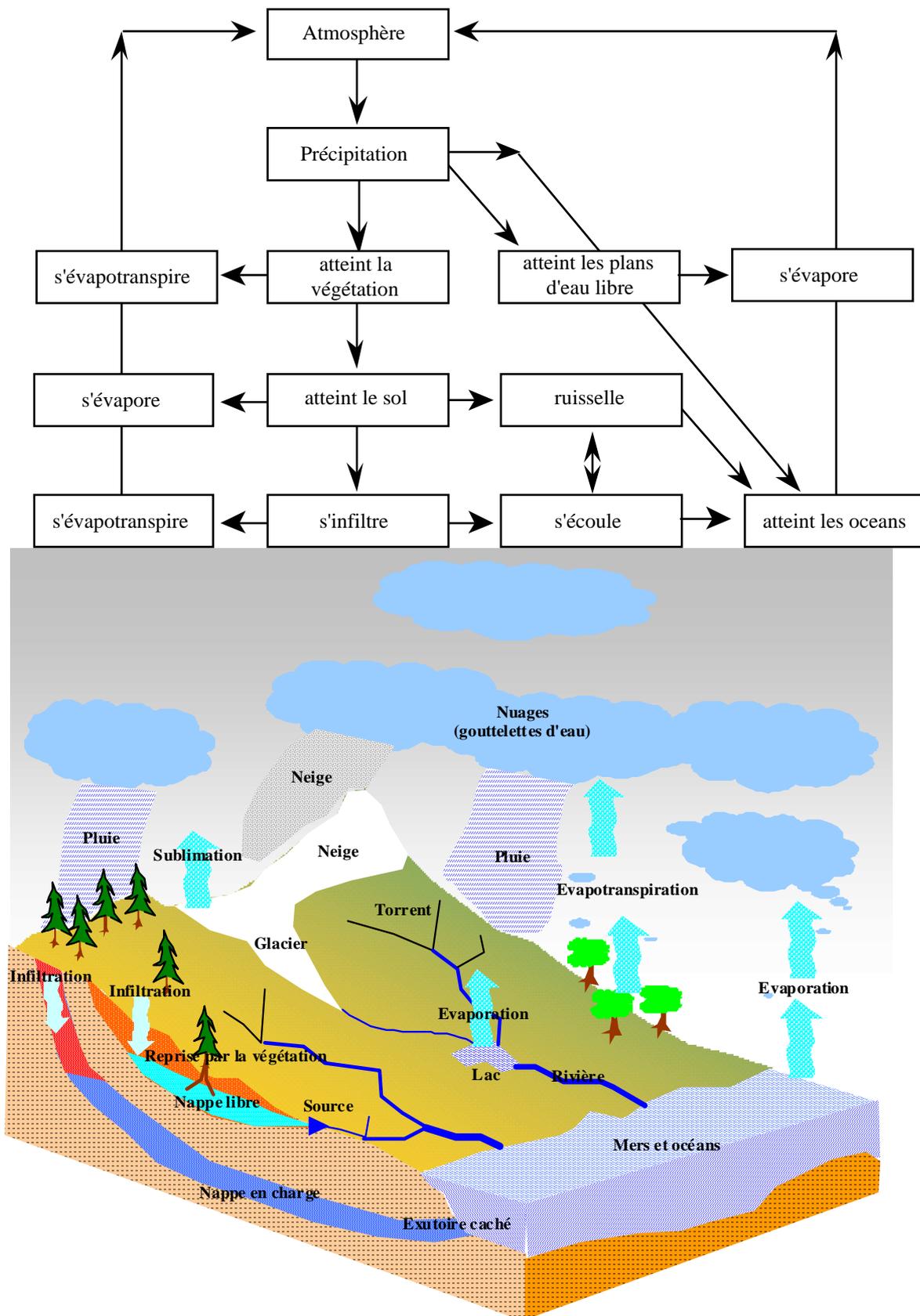
La vitesse avec laquelle l'eau circule est très variable ; généralement, on prend l'année comme période de référence. Les flux annuels sous forme liquide et gazeuse (les plus importantes) sont sensiblement les suivants :



II - 2 - 3 : Inertie des systèmes

On appelle "taux de renouvellement" le rapport du stock au flux qui l'alimente et "temps de séjour" l'inverse du taux de renouvellement. Plus le temps de séjour est important, plus l'inertie du système est importante : c'est par exemple le cas des eaux souterraines où il atteint couramment, pour des nappes importantes, 10 à 50000 ans ; en revanche la quasi totalité des eaux continentales ont un temps de séjour relativement limité, de l'ordre de quelques jours à un an.

II - 3 : CYCLE DE L'EAU



Cycle hydrologique schématique.

III - LE BASSIN VERSANT

En tout point d'un cours d'eau, nous serons amenés à définir son bassin versant et à caractériser son comportement hydrologique.

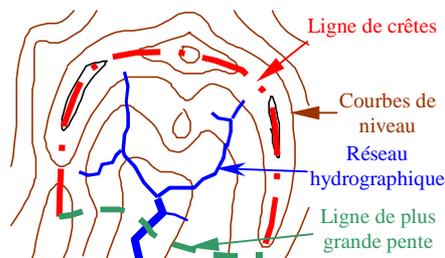
III.1 - NOTION DE "BASSIN VERSANT"

Le bassin versant en une section d'un cours d'eau est défini comme la surface drainée par ce cours d'eau et ses affluents en amont de la section. Tout écoulement prenant naissance à l'intérieur de cette surface doit donc traverser la section considérée, appelée exutoire, pour poursuivre son trajet vers l'aval.

Selon la nature des terrains, nous serons amenés à considérer deux définitions.

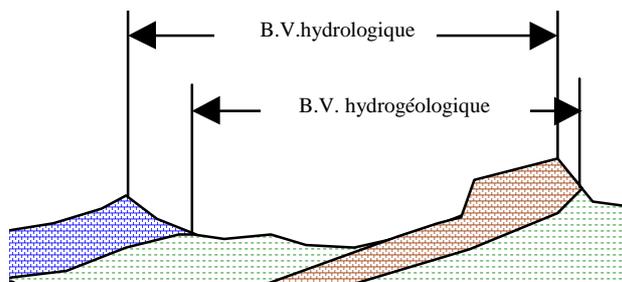
III.1.1 - Bassin versant topographique

Si le sous-sol est imperméable, le cheminement de l'eau ne sera déterminé que par la topographie. Le bassin versant sera alors limité par des lignes de crêtes et des lignes de plus grande pente comme le montre la figure ci-jointe.



III.1.2 - Bassin versant hydrogéologique

Dans le cas d'une région au sous-sol perméable, il se peut qu'une partie des eaux tombées à l'intérieur du bassin topographique s'infilte puis sorte souterrainement du bassin (ou qu'à l'inverse des eaux entrent souterrainement dans le bassin).



Dans ce cas, nous serons amenés à ajouter aux considérations topographiques des considérations d'ordre géologique pour déterminer les limites du bassin versant.

Cette distinction entre bassin topographique et hydrogéologique se justifie surtout pour les petits bassins. En effet, lorsque la taille du bassin augmente, les apports et les pertes souterraines ont plus de chance de se compenser. De plus, on peut admettre que le débit des cours d'eau est proportionnel à la surface du bassin, les échanges souterrains se font, eux, aux frontières et varient donc sensiblement comme le périmètre. Lorsque la taille du

bassin augmente, la surface croît plus vite que le périmètre et la valeur relative des échanges souterrains par rapport au débit de surface tend à devenir négligeable.

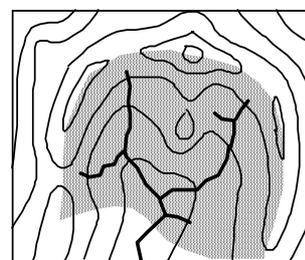
III.2 - CARACTERISTIQUES MORPHOMETRIQUES

L'utilisation de caractéristiques morphométriques a pour but de condenser en un certain nombre de paramètres chiffrés, la fonction $h = f(x, y)$ à l'intérieur du bassin versant (h altitude, x et y coordonnées d'un point du bassin versant). Nous utiliserons trois types différents de paramètres morphométriques.

III.2.1 - Caractéristiques de la disposition dans le plan

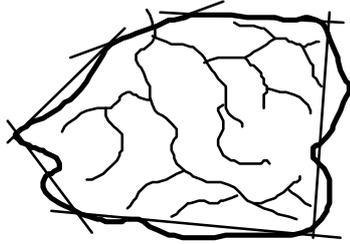
III.2.1.1 - Surface A

La surface du bassin versant est la première et la plus importante des caractéristiques. Elle s'obtient par planimétrie sur une carte topographique après que l'on y ait tracé les limites topographiques et éventuellement hydrogéologiques. La surface A d'un bassin s'exprime généralement en km^2 .

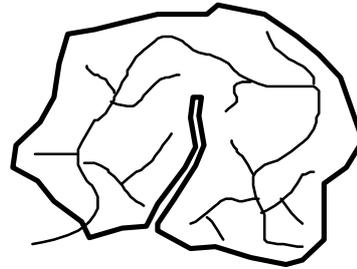


III.2.1.2 - Longueur

On utilise différentes caractéristiques de longueur ; la première et une des plus utilisées est le "périmètre P du bassin versant".



Schématisation du périmètre d'un bassin



Ajout d'un périmètre fictif pour un bassin versant replié

Le périmètre est curvimétré sur carte cartographique mais, selon l'échelle de la carte, les détails sont plus ou moins nombreux et il en résulte des différences de mesures. Par ailleurs, on devrait souvent prendre en compte des détails de la frontière qui, on s'en rend compte intuitivement, n'ont aucune influence sur l'écoulement. Avant de procéder au curvimétrage, il faut donc procéder à une schématisation des limites du bassin, soit par des courbes à grand rayon de courbure, soit par un tracé polygonal.

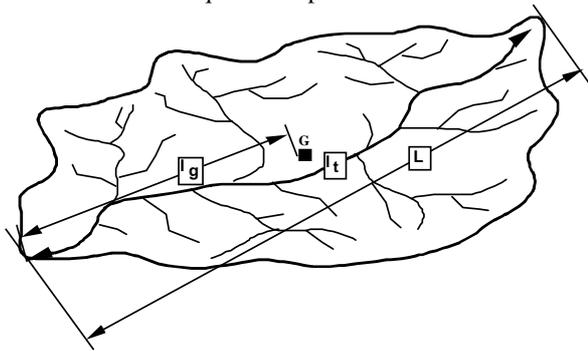
Dans des cas particuliers tels que celui d'un bassin replié sur lui-même, on pourra être amené à tracer des contours fictifs qui tiendront compte de chaque cas particulier.

Le périmètre P n'est généralement pas utilisé directement mais le plus souvent à travers des valeurs qui en dérivent, comme la "longueur L du rectangle équivalent". On définit le rectangle équivalent comme le rectangle de longueur L et de largeur l qui a même surface et même périmètre que le bassin versant, soit à l'aide de :

$$P = 2 \cdot (L + l) \quad \text{et} \quad A = L \cdot l$$

L'inconvénient de cette méthode est que l'on peut rencontrer des bassins plus compacts qu'un carré ; l'équation n'a alors plus de racines réelles !

A la suite de ces remarques critiques sur l'utilisation du périmètre comme critère de longueur, il a fallu définir d'autres caractéristiques et en particulier :



- la "longueur du plus long thalweg" (l_t). Cette caractéristique n'amène guère de remarques si ce n'est que dans la plupart des cas, on admet qu'il faut poursuivre le thalweg indiqué sur les cartes topographiques, vers l'amont jusqu'à la limite du bassin. De même, si le cours aval présente des méandres, on curvimètre en général tous les méandres.

- la "distance de l'exutoire au centre de gravité du bassin" (l_g). Ceci paraît être une bonne caractéristique de longueur mais elle nécessite l'évaluation de la position du centre de gravité du bassin ;

- la "plus grande longueur entre deux points de la frontière" (L). On utilise cette caractéristique surtout en association avec la "plus grande largeur" (l) perpendiculaire à la plus grande longueur. La caractéristique de forme la plus utilisée est le "coefficient K_c de Gravelius". Il se définit comme le rapport du périmètre du bassin versant au périmètre du cercle ayant même surface (appelée aussi coefficient de capacité) :

$$K_c = \frac{P}{2\sqrt{\pi A}} = 0,28 \frac{P}{\sqrt{A}}$$

A : surface et P : périmètre du bassin versant

On utilise également pour caractériser la forme d'un bassin, son "rectangle équivalent" (défini plus haut) et le rapport de la plus grande longueur à la plus grande largeur perpendiculaire (voir plus haut).

Enfin, une des façons des plus sophistiquées (mais des plus pénibles) pour caractériser la disposition d'un bassin dans le plan est d'établir la courbe aire-distance. Cette courbe donne la surface s en km^2 (ou en %) qui se trouve à une distance hydraulique supérieure à une valeur donnée d . (La distance hydraulique est la distance parcourue par une particule d'eau qui ruisselle d'un point du bassin jusqu'à l'exutoire.)

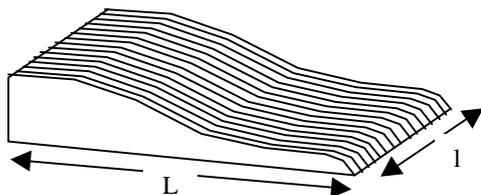
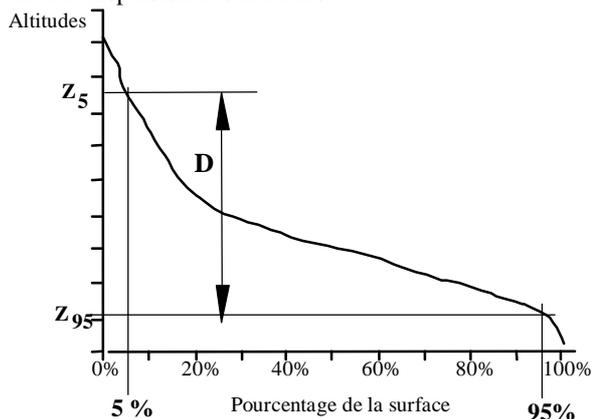
III.2.2 - Caractéristiques des altitudes (hypsométrie)

En général, on ne s'intéresse pas à l'altitude moyenne mais plutôt à la dispersion des altitudes.

L'étude statistique permet de tracer la "courbe hypsométrique". Cette courbe donne la surface s (en km^2 ou en % de la surface totale) où les altitudes sont supérieures à une cote h donnée. Cette courbe est établie en planimétrant pour différentes altitudes les surfaces situées au-dessus de la courbe de niveau correspondante. Cette méthode est précise mais fastidieuse. Une autre consiste à échantillonner les altitudes selon un maillage carré. On admet alors que l'altitude au centre d'une maille est égale à l'altitude moyenne de la maille.

Bien souvent, on définit la "dénivelée D " comme étant la différence de cote entre $H_{5\%}$ et $H_{95\%}$:

$$D = H_{5\%} - H_{95\%}$$



Parfois, on schématise la forme du bassin et la répartition des altitudes sur le rectangle équivalent. On construit alors une surface ayant même hypsométrie, même périmètre et même surface que le bassin versant.

III.2.3 - Les indices de pente

L'objet de ces indices est de caractériser les pentes d'un bassin et de permettre des comparaisons et des classifications.

III.2.3.1 - La pente moyenne

L'idée première qui vient à l'esprit est de caractériser les pentes par leur valeur moyenne I pondérée par les surfaces.

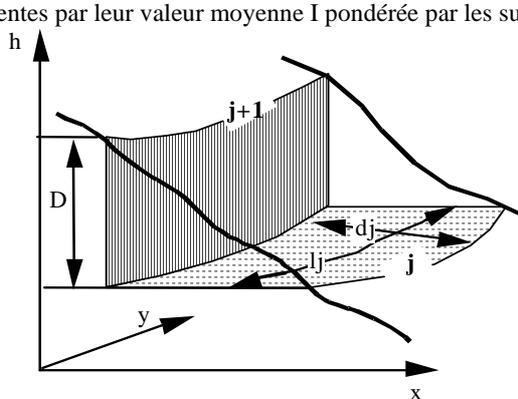
Soit D l'équidistance des courbes de niveau, soit d_j la largeur moyenne de la bande j comprise entre les lignes de niveau j et $j+1$ et soit l_j la longueur moyenne de cette

bande. La pente moyenne n_j sur cette bande est : $n_j = \frac{D}{d_j}$

La surface de la bande j est : $d_j \cdot l_j = a_j$

La pente moyenne I pondérée par les surfaces est donc

$$I = \frac{\sum n_j a_j}{\sum a_j} = \frac{\sum \frac{D d_j l_j}{d_j}}{\sum d_j l_j} = \frac{D \sum l_j}{A}$$

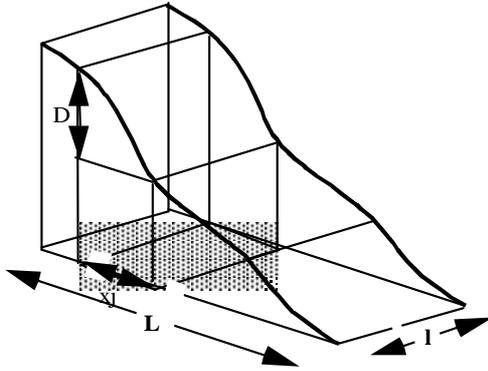


Si L_C est la longueur totale des courbes de niveau équidistantes de D , la pente moyenne I a pour expression : $I = \frac{D L_C}{A}$

L'estimation de cette expression simple est cependant laborieuse puisqu'il faut curvimétrer toutes les courbes de niveau. Ceci explique que cet indice est peu utilisé dans la pratique.

III.2.3.2 - Indice de pente de Roche I_p

M. ROCHE a proposé un indice de pente plus facile à calculer que le précédent : I_p est la moyenne de la racine carrée des pentes mesurées sur le rectangle équivalent, et pondérée par les surfaces.



La pente moyenne i sur la bande j est : $i_j = \frac{D}{x_j}$

La surface de cette bande est : $a_j = l_j x_j$

$$\text{d'où l'expression : } I_p = \frac{\sum_{i=1}^n a_j \sqrt{i_j}}{\sum_{i=1}^n a_j}$$

$$I_p = \frac{\sum l x_j \sqrt{\frac{D}{x_j}}}{A} = \frac{l \sum \sqrt{D} \sqrt{x_j}}{Ll} = \frac{\sqrt{D}}{L} \sum \sqrt{x_j}$$

En posant β_j le pourcentage de la surface totale se trouvant entre h_{j+1} et h_j : $\beta_i = \frac{x_i}{L}$ $I_p = \frac{\sqrt{D} \sum \sqrt{\beta_i}}{\sqrt{L}}$

L'estimation de I_p est plus simple que celle de I puisque l'on travaille sur le rectangle équivalent. Par ailleurs, la valeur de I est peu affectée par le choix de D (une dizaine de classes suffit pour bien estimer I_p).

III.2.3.3 - Indice de pente globale I_g

L'indice de Roche étant cependant trop long à évaluer pour des études rapides, on a proposé un indice encore plus simple : la pente globale... $I_g = \frac{D}{l}$

D étant la dénivelée $h_5\%$ - $h_{95}\%$, définie sur la courbe hypsométrique ou même directement à l'œil sur la carte topographique ; L étant la longueur du rectangle équivalent.

Cet indice, très facile à calculer, est des plus utilisés. Il sert de base à une des classifications O.R.S.T.O.M. pour des bassins versants dont la surface est de l'ordre de 25 km^2 :

R ₁	Relief très faible	$I_g <$	0,002
R ₂	Relief faible	0,002 $< I_g <$	0,005
R ₃	Relief assez faible	0,005 $< I_g <$	0,01
R ₄	Relief modéré	0,01 $< I_g <$	0,02
R ₅	Relief assez fort	0,02 $< I_g <$	0,05
R ₆	Relief fort	0,05 $< I_g <$	0,1
R ₇	Relief très fort	0,1 $< I_g$	

Par ailleurs, cet indice simple est étroitement corrélé avec l'indice de pente de Roche ($I_g = 0,8 I_p^2$), avec un coefficient de corrélation de l'ordre de 0,99.

III.2.3.4 - Dénivelée spécifique D_s

L'indice I_g décroît pour un même bassin lorsque la surface augmente, il était donc difficile de comparer des bassins de tailles différentes.

La dénivelée spécifique D_s ne présente pas cet inconvénient : elle dérive de la pente globale I_g en la corrigeant de l'effet de surface admis étant inversement proportionnel à \sqrt{A} : $D_s = I_g \sqrt{A} = \frac{D}{L} \sqrt{Ll} = D \sqrt{\frac{l}{L}}$

La dénivelée spécifique ne dépend donc que de l'hypsométrie ($D = H_{5\%} - H_{95\%}$) et de la forme du bassin (l/L). Elle donne lieu à une deuxième classification de l'O.R.S.T.O.M., indépendante des surfaces des bassins :

R ₁	Relief très faible	$D_s <$	10 m
R ₂	Relief faible	10 m $< D_s <$	25 m
R ₃	Relief assez faible	25 m $< D_s <$	50 m
R ₄	Relief modéré	50 m $< D_s <$	100 m
R ₅	Relief assez fort	100 m $< D_s <$	250 m
R ₆	Relief fort	250 m $< D_s <$	500 m
R ₇	Relief très fort	500 m $< D_s$	

III.2.3.5 - "Reliefs ratios"

Les Anglo-Saxons utilisent d'autres indices de pente I_{AS} que nous ne citerons que pour mémoire :

$$I_{AS} = \frac{\text{plus grande dénivelée}}{\text{plus long thalweg}}$$

$$I_{AS} = \frac{\text{plus grande dénivelée sur le pourtour}}{\text{plus grande longueur du bassin}}$$

III.2.4 - Les Modèles Numériques de Terrain

Depuis les années 1990, la puissance des micros ordinateurs a permis le large développement des Modèles Numériques de Terrain. Sous ce vocable on confond souvent l'ensemble de programme permettant de traiter de la topographie d'une zone (le M.N.T. au sens strict) et les altitudes aux nœuds d'un maillage régulier couvrant la zone d'étude (le Modèle Numérique d'Altitude M.N.A.). A partir d'un M.N.A., le M.N.T. permet de calculer automatiquement tous les paramètres classiques tels que pente, orientation des versants... Il peut également déduire de la topographie et à partir d'un point exutoire donné, retrouver les contours d'un bassin versant, le réseau hydrographique etc. La plus grande difficulté consistait à digitaliser le relief à partir de supports cartographiques. Depuis ces dernières années ces banques de données peuvent être achetées (IGN par exemple), mais on trouve également sur le WEB une couverture totale du monde gratuite.

III.3 - CARACTERISTIQUES DU RESEAU HYDROGRAPHIQUE

Le réseau hydrographique est constitué de l'ensemble des chenaux qui drainent les eaux de surface vers l'exutoire du bassin versant. La définition d'un cours d'eau est difficile à donner avec précision, en particulier pour les cours d'eau temporaires. Selon le support cartographique utilisé, on étudiera le réseau avec plus ou moins de détails : en photographie aérienne, on pourra déceler des thalwegs de très faibles extensions, tandis qu'on ne verra que les cours d'eau pérennes et importants sur une carte au 1/100 000 ème.

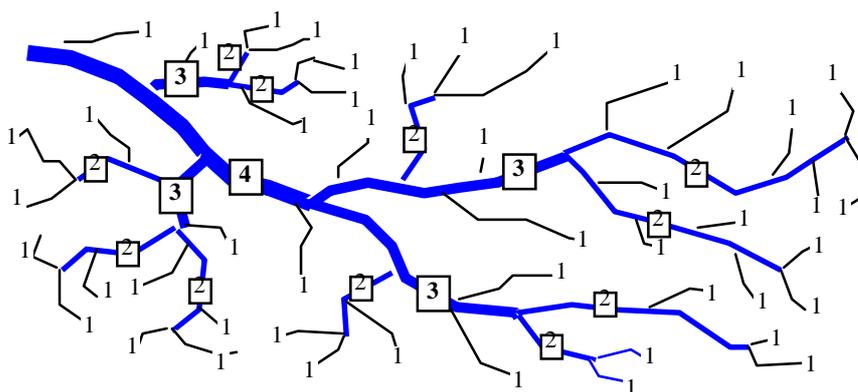
L'étude du chevelu hydrographique servant surtout à comparer des bassins entre eux, il suffit, dans la plupart des cas, de se fixer une définition du thalweg élémentaire et de l'appliquer pour l'étude de tous les bassins (par exemple : thalwegs = traits bleus temporaires ou pérennes sur carte I.G.N. au 1/50 000 ème).

Le réseau hydrographique peut se caractériser par trois éléments : sa hiérarchisation, son développement (nombres et longueurs des cours d'eau) et son profil en long.

III.3.1 - Hiérarchisation du réseau

Pour chiffrer la ramification du réseau, chaque cours d'eau reçoit un numéro fonction de son importance. Cette numérotation, appelée ordre du cours d'eau, diffère selon les auteurs. Parmi toutes ces classifications, nous adopterons celle de Strahler :

- tout cours d'eau n'ayant pas d'affluent est dit d'ordre 1 ,
 - au confluent de deux cours d'eau de même ordre n, le cours d'eau résultant est d'ordre n + 1 ,
 - un cours d'eau recevant un affluent d'ordre inférieur garde son ordre, ce qui se résume par :
- $$n + n = n + 1 \quad \text{et} \quad n + m = \max(n,m)$$



Comme on le signale plus haut, la définition d'un thalweg peut changer selon le support utilisé. Des études effectuées sur des bassins versants en France permettent de définir la correspondance moyenne entre l'ordre lu sur la carte et l'ordre réel que révèle la photographie aérienne (selon F. HIRSCH) :

Ordre réel	Ordre lu sur la carte	Echelle de la carte
2	1	1/20 000
3	1	1/50 000
4	1	1/100 000
5	1	1/200 000

III.3.2 - Les lois de Horton

Ces "lois" empiriques relient le nombre, la longueur moyenne et l'ordre des cours d'eau. On constate que pour un bassin versant homogène, le "rapport de confluence" R_C , rapport du nombre N_i de cours d'eau d'ordre i au nombre N_{i+1} de cours d'eau d'ordre $i+1$, est sensiblement constant :

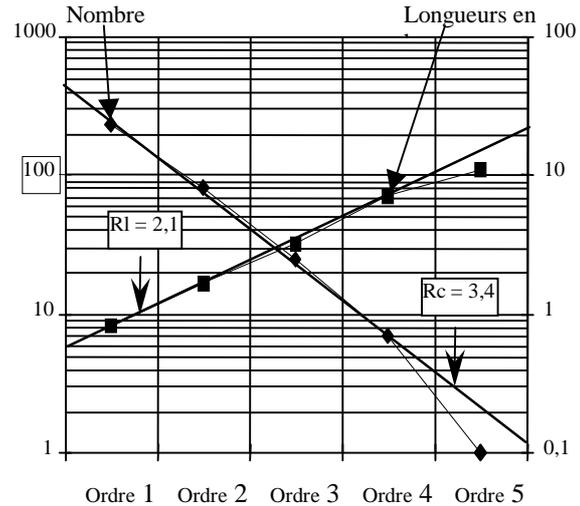
$$R_C \approx \frac{N_i}{N_{i+1}} \approx \text{Cte}$$

Il en est de même du "rapport des longueurs moyennes" :

$$R_L \approx \frac{l_i}{l_{i-1}} \approx \text{Cte}$$

(l_i : longueur moyenne des cours d'eau d'ordre i).

La détermination de R_C et R_L se fait par voie graphique en portant N_i , l_i et i sur un graphique semi-logarithmique comme le montre la figure jointe. La pente de la droite moyenne permet de déterminer la raison de la progression géométrique.



III.3.3 - Autres caractéristiques du chevelu

D'autres éléments que R_C et R_L sont pris pour caractériser le chevelu. Parmi ceux-ci, on peut citer :

III.3.3.1 - La densité de drainage D_d

Elle se définit par le rapport de la longueur totale des cours d'eau à la surface du bassin versant :

$$D_d = \frac{\sum l_i}{A} (\text{km}^{-1})$$

III.3.3.2 - La fréquence des thalwegs d'ordre 1 : F_1

C'est le rapport du nombre total de thalwegs d'ordre 1 à la surface du bassin versant : $F_1 = \frac{N_1}{A} (\text{km}^{-2})$

III.3.3.3 - La courbe aire-distance

Déjà citée comme caractéristique de la forme du bassin, elle tient également compte de la répartition des thalwegs et peut donc être considérée comme une caractéristique du réseau hydrographique.

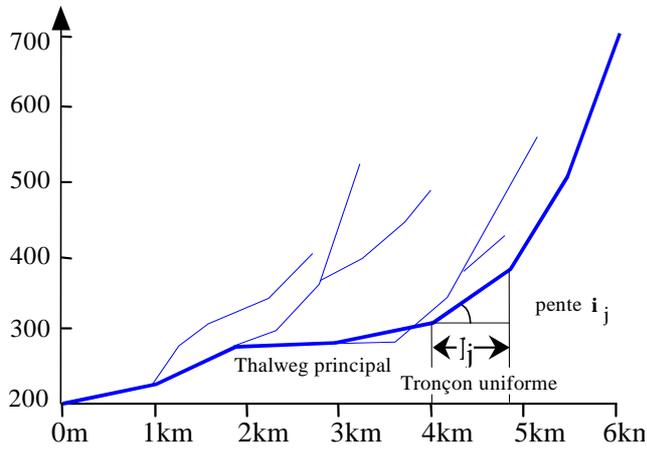
III.3.3.4 - Endoréisme

On caractérise par ce terme, les réseaux hydrographiques qui ne se relient à aucun autre réseau plus important. Les réseaux endoréiques sont surtout fréquents en zone aride et en zone karstique. On peut distinguer deux types d'endoréisme :

- un endoréisme total où le réseau hydrographique converge vers une zone centrale (ou parfois périphérique) du bassin où apparaît une surface d'eau libre permanente ou non, à partir de laquelle s'évapore la quasi-totalité des apports ;
- un endoréisme du ruissellement. Dans ce cas, le réseau de drainage aboutit à une zone où l'eau s'infiltre et poursuit son écoulement vers l'extérieur du bassin par les nappes.

III.3.4 - PROFILS EN LONG

Ces profils sont établis en portant en abscisses les longueurs développées à partir d'un point de référence et en ordonnées les cotes de l'eau dans le cours d'eau principal et dans ces affluents (parfois on donne la cote du fond). Ces profils sont parfois disponibles lorsque la navigation, où les besoins en hydroélectricité ont nécessité des études. Mais dans la plupart des cas, on devra faire ce relevé, soit par nivellement sur le terrain, soit plus sommairement à partir des cartes topographiques.



Les profils en long permettent d'estimer la pente moyenne du cours d'eau. Cette pente moyenne sert surtout dans l'évaluation des temps de concentration d'un bassin versant, ce temps de concentration étant lié à la vitesse de propagation des particules fines ; elle-même proportionnelle à \sqrt{i} ,

On calcule généralement la pente moyenne I d'un cours d'eau

$$\text{par la formule suivante : } \frac{1}{\sqrt{I}} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^n \frac{l_j}{\sqrt{i_j}}$$

Dans cette formule, le cours d'eau de longueur totale L est découpé en n tronçons j où la pente i_j est constante sur une longueur l_j .

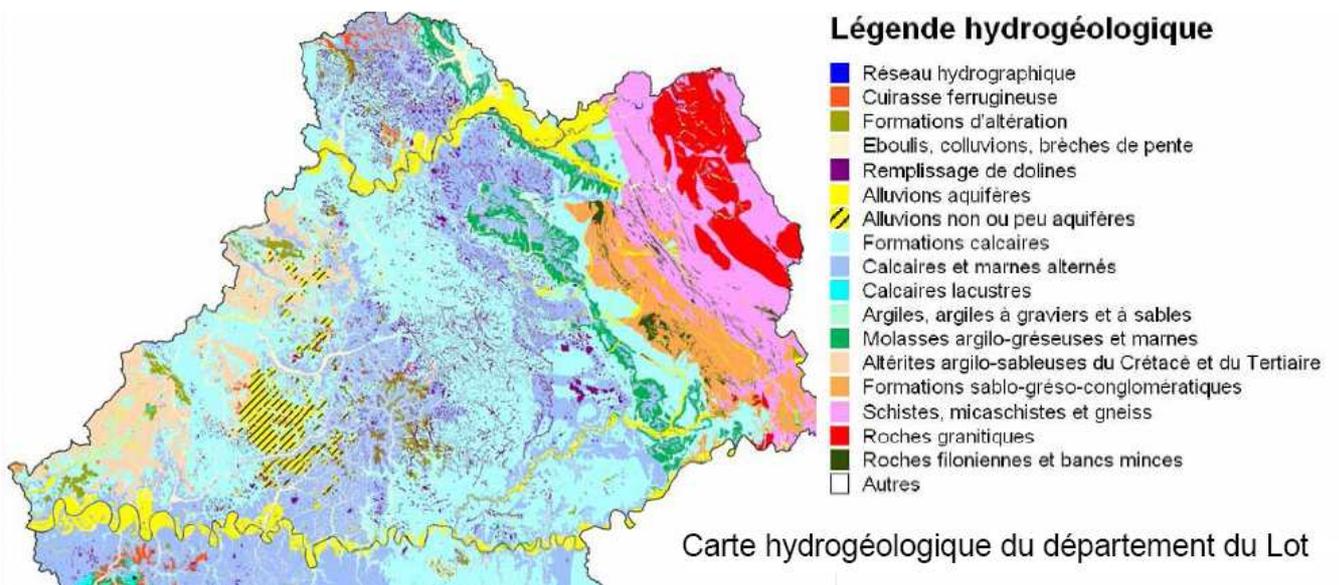
III.4 - CARACTERISTIQUES GEOLOGIQUES

La géologie d'un bassin versant est un facteur très important du régime des cours d'eau qui drainent ce bassin. En période de crue, les volumes écoulés seront d'autant plus grands que le bassin sera plus imperméable. En période de basses eaux, les débits seront d'autant plus forts que les nappes sont plus nombreuses et importantes.

Enfin, la géologie influe indirectement sur l'évapotranspiration par l'effet thermique dû à la couleur des sols et par le développement de la végétation en fonction des sols (albédo).

On se contente généralement de caractériser la géologie d'après le comportement hydrogéologique du bassin. L'O.R.S.T.O.M. a proposé une classification en cinq groupes ainsi définis :

Classe	Intitulé	Exemple
P1	Perméable à aquifère drainant ou non drainé	Formation gréseuse dont les exutoires sont à l'extérieur du bassin
P2	Perméable à aquifère drainé	Formation gréseuse dont les sources alimentent le réseau
P3	Perméabilité moyenne ou faible	Alternance de marnes et calcaires
P4	Karstique	Formation calcaire, perméabilité de fissures et développement d'un réseau souterrain
P5	Imperméable	Terrain marneux, cristallin, etc.



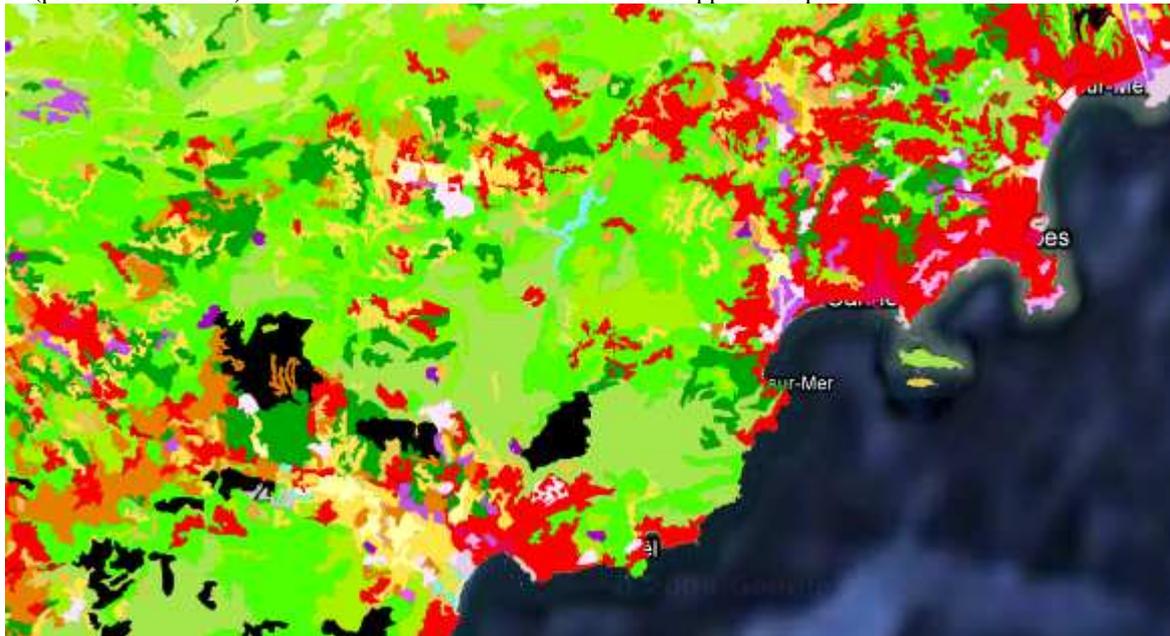
III.5 - LE COUVERT VEGETAL

Le couvert végétal influe beaucoup sur les quantités d'eau disponibles pour l'écoulement de surface. En effet, l'évapotranspiration par les végétaux est très importante et elle varie selon la nature des végétaux (forêts, cultures, prairies, etc.).

Par ailleurs, la végétation joue également un rôle atténuateur important en période de crue : en effet, lorsque la végétation est développée, le ruissellement est retardé et la pointe de crue est atténuée. Par ailleurs, l'écoulement étant plus long, la part d'eau reprise par l'évapotranspiration augmente et le volume de la crue diminue.

Pour caractériser le couvert végétal, on utilise le pourcentage des surfaces occupées par chaque type de végétation. Sous nos climats, on se contente de trois classes : forêt, cultures, pâturages et friches. (Parfois même, on ne retient que le pourcentage des forêts.). Cette classification est évidemment à adapter pour d'autres climats (par exemple sols nus, savanes, forêts, galeries, rizières, etc.).

La détermination des surfaces occupées par chaque type de végétation est difficile car les documents cartographiques les mentionnant sont rares et bien souvent dépassés. Par exemple, le type de culture peut changer d'une année à l'autre (prairies -> cultures). La télédétection satellitaire trouve ici une application particulièrement efficace.



1 Territoires artificialisés	2 Territoires agricoles
11 Zones urbanisées	21 Terres arables
111 Tissu urbain continu	211 Terres arables hors périmètres d'irrigation
112 Tissu urbain discontinu	212 Périmètres irrigués en permanence
12 Zones industrielles ou commerciales et réseaux de communication	213 Rizières
121 Zones industrielles et commerciales	22 Cultures permanentes
122 Réseaux routier et ferroviaire et espaces associés	221 Vignobles
123 Zones portuaires	222 Vergers et petits fruits
124 Aéroports	223 Oliveraies
13 Mines, décharges et chantiers	23 Prairies
131 Extraction de matériaux	231 Prairies
132 Décharges	24 Zones agricoles hétérogènes
133 Chantiers	241 Cultures annuelles associées aux cultures permanentes
14 Espaces verts artificialisés, non agricoles	242 Systèmes culturaux et parcellaires complexes
141 Espaces verts urbains	243 Surfaces essentiellement agricoles, interrompues par des espaces naturels importants
142 Equipements sportifs et de loisirs	244 Territoires agro-forestiers

Extraits de la base Corine Landcover

III.6 - CARACTERISTIQUES GLACIOLOGIQUES

Dans certains cas particuliers, le bassin versant peut être envahi en partie par des glaciers ou des manteaux neigeux permanents. Pour caractériser ceci, on utilise bien souvent le pourcentage et la surface occupée par les neiges et les glaciers.

IV - L'ATMOSPHERE

L'atmosphère joue un rôle essentiel dans l'apparition de phénomènes hydrologiques. Le comportement de l'atmosphère nous intéresse à trois niveaux :

- L'atmosphère constitue un stock d'air et d'eau. L'eau de l'atmosphère est sous forme de vapeur, sous forme liquide (fines gouttelettes) ou sous forme solide (cristaux de glaces en suspension). Cependant, on admet que la hauteur d'eau moyenne condensable ne représente qu'environ 20 mm.

- La terre est soumise à des échanges continuels d'énergie avec l'espace. L'atmosphère constitue un collecteur de chaleur provenant soit du soleil, soit du sol. Les échanges varient d'une façon très importante en fonction du temps (à l'échelle saisonnière et à l'échelle journalière) et aussi en fonction du lieu. Ces différences provoquent des mouvements importants des masses d'air (et d'eau).

- L'atmosphère joue donc un rôle de transport d'eau. Les vitesses de ces transports varient de quelques dizaines de kilomètres par heure au sol à plus de 400 km/h pour les "jet-streams" en altitude.

Nous allons évoquer successivement ces trois rôles joués par l'atmosphère.

IV.1 - CONSTITUTION DE L'ATMOSPHERE

On peut caractériser l'atmosphère par sa composition, sa pression et sa température. A partir de ces trois éléments, on pourra expliquer la plupart des phénomènes atmosphériques.

Avant d'aborder la description de ces trois paramètres, il convient de faire les remarques suivantes :

- l'atmosphère est de très faible épaisseur :
 - . la moitié de la masse atmosphérique est renfermée dans les cinq premiers kilomètres,
 - . les 9/10 sont dans les vingt premiers kilomètres,
 - . enfin, il ne reste que moins du millième de la masse totale au-delà de 60 km d'altitude ;
- les gradients verticaux sont beaucoup plus forts que les gradients horizontaux (de 1 000 à 10 000 fois pour les températures et les pressions) ;
- les écoulements aériens sont essentiellement horizontaux mais les singularités topographiques peuvent perturber gravement ces écoulements.

Par la suite, on pourra ne s'intéresser qu'à ce qui se passe dans les quinze premiers kilomètres d'altitude.

IV.1.1 - Composition de l'atmosphère

Comme nous l'avons déjà dit, l'atmosphère est un mélange d'air et d'eau en proportion variable.

IV.1.1.1 - Atmosphère sèche

En absence d'eau, on admet que la composition moyenne la plus probable est la suivante :

Eléments	Volume %	Environ %
N	78,09	78 %
O	20,95	21 %
A _r	0,93	1 %
CO ₂	0,03	
N _e	1,8.10 ⁻³	
H _e	5,2.10 ⁻⁴	
K _r	1,0.10 ⁻⁴	
H	5,0.10 ⁻⁵	
X _e	0,8.10 ⁻⁶	

Cette composition est pratiquement invariable et l'atmosphère sèche peut être assimilée à un gaz parfait de masse moléculaire $M = 29 \text{ g}$ ($1,29 \text{ kg/m}^3$ dans les conditions standards).

IV.1.1.2 - Mélange air-eau

A ce "gaz parfait" s'ajoute la vapeur d'eau en quantité très variable. La pression partielle de la vapeur d'eau dans ce mélange est appelée "tension de vapeur". Elle ne peut, théoriquement, dépasser un certain seuil, appelé "tension de vapeur" saturante, qui ne dépend que de la température.

Température (° C)	-20	-10	0	10	20	30
Tension de vapeur saturante (en mm de Hg)	0,78	1,96	4,58	9,21	17,5	31,8
Masse d'eau sous forme vapeur (en g/m ³)	0,89	2,16	4,85	9,42	17,3	30,4

Au-delà de ce seuil, il y aura condensation sous forme de fines gouttelettes et création de nuages. La condensation d'un gramme d'eau libère 600 calories, ce qui permet d'élever de 1° C un mètre-cube d'air dans les conditions standards. Le

passage de ce même gramme d'eau à l'état solide à 0° C ne libère que 80 calories. Enfin, à 0° C, la chaleur latente de sublimation de la glace est de 675 cal/g.

Dans le détail, on constate de légères différences de tension de vapeur saturante e_s pour les températures inférieures à zéro degré selon que l'on est en présence d'eau surfondue ou de cristaux de glace. Cette différence est maximale vers -10° C où l'on a :

$$e_s(\text{eau surfondue}) - e_s(\text{cristaux de glace}) \cong 0,27 \text{ millibar}$$

Cette constatation sera utilisée plus loin pour expliquer le déclenchement des précipitations.

Pour caractériser le mélange air-eau, on utilise différents paramètres dont :

* l'humidité absolue h_a :

C'est la masse de vapeur d'eau par unité de volume. Avec les unités habituelles en climatologie, on a la relation :

$$h_a = 217 \frac{e}{T}$$

h_a : en g/m^3 , e : tension de vapeur en millibar, T : température absolue

* l'humidité relative h_r :

C'est le rapport de la tension de vapeur effective e à la tension de vapeur saturante e_s :

$$h_r = \frac{e}{e_s} = \frac{h_a}{h_{a \text{ saturante}}}$$

* le rapport de mélange r :

Rapport de la masse de vapeur d'eau à la masse d'air sec. Il peut s'exprimer sous la forme :

$$r = 622 \frac{e}{p_a - e} \quad r : \text{en g/kg}$$

Les valeurs de r sont très variables puisqu'elles oscillent entre 0,5 g/kg pour les airs secs et froids arctiques à 25 g/kg pour un air tropical humide.

* le point de rosée T_r :

C'est la température à laquelle un mélange à r et P donné devient saturé.

IV.1.2 - Champ vertical des pressions

En général, les pressions décroissent exponentiellement avec l'altitude. Dans nombre de problèmes pratiques, on utilisera la notion d'atmosphère standard voisine des conditions moyennes.

A cette atmosphère standard se superposent des variations en fonction du temps. Ces variations sont de deux types :

- des variations diurnes régulières de l'ordre de quelques millimètres et analogues à une double marée journalière ;
- des variations irrégulières dues aux passages des perturbations et dont l'amplitude dépasse souvent 10 mm de Hg.

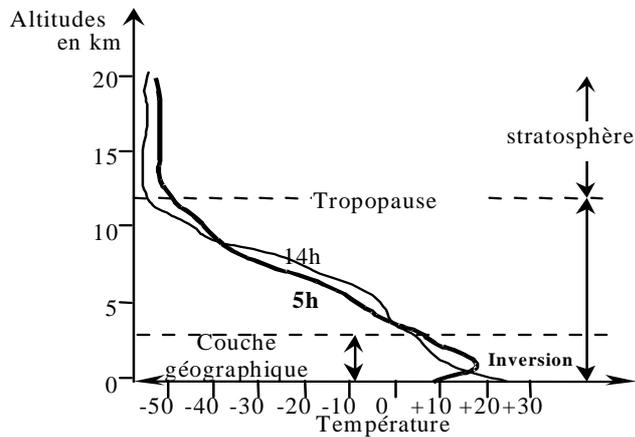
Pour rendre compte de l'évolution des pressions, on est amené à tracer des cartes isobares, cartes qui donnent le lieu des points d'égale pression au sol (ramené au niveau de la mer). Pour étudier les phénomènes météorologiques, il faut également connaître la pression en fonction de l'altitude ; aussi utilise-t-on des isohypses qui sont des lignes de niveau des surfaces isobares (700, 500, 300 millibars).

Pour l'hydrologue intéressé par l'étude des pluies de front qui, on le verra plus loin, prennent naissance vers 3.000 m, on utilisera les isohypses de 700 millibars. Par contre, pour les problèmes de grêle qui apparaissent vers 5.000 m, on utilisera les isohypses de 500 millibars.

IV.1.3 - Champ vertical des températures

IV.1.3.1 - Champ vertical moyen

Les phénomènes météorologiques qui nous intéressent se déroulent dans les couches basses de l'atmosphère, situées en dessous de la "tropopause". Cette surface limite, vers 12 km d'altitude, la "troposphère" de la "stratosphère". (Au-delà de 80 km, on rentre dans "l'ionosphère"). La "couche turbulente" (ou couche géographique) constitue les trois premiers kilomètres. Dans cette zone, les températures varient "n'importe comment". Au-delà, on observe jusque vers 10 km, une décroissance des températures avec un gradient de 0°5 C à 0°65 C par 100 m. Cependant, cette décroissance moyenne supporte des exceptions et on peut même rencontrer assez fréquemment des "inversions de température" (croissance de la température avec l'altitude).



Les variations de gradients des températures dans la troposphère peuvent être très rapides (sur 1/4 d'heure à 1/2 heure). Les profils de températures sont enregistrés lors de lâcher de ballons-sondes. (En France, une dizaine de stations météorologiques avec deux lâchés par jour.)

IV.1.3.2 - Gradient vertical de l'adiabatique sèche

Supposons que l'on déplace adiabaticquement une particule d'air sec. Nous pouvons appliquer à ce "pseudo-gaz parfait" les lois de la thermodynamique. On trouve alors que le gradient vertical est sensiblement constant et de l'ordre de $-1^\circ \text{C}/100 \text{ m}$. Ce résultat est encore valable pour un mélange air-eau non saturé.

IV.1.3.3 - Gradient vertical de l'adiabatique humide

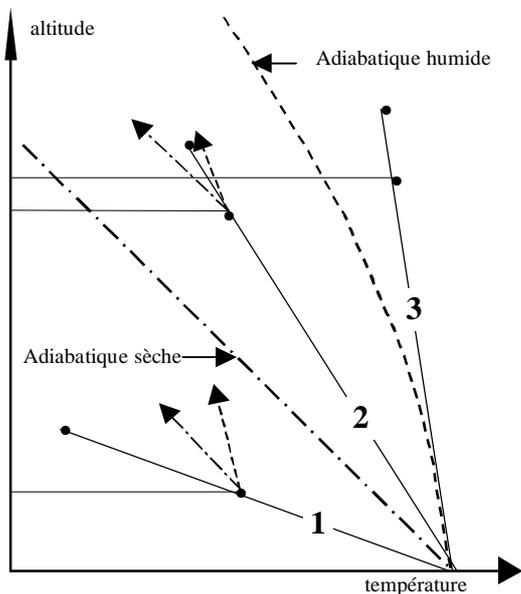
Si l'air maintenant est saturé en eau (présence d'eau liquide), il y aura évaporation ou condensation lors des variations de température. La chaleur latente de changement d'état jouera un rôle modérateur et les gradients seront plus faibles. A la différence de l'adiabatique sèche, le gradient de l'adiabatique humide dépend à la fois de la température et de la pression (donc de l'altitude). Il croît avec la température et décroît avec la pression.

IV.1.3.4 - Gradient vertical du point de rosée

A mélange constant, le point de rosée varie avec l'altitude. Le gradient vertical est de l'ordre de $-0.2^\circ \text{C}/100 \text{ m}$.

IV.1.4 - Stabilité et instabilité atmosphérique

Sur le graphique température altitude, les adiabatiques sèche et humide délimitent trois zones numérotées de 1 à 3. Selon la position du gradient réel de température, on prévoit la stabilité ou l'instabilité de l'air.



- Si le gradient de température se situe dans la zone 1, un élément de volume qui serait entraîné vers le haut suivrait, soit l'adiabatique sèche, soit l'adiabatique humide, mais dans chaque cas, il se trouverait à une température supérieure à celle de l'air ambiant, donc plus léger. Il apparaît alors une force qui tend encore à faire monter cet élément de volume. Dans la zone 1, il y a toujours instabilité atmosphérique.

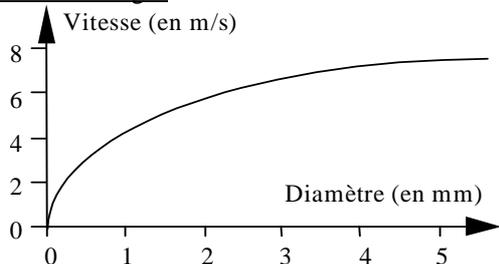
- Dans la zone 3, un élément de volume entraîné vers le haut se refroidit selon l'adiabatique sèche ou humide, mais toujours moins vite que l'air ambiant. Donc, la particule que l'on a élevée se trouve plus froide donc plus lourde que l'air ambiant. Il apparaît une force tendant à ramener vers le bas cette particule. Dans la zone 3, il y a toujours stabilité atmosphérique.

- Enfin, dans la zone 2, et conformément aux raisonnements précédents, si l'air est saturé, il se refroidit moins vite que l'air ambiant ; il y a instabilité. Si l'air est sec il se refroidit plus vite et il y a stabilité. Dans la zone 2, il y a instabilité conditionnelle, air sec stable et air saturé instable.

IV.1.5 - Etude des précipitations

Jusqu'à maintenant, nous avons supposé que lorsque l'air devenait saturé, l'eau liquide qui apparaissait restait dans l'élément de volume. Ceci n'est valable que dans la mesure où les gouttelettes peuvent rester en suspension. Si ce n'est pas le cas, il y a apparition de précipitations (sous forme liquide ou solide).

IV.1.5.1 - Les nuages



Le nuage est un aérosol pouvant être constitué d'air, de vapeur d'eau, de gouttelettes d'eau liquides et de cristaux de glace. Les dimensions des gouttelettes sont très faibles. On admet que leur diamètre est de l'ordre de 5 à 30 μ et leur espacement de 1 mm. Leur vitesse de chute en air calme serait de quelques millimètres par seconde ; or, les nuages sont animés de turbulences dont les vitesses instantanées sont sans aucune commune mesure (plusieurs mètres par seconde).

Pour qu'il y ait chute des particules d'eau, il faut que leur vitesse soit très nettement supérieure à la vitesse des courants ascendants. Sur la figure jointe, on constate que les gouttes doivent avoir au moins un diamètre de 0,5 mm pour pouvoir provoquer une pluie. Pour former une goutte de pluie, il faut donc environ 10^6 gouttelettes élémentaires !

IV.1.5.2 - Déclenchement des précipitations

L'agglomération des gouttelettes se ferait selon le schéma suivant (le plus probable et le plus généralement admis) :

Supposons un "nuage froid" dans lequel on rencontre à la fois des cristaux de glace et de l'eau surfondue. La tension de vapeur saturante étant différente dans ces deux cas, la goutte d'eau surfondue va se vaporiser au profit des cristaux de glace. TOR-BERGERON ont pu montrer qu'à -10° , toute l'eau liquide d'un nuage peut se réunir en 20 mn sur les cristaux de glace lorsque leur densité est de 1 cristal/cm³. On obtient ainsi des gouttes de 0,1 mm environ de diamètre.

Dans les autres cas où il n'y a pas présence de cristaux de glace, on pense que le phénomène est analogue à celui décrit par TOR-BERGERON. Le rôle des cristaux serait joué par des germes tels que des cristaux de sel, des poussières, etc. Eventuellement, les différences de température entre les gouttelettes pourraient également expliquer une condensation préférentielle à partir des gouttes "chaudes" sur les "froides".

Ainsi, les gouttes peuvent atteindre un diamètre de 0,1 mm et acquérir une vitesse de chute suffisante pour grossir par "balayage" d'autres gouttelettes. La goutte ainsi amorcée va augmenter de volume lors de sa chute et accroître sa vitesse.

IV.1.5.3 - Entretien des précipitations

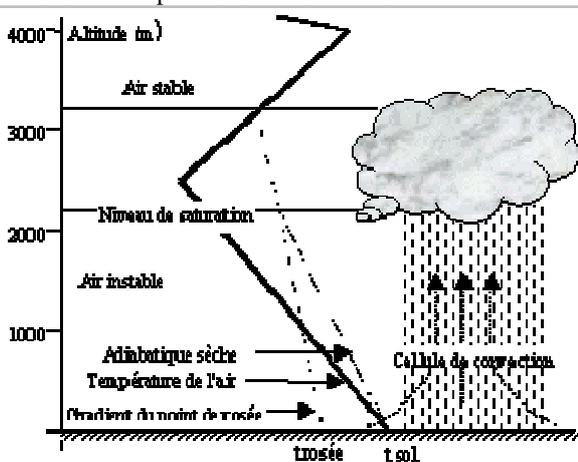
L'étude des précipitations montre que le schéma simpliste selon lequel les nuages prendraient naissance au-dessus des océans, puis poussés par les vents tomberaient en pluie sur les continents, est faux.

En effet, on peut admettre qu'un nuage ayant pris naissance au-dessus de l'Atlantique déverse environ 100 mm sur l'Europe et la Russie Occidentale avant de se dissiper au-delà de l'Oural. Or, un nuage ne contient au maximum que 20 mm d'eau environ. Ce n'est donc qu'au plus 20 mm qui proviennent des océans et 80 mm qui viennent de l'atmosphère au-dessus des continents.

Par ailleurs, on constate des averses dépassant fréquemment 20 mm. Il faut donc que le nuage soit continuellement ré-alimenter en eau.

Ceci se produit lorsqu'il y a des vents ascendants qui entraînent des masses d'air humide mais non saturé vers la zone de formation du nuage. De telles conditions se présentent lorsque l'on rencontre un ou plusieurs de ces trois cas principaux :

IV.1.5.3.1 Précipitations de convection :



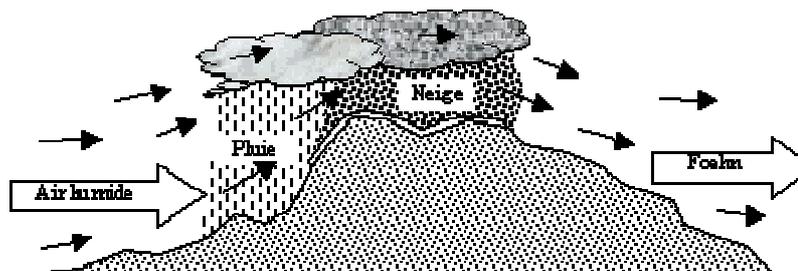
Si une masse d'air se réchauffe au voisinage du sol, le profil de température va évoluer en augmentant son gradient et en tendant vers la zone 1 du §.IV.1.4. Il y aura alors instabilité et apparition de cellules de convection. L'air humide et chaud va monter, se détendre et se refroidir. Lorsque le point de rosée est atteint, il se forme un nuage (cumulus) et si l'ascendance est suffisante, on pourra atteindre une altitude suffisante pour déclencher les précipitations.

Ce type de pluie correspond à la plupart des précipitations des régions équatoriales ; on le rencontre également en climat tempéré sous forme d'orages d'été.

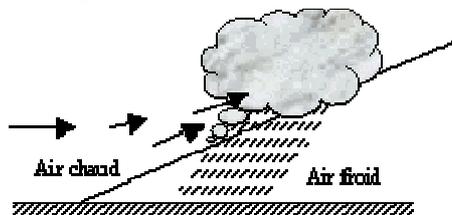
IV.1.5.3.2 Précipitations orographiques :

Si une masse d'air se déplaçant horizontalement rencontre un obstacle topographique (chaîne de montagnes par exemple), il s'ensuit une élévation des masses d'air et par conséquent leur refroidissement. Comme précédemment, on obtient

des précipitations sous forme de pluie mais aussi, si l'altitude est suffisante, de la neige. Après le passage de la chaîne, l'air va redescendre, se comprimer et se réchauffer. On a alors des vents chauds et secs (effet de "foehn").



IV.1.5.3.3 Précipitations de front :



Lorsque plusieurs masses d'air de propriétés différentes se rencontrent, les plus chaudes et les plus humides sont poussées vers les hautes altitudes où elles se refroidissent et se condensent.

Ce sont ces précipitations qui sont les plus importantes, les plus longues et les plus fréquentes sous nos climats tempérés.

IV.1.5.4 - Précipitations solides

Elles se produisent essentiellement sous deux formes :

IV.1.5.4.1 La grêle :

Elle se forme dans les cumulo-nimbus vers 5 000 m d'altitude avec de fortes turbulences. Les quantités d'eau surfondues que peuvent contenir ces nuages se solidifient brusquement au contact de cristaux de glaces. Ce phénomène est relativement mal connu. Son extension géographique est généralement faible (par exemple : 1 à 2 km sur 10 à 15 km).

IV.1.5.4.2 La neige :

C'est la principale forme de précipitations solides. Elle résulte d'une condensation lente et progressive de la vapeur d'eau à une température voisine de 0° C. Cette condensation se fait initialement en cristaux en forme d'étoile à six branches. Si les cristaux subissent une fusion partielle, ils s'agglomèrent au cours de leur chute pour former les flocons.

En France, les chutes de neige sont essentiellement dues :

- à des dépressions atmosphériques liées à des vents du sud-ouest ; elles sont accompagnées d'un relèvement de la température. Ces neiges, appelées "neige de redoux", apportent la plus grande part des neiges hivernales en montagnes,
- à des invasions d'air polaire. Accompagnées de vent de secteur nord ou nord-ouest, ces chutes de neiges sont les plus fréquentes en plaine.

IV.2 - L'ATMOSPHERE, COLLECTEUR DE CHALEUR

L'atmosphère joue un rôle de collecteur de chaleur en captant sélectivement les radiations venant du soleil ou de la terre.

IV.2.1 - L'énergie solaire

Le soleil émet une énergie sensiblement constante. Le flux moyen à travers une surface normale aux rayons solaires, située à la limite supérieure de l'atmosphère, est appelé la "constante solaire".

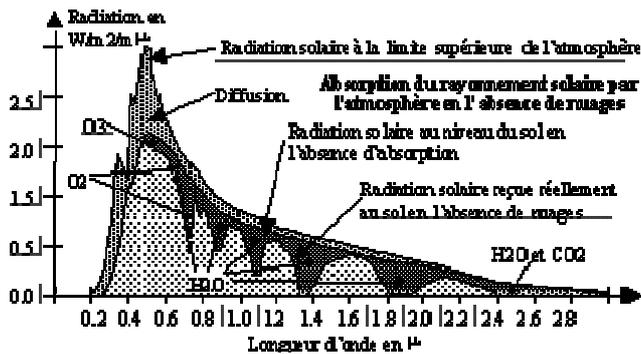
A la distance moyenne terre-soleil (149.10⁶ km), on admet que cette constante est de 1,396 kW/m².

Dans le temps, l'énergie solaire arrivant aux confins de l'atmosphère subit des variations :

- saisonnières qui sont dues d'une part à la modification de la distance terre-soleil entre l'hiver et l'été et d'autre part, à la variation de l'incidence moyenne des rayons solaires. (Ces variations se contrarient en partie.) ;
- journalières dues à l'incidence variable des rayons solaires durant le jour et à leur absence durant la nuit.

Ce flux d'énergie est composé de radiations de différentes longueurs d'ondes (comparable au rayonnement d'un corps noir à 6 000° K). Le spectre s'étend très largement de l'ultraviolet à l'infrarouge. On peut admettre la répartition suivante des puissances émises : 8 % dans l'ultraviolet ($L < 0,4 \mu$), 41 % dans la visible ($0,4 < h < 0,7 \mu$) et 51 % dans l'infrarouge ($h > 0,7 \mu$).

IV.2.2 - Diffusion et absorption de l'énergie solaire dans l'atmosphère



Ce n'est qu'une faible partie de l'énergie solaire qui arrive au sol après avoir traversé l'atmosphère. Cette diminution est due d'une part à l'absorption et à la diffusion d'autre part.

La "diffusion" est due aux divers constituants de l'air (diffusion moléculaire surtout pour les faibles longueurs d'ondes), aux particules en suspension dans l'air (dans toutes les gammes de longueurs d'ondes), et aux nuages.

L'importance de la diffusion dépend surtout de l'épaisseur d'atmosphère traversée et de la nébulosité. Une partie du rayonnement solaire est diffusée vers l'espace et l'autre vers le sol (radiation diffuse). L'affaiblissement est au minimum de l'ordre de 10 % et peut atteindre 60 %.

L'absorption d'énergie est assez sélective. On constate que les couches hautes de l'atmosphère riche en ozone absorbent une très grande partie des rayonnements ultraviolets. La vapeur d'eau, elle, absorbe principalement les radiations infrarouges. Enfin, les gouttelettes d'eau des nuages et les poussières, constituent un tapis très absorbant et contribuent au réchauffement de la base de l'atmosphère.

Sur l'ensemble de l'énergie solaire, on peut retenir la répartition suivante des énergies :

- 43 % sont interceptés par l'atmosphère puis diffusés vers l'espace et constituent "l'albédo" de la terre ;
- 12 % sont transformés en chaleur par la vapeur d'eau ;
- 5 % sont absorbés par l'ozone, le CO₂, les poussières et les nuages ;
- 40 % arrivent au sol et représentent la radiation globale (radiation directe + radiation diffuse).

IV.2.3 - Rayonnement terrestre

La terre émet en permanence un rayonnement propre surtout dans l'infrarouge. Celui-ci est de faible puissance (au maximum de l'ordre de 0,35 kW/m²) et se trouve en presque totalité absorbé par l'humidité de l'atmosphère. Durant le jour, la terre émet un rayonnement réfléchi qui peut varier grandement selon la nature du sol (albédo = $\frac{\text{rayonnement réfléchi}}{\text{rayonnement incident}}$) :

Sol Albédo	Neige	Sol cultivé	Mer
	0,50 à 0,90	0,07 à 0,14	0,05 à 0,40

IV.3 - CIRCULATION GENERALE DANS L'ATMOSPHERE

L'ordre de grandeur de l'énergie disponible au sol est donc la suivante :

- puissance reçue à la limite supérieure de l'atmosphère : $1,396 \cdot \pi R^2$
- puissance moyenne par une unité de surface terrestre : $0,14 \text{ kW/m}^2 \cong 0,4 \frac{1,396 \pi R^2}{4 \pi R^2}$

Cette énergie est à la base de toutes les phases du cycle hydrologique : évaporation, transport, condensation, précipitations.

Cette énergie disponible est cependant très variable en fonction du lieu (différence d'albédo de la terre, latitude => incidence des rayons solaires) et du temps (nébulosité, jour et nuit, saisons). Il en résulte des différences de pressions de température et d'humidité entre les masses d'air et par conséquent des déséquilibres entraînant le mouvement des masses d'air.

IV.3.1 - Les pressions et les vents

IV.3.1.1 - Répartition méridienne

L'étude de la répartition moyenne des précipitations a conduit à un modèle de circulation moyenne méridienne constitué de trois cellules dans chaque hémisphère séparées par des fronts comme l'indique les figures suivantes.

IV.3.1.2 - Influence de la rotation terrestre

Au schéma précédent se superpose l'effet de la rotation de la terre. En effet, tout corps en mouvement à la vitesse V subit une force F_C , appelée force de Coriolis, due à la rotation de la terre :

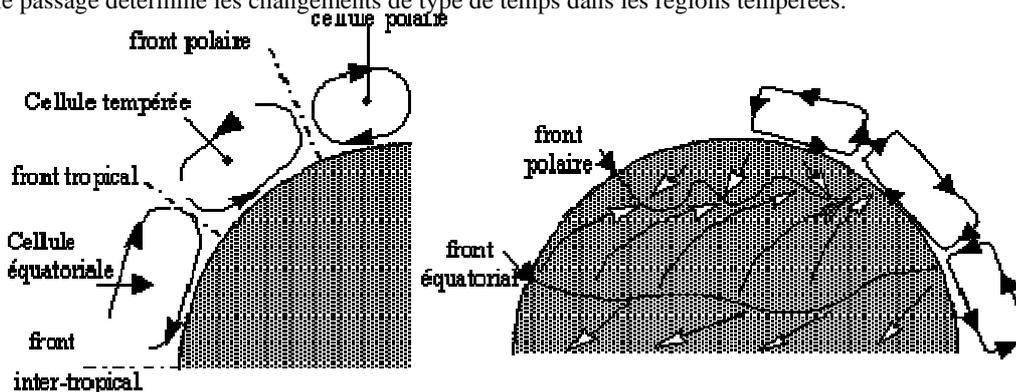
$$\vec{F}_C = -2\vec{\Omega}\vec{V}$$

$\vec{\Omega}$ est le vecteur de rotation instantané ($\vec{\Omega} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$).

Il en résulte que les vents n'ont plus une direction méridienne mais, dans l'hémisphère nord, sont détournés vers leur droite. Le schéma précédent se modifie pour aboutir à celui de la figure ci-après qui se caractérise ainsi dans l'hémisphère nord :

- une zone de basses pressions équatoriales siège d'ascendance constante et alimentée par des vents au sol, les "alizés", de secteur E-N-E ;
- une zone hautes pressions subtropicales où redescendent les masses d'air équatoriales, transportées par des vents d'altitude, les "contre-alizés", de secteur W-S-W ;
- une zone de hautes pressions polaires (entre les latitudes 60° N et le pôle) ;

• enfin, entre les latitudes 40° et 60°, une zone où l'écoulement se fait vers l'est, la zone des "Westerlies". A partir des frontières de cette zone (front polaire et front tropical), des masses d'air froid ou chaud pénètrent dans les westerlies et provoquent des perturbations qui se propagent vers l'est. Les surfaces de discontinuité entre ces masses d'air forment des fronts dont le passage détermine les changements de type de temps dans les régions tempérées.



IV.3.1.3 - Influence de la répartition des terres et des océans

A ce schéma général vient se superposer l'influence de la répartition des terres et des océans. En effet, l'inertie thermique des terres est plus faible que celle des océans. En hiver, les continents sont relativement plus froids et en été plus chauds. L'hiver, les centres de hautes pressions sont plus intenses sur les continents (continent Nord-Américain et Sibérie) ; en été au contraire, le front polaire remonte vers le nord et les centres de dépression se renforcent sur les continents.

IV.3.2 - Les masses d'air

Les schémas décrits précédemment ne sont valables qu'en moyenne. En effet, on constate des variations brutales des conditions atmosphériques (température, humidité, etc.). Pour expliquer ceci, on admet que l'atmosphère est hétérogène : il y a juxtaposition de très grandes masses d'air de caractéristiques différentes de l'une à l'autre, mais sensiblement constantes à l'intérieur de cette masse. Les masses d'air ont des aires d'extension très vastes de l'ordre de plusieurs centaines de milliers de km².

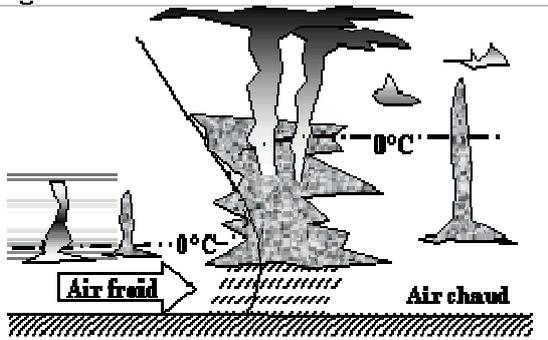
Pour différencier les masses d'air, plusieurs caractéristiques peuvent être utilisées (température, humidité, évolution de ces éléments, etc.). La plus intéressante de ces caractéristiques est la température pseudo-adiabatique du thermomètre mouillé t'_w . Cette température reste la même pour une particule qui se déplace adiabatiquement. S'il y a, à l'intérieur de la masse d'air, des échanges de chaleur, t'_w ne sera plus constant et on constatera des gradients t'_w , t'_w décroissant dans le sens de propagation de la chaleur. Par ailleurs, on constate des différences très nettes de t'_w entre les différentes masses d'air. La température pseudo-adiabatique du thermomètre mouillé permet donc non seulement de différencier les masses d'air, mais également de préciser leur évolution :

- t'_w augmente avec l'altitude. Ce cas se rencontre lorsqu'une masse d'air se trouve au contact du sol plus froid et à la fin de la nuit ; la masse d'air se refroidit par la base. Supposons le refroidissement suffisamment long ; les tranches d'air au voisinage du sol se refroidissent et atteignent le point de rosée ; il y a alors formation de brouillards et éventuellement de brume. La température augmentant avec l'altitude, l'air est stable, ce qui explique la persistance de ce type de temps jusque tard dans la journée. Les échanges de chaleur se font essentiellement par rayonnements ; ces masses d'air sont dites du type radiatif ;
- t'_w diminue avec l'altitude. Les échanges de chaleur se font alors dans le sens terre-atmosphère. Si ce réchauffement est amorcé par rayonnement, très vite les gradients de température seront tels que la masse d'air sera instable. Il y aura alors création de courant de convection. Les échanges de chaleur seront ainsi accélérés. Ces masses d'air sont dites du type convectif. Cette évolution entraîne la formation de nuages du type cumulus qui peuvent donner lieu à des averses intenses de pluies, voire de grêle.

En dehors de ces types des masses d'air définies par les échanges de chaleurs, on distingue les masses suivant leur humidité (continentale ou océanique) et leur température (polaire ou tropicale). Elles sont issues de zones géographiques appelées région sources, où la masse d'air se déplace lentement au-dessus d'une vaste zone ayant des caractéristiques de température et d'humidité à peu près constantes.

IV.3.3 - Les fronts et les précipitations associées

A la limite de deux masses d'air, on constate une discontinuité de température et d'humidité. Cette limite est appelée "surface frontale" et sa trace au sol porte le nom de "front". Suivant les positions et les directions des masses d'air, on distingue différents fronts :

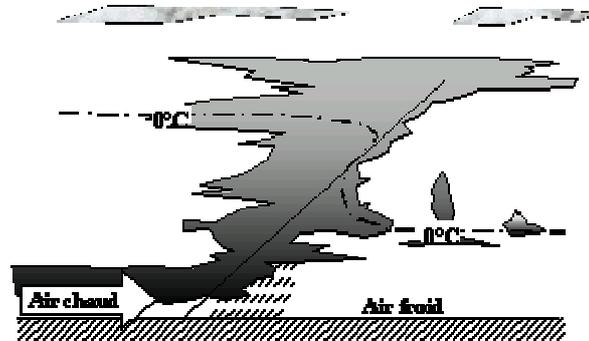


IV.3.3.1 - Les fronts froids :

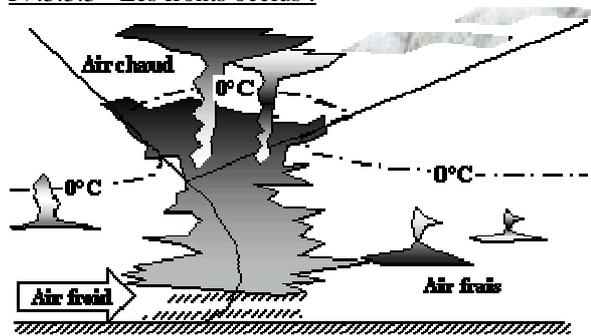
Ils correspondent, comme le montre la figure suivante, au remplacement d'une masse d'air par un air plus froid. La vitesse de déplacement de tels fronts est de l'ordre de 50 km/h en moyenne. La surface frontale est assez raide (une pente de l'ordre de 1/10). Il s'ensuit une ascendance rapide des masses d'air, ce qui provoque des pluies souvent intenses mais peu étendues.

IV.3.3.2 - Les fronts chauds :

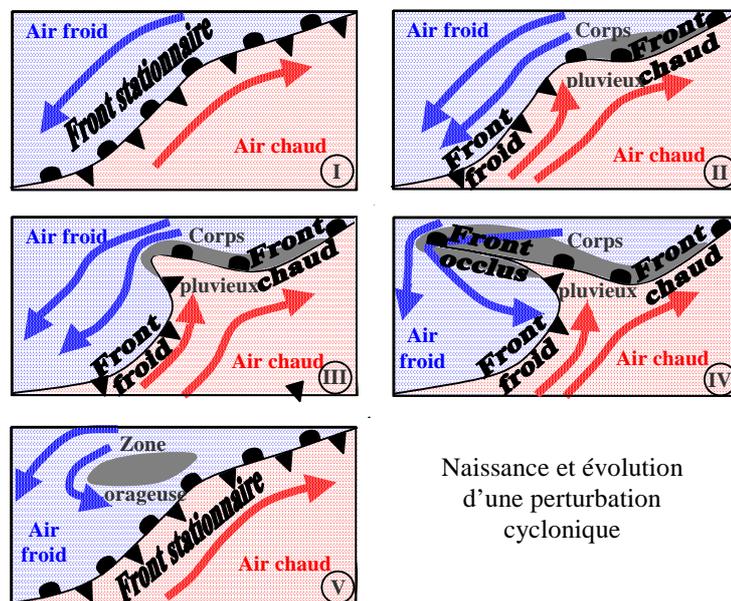
L'air chaud remplace alors l'air froid. La vitesse du front est plus lente que précédemment (de l'ordre de 20 km/h) et la pente de la surface frontale est plus faible (1/100 à 1/1000). Les ascendances sont plus lentes ; les surfaces intéressées par les précipitations sont plus vastes et les intensités plus faibles.



IV.3.3.3 - Les fronts occlus :



Les vitesses de déplacement des fronts chauds et froids étant notablement différentes, les fronts froids vont rattraper les fronts chauds. L'air chaud qui, au passage du premier front se surélevait au-dessus de la première masse d'air froid, est soulevé en arrière par l'arrivée de la seconde masse d'air froid. L'air chaud se trouve rejeté en altitude. Au sol, on note la succession du passage de deux masses d'air froid marquée par une dépression. Un tel front est dit occlus. Il peut provoquer des pluies très importantes.



Naissance et évolution d'une perturbation cyclonique

L'apparition de ces fronts alternativement chauds et froids dans la zone des *westerlies* peut s'expliquer par la déformation du front entre les masses d'air polaire et tropical. Au départ, l'air chaud se déplace vers le nord-est, l'air froid vers le sud-ouest (déviation due à la force de Coriolis). On note la présence d'un front stationnaire schématisé sur la figure ci-contre. Si, pour une raison ou une autre, le front amorce une déformation, celle-ci tend à s'amplifier (I et II). On a, à ce stade (III) une succession d'un front chaud puis d'un front froid. Au cours de cette évolution dans le temps et l'espace (vers l'est), le front froid va progressivement rattraper le front chaud et en (IV) une partie du front chaud est déjà occlus. L'occlusion va se poursuivre ; les fronts changeant d'orientation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et, en (V), nous sommes quasiment revenus à la situation initiale, un faible tourbillon persistant encore dans l'air froid avant de disparaître.

V - MESURES LIEES A L'ESTIMATION DE L'EVAPORATION ET DE L'EVAPOTRANSPIRATION

Le retour de l'eau à l'atmosphère peut se faire de différentes manières, soit directement par évaporation à partir d'une surface d'eau libre (mer, lac, cours d'eau, *etc.*), soit le plus souvent à partir d'un sol ou par l'intermédiaire des végétaux. On parle dans ce deuxième cas d'évapotranspiration. Pour l'évaporation, la quantité d'eau qui repart dans l'atmosphère dépend uniquement des paramètres physiques tels que la température de l'air, de l'eau, de la vitesse du vent, du degré hygrométrique, de l'ensoleillement, *etc.* L'évapotranspiration, elle, dépend en plus du couvert végétal et de son stade de développement ; sa mesure en est rendue d'autant plus difficile.

V.1 - MESURE DES PARAMETRES PHYSIQUES CONDITIONNANT L'EVAPORATION

Ces mesures sont généralement faites par les services météorologiques. Cependant, dans certains cas particuliers, les données ne sont pas disponibles à proximité du site envisagé ; dans ce cas, l'hydrologue peut être amené à installer des stations climatologiques plus ou moins complètes.

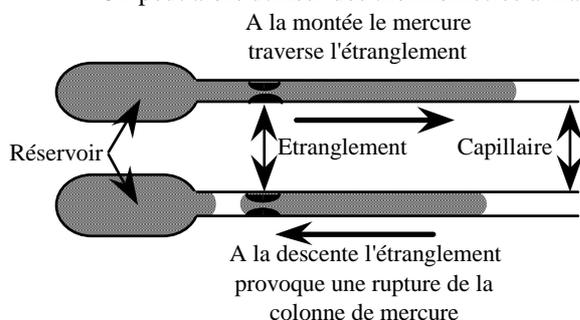
Il faut noter qu'il existe de grandes différences dans les appareils de mesures. Lorsqu'ils sont destinés à équiper des stations du type synoptique, on rencontre des appareils très précis mais nécessitant entre autres un important investissement, des sources d'énergie électrique et un personnel compétent. Au contraire, pour les stations tertiaires que l'hydrologue peut être amené à installer, il convient de mettre l'accent sur la robustesse et l'autonomie d'appareils destinés bien souvent à être "abandonnés" durant des semaines.

V.1.1 - Mesure des températures

Un thermomètre quel qu'il soit ne mesure que sa propre température. Il faut donc prendre un soin particulier pour qu'il soit en équilibre thermique avec le milieu dont on veut mesurer la température. Que ce soit pour la mesure de la température de l'air ou de l'eau, il convient donc de protéger l'appareil des rayonnements solaires directs ou indirects. L'air étant un très mauvais conducteur de la chaleur, il faut renouveler l'air au contact du thermomètre ; l'abri devra donc être aéré. Sous nos climats, la ventilation naturelle à travers des parois à persiennes est considérée comme suffisante. Par ailleurs, l'abri sera peint en blanc, brillant si possible, de façon à limiter son échauffement. Enfin, la mesure de température se fera à environ 1,5 m du sol.

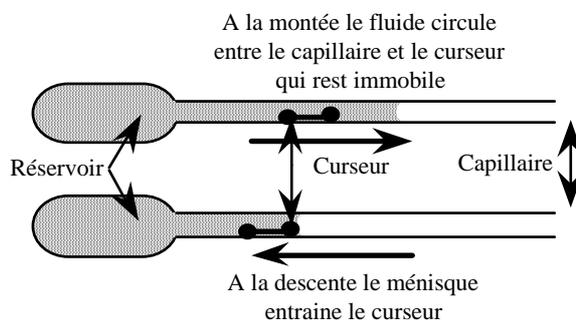
Pour les besoins de l'hydrologie, un thermomètre à mercure à 0,1° C est suffisamment précis, mais pour obtenir des températures moyennes journalières ou mensuelles, il nécessiterait des relevés trop fréquents.

On peut alors utiliser des thermomètres à maxima et minima :



Le thermomètre à maxima est un thermomètre à mercure présentant un étranglement à la sortie du réservoir. Lorsque la température augmente, le mercure le franchit aisément. Par contre lorsque la température décroît, le mercure se fractionne et maintient donc l'indication de la température maximale atteinte. Pour la bonne marche de l'appareil, il convient de l'installer dans une position voisine de l'horizontale (environ 2°). Pour réduire le fractionnement après la lecture, il suffit de "centrifuger" à la main l'appareil.

Le thermomètre à minima est généralement un thermomètre à alcool dont le capillaire contient un petit index mobile se déplaçant librement. Si la température augmente, l'alcool monte dans le capillaire en s'écoulant autour de l'index qui ne bouge pas. Par contre si la température baisse, l'alcool va s'écouler autour de l'index jusqu'à ce que le ménisque l'atteigne. Les forces de capillarité sont alors suffisantes pour que le ménisque entraîne l'index dans sa descente.



On constate généralement que la température minimale est atteinte quelques temps avant le lever du soleil alors que la température maximale s'observe vers midi au soleil. Le relevé des températures maxi et mini en fin de journée permet d'évaluer, à quelques dixièmes de degrés près, la température moyenne journalière

$$\bar{\Theta}_j = \frac{\Theta_{\min} + \Theta_{\max}}{2} \pm 0.1^\circ\text{C}$$

Lorsque qu'une connaissance plus fine de l'évolution des températures est nécessaire ou si on ne dispose pas d'observateurs permanents, on utilise un thermographe. L'organe sensible est soit une lame métallique dont on amplifie la dilatation, soit deux lames en deux métaux à coefficient de dilatation aussi différents que possible (thermographe bimétallique). Les mouvements sont amplifiés mécaniquement et inscrits par une plume sur un papier enregistreur entraîné par un mouvement d'horlogerie. Le plus souvent, les enregistrements sont hebdomadaires.

Dans les stations météorologiques, on utilise très fréquemment des sondes thermométriques à résistance de platine. Dans la plage de mesures, la résistance du fil de platine varie linéairement avec la température.

Pour la mesure des températures de l'eau en vue de l'estimation de l'évaporation, on utilise un simple thermomètre à mercure, immergé de quelques millimètres, mais protégé des rayonnements solaires.

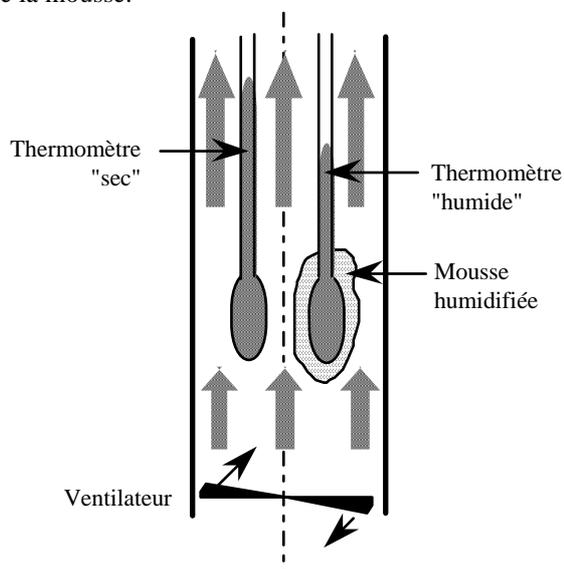
Depuis quelques années se développent des sondes thermoélectriques de terrains. Un affichage digital (au 1/10ème de °C) permet des lectures aisées.

V.1.2 - Mesure de l'humidité de l'air

La mesure directe de l'humidité de l'air est difficile ; aussi utilise-t-on le plus souvent des mesures indirectes :

V.1.2.1 - Psychromètre

Le psychromètre se compose de deux thermomètres à mercure, l'un normal dit "sec" et l'autre dit "humide" dont le réservoir est entouré d'une mousse humidifiée par de l'eau. Le thermomètre sec indique alors la température de l'air ambiant (t) alors que le thermomètre humide enregistre une température plus faible (t') due à l'évaporation de l'eau de la mousse.



L'évaporation est d'autant plus intense et cette température plus faible que l'air est plus sec. Les tables psychrométriques permettent, connaissant Θ sec, Θ humide et la pression atmosphérique, d'évaluer le degré de saturation de l'air. A défaut on utilisera la relation suivante :

$$e_t = e_{st} - 0,00079 \cdot P \cdot (t-t')$$

(e_t et e_{st} sont respectivement la tension de vapeur réelle à la température t et la tension de vapeur saturante à la température t', P est la pression).

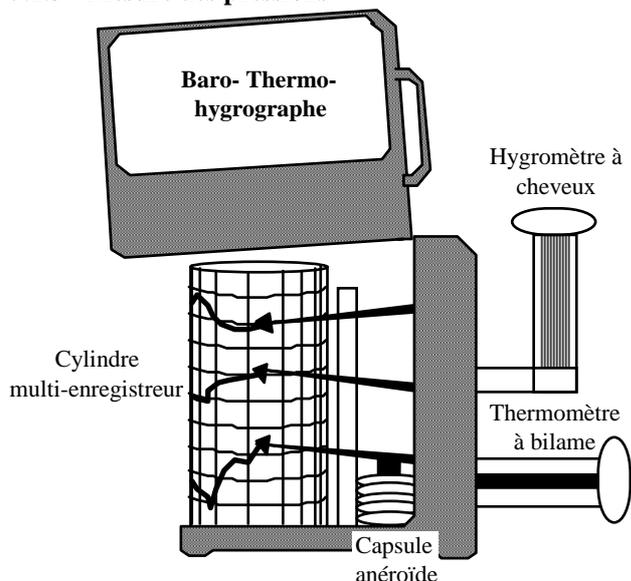
Evidemment, pour que la mesure soit représentative, il faut éviter que la vapeur émise par la mousse humide ne stagne autour du thermomètre ce qui perturberait la mesure. On utilise donc de préférence des psychromètres à ventilation forcée où l'air est introduit dans l'appareil par une petite turbine actionnée par un moteur à ressort. L'avantage de ce type d'appareil est de permettre des mesures tout à fait reproductibles et indépendantes de l'aération de l'abri ou du tour de main de l'observateur.

V.1.2.2 - Hygromètre enregistreur

Les psychromètres se prêtent mal à un enregistrement en continu du degré de saturation de l'air. On a recours alors à des hygromètres organiques utilisant la propriété de certains corps de s'allonger lorsque l'humidité relative croît. Le plus souvent, c'est une mèche de cheveux qui sert de "capteur" ; leur dilatation relative est amplifiée et rendue linéaire en fonction de l'humidité relative. Les mouvements sont transmis à une plume qui enregistre les variations sur un diagramme entraîné par un mouvement d'horlogerie. Là encore, on utilise le plus souvent des diagrammes hebdomadaires.

Malheureusement, ces appareils sont sujets à de fréquents détarages dus entre autres au vieillissement du capteur ou à un phénomène d'hystérésis après une période sèche. Il convient donc de réétalonner fréquemment ces enregistreurs après avoir eu soin de les réhumidifier. Le réétalonnage pourra être fait grâce à un psychromètre lors du relevé hebdomadaire du diagramme.

V.1.3 - Mesure des pressions



La mesure des pressions peut être intéressante dans quelques cas particuliers (surveillance piézométrique de nappes par exemple), mais elle est nécessaire pour l'interprétation d'autres mesures.

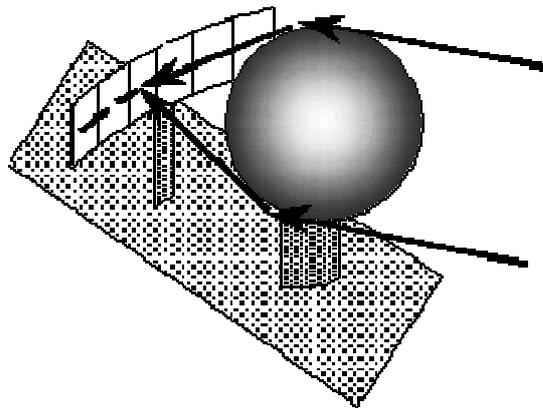
Les appareils le plus souvent utilisés sont des barographes métalliques à capsules anéroïdes. Certains types d'appareils comme celui présenté plus loin, permettent l'enregistrement en "parallèle" de la température, de l'hygrométrie et de la pression.

V.1.4 - Mesure du rayonnement solaire

Les mesures sont relativement rares. Les appareils diffèrent selon qu'ils mesurent le rayonnement direct (Phyrhéliomètre) ou le rayonnement global (Pyranomètre). Pour les besoins de l'hydrologue, seuls ces dernières mesures sont intéressantes. Encore doit-on s'assurer que la mesure s'effectue sur la totalité du spectre.

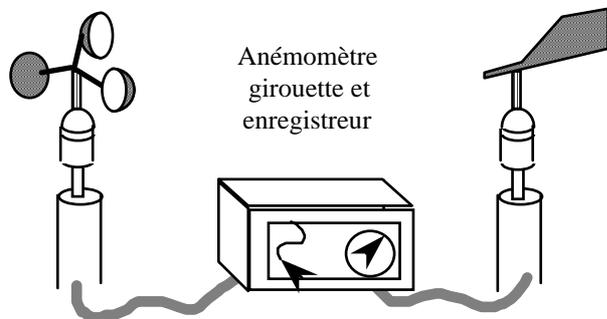
Les pyranomètres les plus utilisés en Europe et en Afrique sont des appareils à thermopiles Moll. Les thermopiles se composent d'un montage en série de couples thermo-électriques. Ceux-ci comportent deux soudures engendrant entre elles une force électromotrice fonction de leur différence de température. Cette force électromotrice est dirigée sur un galvanomètre enregistreur.

Une mesure indirecte mais beaucoup plus simple du rayonnement solaire est celle de la durée d'insolation. L'appareil le plus utilisé est l'héliographe de Campbell-Stockes. Il se compose d'une sphère de cristal qui, jouant le rôle d'une loupe, focalise les rayons du soleil. A la distance focale de la sphère, on dispose à l'opposé du soleil une feuille de papier sensible. Lorsque le soleil brille, le papier se consume et la brûlure progresse avec le mouvement apparent du soleil. Chaque soir, on relève le papier qui, convenablement gradué, permet de mesurer la durée quotidienne d'insolation.



V.1.5 - Mesure du vent

La mesure du vent est faite dans les stations météorologiques par des anémomètres enregistreurs des vitesses instantanées, doublés d'une girouette donnant la direction du vent. Pour l'hydrologue et sauf cas particulier, on peut se contenter d'anémomètres totalisateurs.



En général, ils comportent quatre coupelles hémisphériques de 44 mm de diamètre. Le mouvement de rotation provoqué par le vent quelle que soit sa direction, est transmis par un axe et un système d'engrenage à un compteur indiquant directement le nombre de kilomètres parcourus par le vent. Il suffit de relever ce compteur à l'intervalle de temps souhaité (de l'ordre de une à deux fois par jour) pour pouvoir calculer la vitesse moyenne du vent. La vitesse du vent variant d'une façon sensible au voisinage du sol, on dispose généralement les anémomètres à 10 m au-dessus d'un sol plat et à une distance de tout obstacle égale au moins à dix fois la hauteur de cet obstacle.

La vitesse du vent variant d'une façon sensible au voisinage du sol, on dispose généralement les anémomètres à 10 m au-dessus d'un sol plat et à une distance de tout obstacle égale au moins à dix fois la hauteur de cet obstacle.

V.2 - MESURES DE L'EVAPORATION

Les mesures de "l'évaporation" peuvent se faire de différentes façons selon les buts poursuivis : estimation de l'évaporation à partir d'un réservoir, estimation de l'évaporation potentielle.

Parfois on souhaite même évaluer l'ensemble de l'évaporation et de la transpiration par le système sol-végétaux, c'est à dire directement l'évapotranspiration réelle.

V.2.1 - Mesures de l'évaporation à partir d'une surface libre

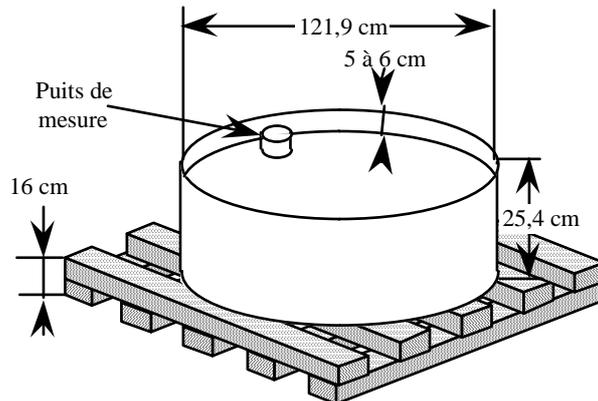
Différents types d'appareils ont été conçus mais avec leurs défauts et leurs qualités. Les plus utilisés sont :

V.2.1.1 - Bac classe A (du Weather Bureau, U.S.A.)

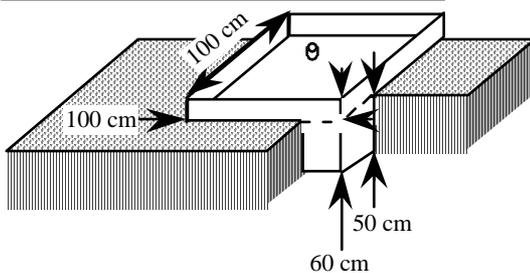
Ce bac est constitué d'un cylindre métallique de 121,9 cm de diamètre et de 25,4 cm de hauteur. Dans ce cylindre, on maintient une épaisseur d'eau de 17,5 à 20 cm.

Le cylindre est supporté par un caillebotis à 15 cm du sol. Le caillebotis doit permettre une bonne aération sous le bac.

Ce bac universellement répandu ne satisfait que très partiellement l'hydrologue car, du fait de sa disposition par rapport au sol, il est très sensible aux variations de température, son inertie thermique étant faible.



V.2.1.2 - Bac Colorado et Bac ORSTOM



Le bac Colorado et le bac ORSTOM qui en dérive, sont des bacs de section carrée de 92,5 cm de côté (1 m pour le bac ORSTOM), d'une hauteur de 60 cm et enterré de 50 cm.

L'eau est maintenue à 10 cm environ du rebord, soit sensiblement au niveau du sol. Cet appareil étant enterré et avec une plus grande épaisseur d'eau, il possède une plus grande inertie thermique et se rapproche plus des conditions naturelles.

V.2.1.3 - Bac CGI 30

De conception analogue au bac Colorado, ce bac, d'origine soviétique, est celui recommandé par l'O.M.M. C'est un cylindre de 61,8 cm de diamètre ($3\ 000\text{ cm}^3$) à fond conique. De 60 cm de profondeur, il est enterré de façon à ce que sa collerette dépasse de 7,5 cm du sol, le niveau d'eau étant maintenu nu au niveau du sol.

V.2.1.4 - Utilisation des bacs et des résultats des mesures

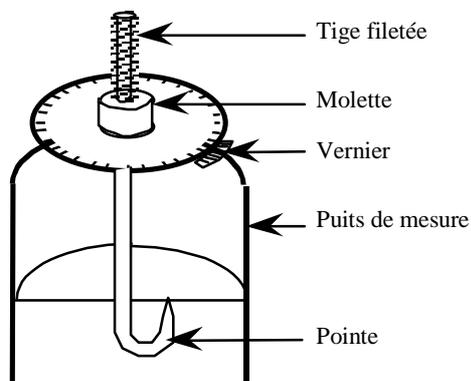
Ces bacs doivent toujours être installés dans un site représentatif du milieu hydrologique ambiant. Sous nos climats, on évitera de mettre les bacs au milieu d'une zone recouverte de sable ou de gravillons (augmentation de la température) mais plutôt au milieu d'une zone enherbée. Par ailleurs, les bacs devront être entourés d'un grillage pour éviter que des animaux viennent y boire.

Chaque bac doit être associé à un pluviomètre pour pouvoir corriger l'évaporation apparente des précipitations. Cependant, le pluviomètre doit avoir le même coefficient de captation que les bacs. On utilisera donc des pluviomètres de mêmes dimensions que les bacs et disposés au sol.

Evidemment, lorsque les averses sont importantes (quelques dizaines de millimètres), il est illusoire de mesurer avec une bonne précision une évaporation de quelques millimètres au maximum.

Pour mesurer l'évaporation apparente, on peut utiliser une pointe immergée fixe ; on mesure alors le volume d'eau à ajouter ou retrancher pour rétablir le niveau du bac.

Cette méthode étant plus pénible pour obtenir une bonne précision, il est préférable d'utiliser une pointe recourbée montée sur une tige filetée ; une molette graduée permet de déplacer la pointe.



La lecture des déplacements de la pointe sur un vernier permet aisément une précision du 1/10ème de mm. Les mesures sont faites généralement deux fois par jour, à 6 h et 18 h par exemple.

Lorsque l'on veut passer de l'évaporation mesurée sur un bac à celle d'un réservoir de grandes dimensions, il convient de tenir compte de la différence d'échelle. En général, on admet que l'évaporation sur le réservoir sera celle mesurée sur un bac placé dans les mêmes conditions climatiques, multipliée par un coefficient dit "coefficient de bac".

Les ordres de grandeur de ces coefficients sont :

- pour un bac de classe A de 0,6 à 0,8
- pour un bac ORSTOM de 0,6 à 0,9

Dans le cas où une estimation précise est nécessaire, il est possible de mesurer directement l'évaporation à partir d'un bac flottant de quelques dizaines de mètres-carrés. Le coefficient du bac est alors de 1, mais il faut prendre un soin particulier pour éviter les entrées d'eau intempestives.

En l'absence de mesures directes, on pourra évaluer l'évaporation mensuelle à partir de réservoirs de grandes dimensions, par des formules telles celles :

• de Meyer : $E(\text{pouces/mois}) = 11 \cdot (e_{st}^- - \bar{e}) \cdot \left(1 + \frac{V(\text{miles/h à 25 pieds})}{10}\right)$

e_{st}^- et \bar{e} désignent la tension de vapeur saturante à la température moyenne de l'air et la tension moyenne réelle de vapeur (en pouces de Hg)

• du Service Hydrologique d'U.R.S.S. : $E(\text{mm/mois}) = 0,15 \cdot (e_{st}^- - \bar{e}) \cdot (1 + 0,072 V(\text{m/s à 2 mètres}))$

e_{st}^- et \bar{e} désignent la tension de vapeur saturante à la température moyenne de l'eau en surface et la tension moyenne réelle de vapeur à 2 m. au dessus de la surface (en millibars)

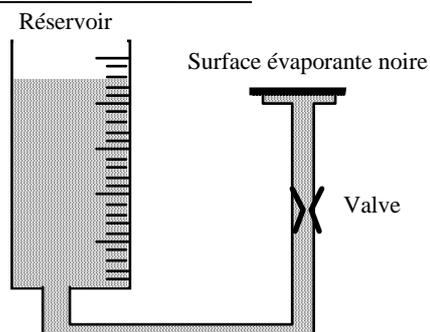
• de Lugeon : $E(\text{mois/mois de } n \text{ jours}) = 0,398 \cdot n \cdot (e_{st}^- - \bar{e}) \cdot \frac{273 + \bar{t}_{\max}}{273} \cdot \frac{760}{Pa - e_{st}^-}$

e_{st}^- et \bar{e} désignent la tension de vapeur saturante à la température moyenne de l'air et la tension moyenne réelle de vapeur (en pouces de Hg), Pa la pression barométrique moyenne.

V.2.2 - Mesure de l'évaporation à partir de surfaces poreuses : les atmomètres

Ces appareils sont destinés à mesurer une grande caractéristique du pouvoir évaporant de l'air ambiant. Ces appareils devraient donc avoir les qualités suivantes : faible inertie thermique, surface évaporante, plane, horizontale et à comportement de corps noir, faible perturbation du champ des vitesses du vent, ne pas modifier l'humidité relative de l'air ambiant au voisinage de l'appareil.

V.2.2.1 - Le "Black Bellani"

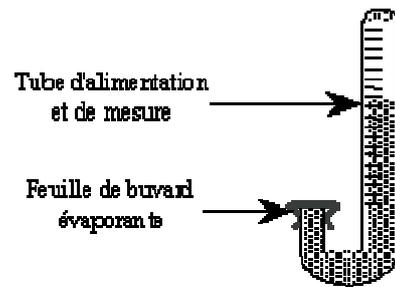


C'est un des appareils qui correspond le mieux aux qualités que l'on exige d'un atmomètre. L'évaporation se fait à partir d'une surface poreuse de porcelaine noire de 7,5 cm de diamètre. Cette coupelle est alimentée en eau à partir d'un réservoir qui sert également à mesurer la quantité d'eau évaporée. Les faibles dimensions de l'appareil permettent d'obtenir une faible inertie thermique, et l'évaporation réduite ne perturbe pas l'hygrométrie ambiante. Enfin, la couleur noire de la surface évaporante permet de capter les radiations sur la quasi-totalité du spectre. Cet appareil est installé sans protection à 2 m du sol, dans une zone représentative.

V.2.2.2 - Le "Piche"

Parmi un grand nombre d'autres atmomètres, nous signalerons l'atmomètre de Piche, bien qu'il ne réponde qu'imparfaitement aux qualités exigibles d'un appareil de mesure. Il est utilisé très fréquemment par les agronomes. Son emploi se justifie par la simplicité et le faible coût de l'appareil.

La surface évaporante est constituée par un film de papier buvard blanc, fixé à l'extrémité du tube en verre en forme de U. Ce tube sert à la fois à l'alimentation et à la mesure de l'évaporation. La feuille de buvard est changée chaque jour après lecture de l'appareil.



Le Piche est disposé à l'intérieur de l'abri météorologique ; aussi la mesure dépend-elle beaucoup des conditions d'aération.

V.3 - MESURES ET ESTIMATION DE L'EVAPOTRANSPIRATION

V.3.1 - Notion d'évapotranspiration réelle et potentielle

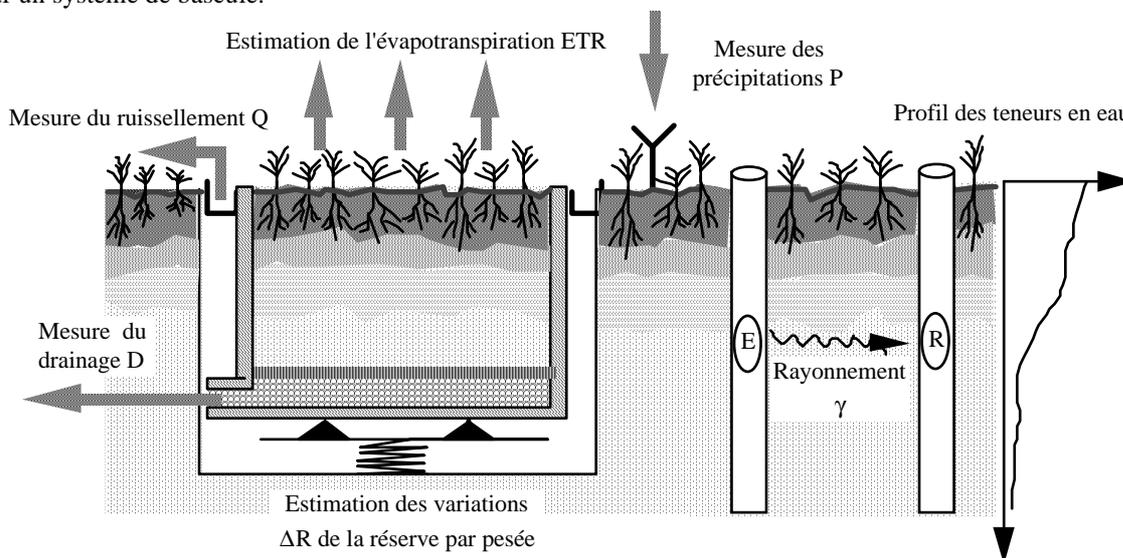
On appelle évapotranspiration réelle (notée par la suite Etr), la quantité d'eau, généralement exprimée en millimètres, évaporée ou transpirée par le sol, les végétaux et les surfaces libres d'un bassin versant.

L'évapotranspiration potentielle (notée par la suite Etp) est la quantité d'eau qui serait évaporée ou transpirée à partir d'un bassin versant si l'eau disponible pour l'évapotranspiration n'était pas un facteur limitant.

V.3.2 - Mesures directes

Les mesures directes d'Etp ou d'Etr se font surtout en agronomie où on étudie chaque type particulier de cultures. Les résultats de ces mesures sont difficiles à utiliser en hydrologie car il y a une très importante différence d'échelle entre la surface de la parcelle d'essai (quelques mètres carrés) et celle d'un bassin versant (des dizaines de kilomètres carrés). Par ailleurs, les plantations utilisées ne sont généralement pas représentatives de la végétation d'un bassin versant.

La mesure d'Etr peut être faite sur une case lysimétrique. On isole un bloc du sol de quelques mètres-carrés de surface sur environ 2 m d'épaisseur. Cet échantillon de terrain est drainé à sa base et on enregistre les débits D sortant par les drains. En surface, un collecteur fait le tour de la parcelle et récupère les eaux de ruissellement dont le débit Q est également enregistré. Les apports d'eau par la pluie P sont mesurés avec un pluviomètre. Enfin, on évalue le stock d'eau R contenu dans la case, soit par une mesure à la sonde à neutron des teneurs en eau dans le sol, soit en montant la case sur un système de bascule.



Un bilan très simple permet d'évaluer l'Etr sur un intervalle de temps Δt puisque l'on doit avoir la relation suivante :

$$P = [Q + D + Etr] + \Delta R$$

entrée = [sorties] + variation de la réserve

Le même système que la case lysimétrique, mais on parle alors "d'évapotranspiromètre", permet de mesurer l'Etp. Il suffit alors de maintenir un niveau d'eau dans les drains pour que l'eau disponible ne soit plus un facteur limitant de l'Etr. On mesure Etp en écrivant le même bilan que précédemment mais le terme D pouvant être positif ou négatif.

V.3.3 - Estimation de l'évapotranspiration

Plusieurs formules permettent d'évaluer l'Etp à partir de différentes mesures climatologiques. La plus complète et la plus complexe est certainement la formule de Penman basée sur la notion de bilan énergétique. Cependant, le nombre de paramètres utilisés par cette formule (différentes températures, hygrométrie, rayonnement global, albédo, etc.) font que son emploi est rarement possible compte tenu des mesures disponibles.

V.3.3.1 - Formule de Turc

La formule de Turc, qui dérive en la simplifiant de la formule de Penman, ne nécessite que la connaissance des températures de l'air et de la radiation globale ou de la durée d'insolation. Cette formule est la suivante :

$$Etp = 0,4 \cdot \frac{t}{t + 15} \cdot (I_g + 50) \cdot K$$

Etp évapotranspiration potentielle mensuelle (en mm d'eau) ;

t température moyenne mensuelle de l'air (en °C) ;

Ig radiation globale moyenne mensuelle reçue au sol (en cal/cm²/jour) ;

K un coefficient égal à 1 si l'humidité relative hr est supérieure à 50 % (généralement le cas sous nos climats) ;

$$\text{sinon } K = 1 + \frac{50 - hr}{70}$$

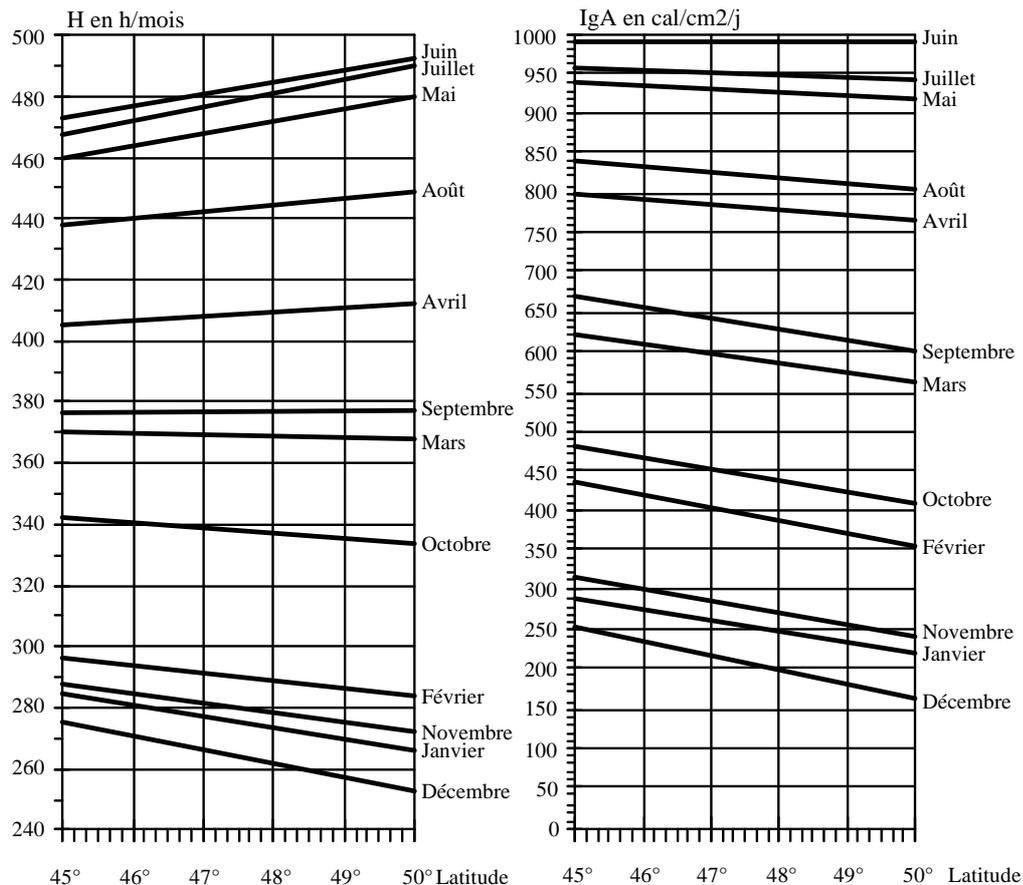
Si la radiation globale Ig n'est pas mesurée, on pourra l'évaluer à partir de la durée d'insolation h par la formule

$$I_g = I_gA \left[0,18 + 0,62 \frac{h}{H} \right]$$

avec : I_{gA} radiation globale théorique (en cal/cm²/jour) ;

H durée théorique des jours du mois.

Les abaques et formules suivants permettent d'évaluer I_{gA} et H en fonction de la latitude et du mois dans les mêmes unités (cosinus d'angles en °) et en numérotant les mois de 1 (janvier) à 12 (décembre).



$$H = 362,7 + 0,201 \text{ lat} + (4,085 \text{ lat} - 80,99) \cos(30,01 \text{ i} - 188,9)$$

$$I_gA = 1\,035 - 9,078 \text{ lat} + (7,050 \text{ lat} + 49,90) \cos(29,92 \text{ i} - 182,5)$$

Cette formule d'emploi aisé, bénéficie d'un préjugé assez favorable quant à la précision des estimations obtenues à l'échelle mensuelle. Parfois, on utilise même cette formule à l'échelle décadaire en y adjoignant, si besoin, un terme tenant compte des effets de la végétation.

V.3.3.2 - Formule de Thornthwaite

THORNTHWAITE a proposé également une formule basée essentiellement sur les températures de l'air :

$$E_{tp} = 16 \cdot \left(10 \frac{t}{I}\right)^a \cdot K$$

avec :

$$i = \left(\frac{t}{5}\right)^{1,5} \text{ et } I = \sum_{1}^{12} i$$

$$a = \frac{1,6}{100} I + 0,5$$

t est la température moyenne mensuelle du mois considéré ;

E_{tp} est l'évapotranspiration potentielle du mois considéré (en mm d'eau) ;

K est un coefficient d'ajustement mensuel.

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
K	0,73	0,78	1,02	1,15	1,32	1,33	1,33	1,24	1,05	0,91	0,75	0,70

V.3.3.3 - Estimation de l'E.T.P. par la méthode de Penman

Penman propose d'évaluer l'ETP à partir d'un bilan énergétique simple :

$$R_n = A + S + E * L$$

R_n représente la radiation nette reçue au sol ;

A représente le flux de chaleur au bénéfice de l'atmosphère ;

S le flux de chaleur résultant des échanges thermiques avec le sol ;

E le flux évaporé

et L la chaleur latente.

La formule développée prend la forme suivante :

$$ETP = \left\{ \frac{I_g a}{59} (1-a) \left(0,18 + 0,62 \frac{h}{H}\right) - \frac{\sigma}{59} T^4 (0,56 - 0,08 \sqrt{e}) \left(0,10 + 0,90 \frac{h}{H}\right) \right\} \frac{\frac{F'_T}{\gamma}}{1 + \frac{F'_T}{\gamma}} + \frac{0,26}{1 + \frac{F'_T}{\gamma}} (e_w - e) (1 + 0,54 V)$$

ETP évapotranspiration potentielle en mm/j ;

I_g radiation solaire directe en l'absence d'atmosphère exprimée en cal/cm²/j ;

a albédo de la surface évaporante, prise ici pour de la végétation à 0,2 ;

h durée réelle d'insolation en heures et dixièmes du jour considéré ;

H durée maximale possible d'insolation en heures et dixièmes pour ce jour ;

σ constante de STEFAN-BOLTZMAN soit 1,18 10⁻⁷ cal/cm²/jour/°K

T température moyenne journalière de l'air sous abri exprimée en degrés Kelvin (T = t + 273 si l'on mesure la température t en ° Celsius) ;

e tension moyenne journalière de la vapeur d'eau mesurée sous abri et exprimée en millibars ;

F'_T pente de la courbe de tension de vapeur saturante pour la température de l'air T ;

γ constante psychrométrique ;

e_w tension maximale possible de la vapeur d'eau, exprimée en millibars, pour la température T ;

V Vitesse moyenne journalière du vent mesuré à 2 mètres au dessus de la surface évaporante et exprimée en m/s.

Ces différents paramètres intervenant dans l'évaluation de l'ETP proviennent :

- de mesures directes sur le terrain pour h, T, et V ;
- de mesures indirectes pour e, puisque e est estimée à partir de l'humidité relative H_r en %, et de la température t en ° Celsius par la relation :

$$e = 0,061 H_r 10^{\left(7,5 \frac{t}{238+t}\right)} \text{ (en millibars)}$$

- de constantes physiques bien connues s, F'_T, g et e_w :

$$F_T' = \frac{6,149}{T} \exp\left(19,511 \frac{t}{T}\right) \left(\frac{6463}{T} - 3,927\right)$$

(F_T' en millibars par ° Celsius, t en ° Celsius, T en ° Kelvin)

$$g = 0,6605 - 0,826 \cdot 10^{-4} z$$

(z altitude du lieu en mètres, g en millibar par ° Celsius, en fait on prendra $g \approx Cte \approx 0,66$)

$$e_w = 6,107 \cdot 10^{\left(\frac{7,5t}{238+t}\right)} \quad (e_w \text{ en millibars, } t \text{ en } ^\circ \text{ Celsius})$$

- de constantes physiques dépendant de la latitude L du lieu et de la déclinaison D du soleil en fonction de la date J . Les formules que nous donnons ici sont issues de R. DURAND ("Estimation du rayonnement global à partir de la durée d'insolation", Annales Agronomiques de l'INRA, 1974). Nous avons comparé les résultats de ces formules avec les tables fournies par la F.A.O. (Bulletin N° 24) et y avons constaté des écarts généralement inférieurs à 1% ou du même ordre que le nombre de décimales données (5% au maximum).

La déclinaison est donnée par :

$$D = 0,0066241 + 0,406149 \sin [0,0172029 (J - 81,95)] \\ + 0,006675 \sin [0,0344057 (J - 42,85)] \\ + 0,003009 \sin [0,0516086 (J - 21,42)] \\ + 0,000149 \sin [0,0688115 (J - 17,57)]$$

(D s'exprime en radians et J est le numéro du jour dans l'année, de 1 pour le 1er janvier à 365 (ou 366) pour le 31 Décembre)

$$H = 7,6394 \left\{ \text{Arc cos}[-\text{tg}(L) \text{tg}(D)] + \frac{0,01065}{\sqrt{\cos^2(L) - \sin^2(D)}} \right\}$$

(H est en heures, et L représente la latitude en radians)

$$Iga = 914,54 * \left\{ \sin(L) \sin(D) \text{Arc cos}[-\text{tg}(L) \text{tg}(D)] + \sqrt{\cos^2(L) - \sin^2(D)} \right\} (Iga \\ * \{1 + 0,033 \cos(0,0172 J)\})$$

s'exprime en calories par cm^2 et par jour)

- d'une constante physique à évaluer sommairement en fonction de l'état de surface (les mesures sur le terrain sont extrêmement rares) :
 - nappes d'eau $a \approx 0,05$ à $0,07$
 - cultures vertes $a \approx 0,2$
 - herbes et savane $a \approx 0,22$
 - forêt $a \approx 0,11$
 - roches $a \approx 0,16$
 - sables clairs $a \approx 0,26$
 - ...

V.3.3.4 - Autres formules

D'autres formules pour évaluer l'Etp sont utilisables. Citons par exemple les formules de Bouchet, de Blaney et Criddle, de Papdakis dont on trouvera les expressions dans des ouvrages de climatologie et d'agronomie.

Nous avons déjà cité celle de Penmann mais plusieurs autres versions plus ou moins simplifiées ou compliquées en ont été proposées.

Basée sur une autre approche, on peut citer la formule de Bouchet qui exprime Etp en fonction de l'évaporation enregistrée au Piche et la formule de Prescott basée sur l'évaporation d'une surface d'eau libre.

Dans l'ensemble, l'utilisation de ces formules est peu fréquente chez les hydrologues français.

V.3.4 - Evaluation de l'évapotranspiration réelle

V.3.4.1 - Formule de Turc

TURC a proposé une formule permettant d'évaluer directement l'Etr annuelle moyenne d'un bassin à partir de la hauteur annuelle de pluie et de la température moyenne annuelle :

$$Etr = \frac{P}{\sqrt{0,9 + \frac{P^2}{L^2}}} \quad \text{avec } L = 200 + 25 t + 0,05 t^3$$

Etr représente l'évapotranspiration réelle (en mm/an) ;

P la hauteur annuelle de pluie (en mm) ;

t la température annuelle (en °C).

Cette formule est d'un emploi aisé mais elle ne donne malheureusement que l'ordre de grandeur de l'Etr. En effet, cette formule permet l'estimation du "déficit d'écoulement" qui ne se rapproche de l'évapotranspiration réelle que pour des bassins versant relativement étendus, sans échanges à la frontière et pour des durées d'observation assez longues pour que l'on puisse négliger les variations de réserves souterraines

Dans la mesure du possible, on préférera la méthode suivante.

V.3.4.2 - Bilan simplifié selon THORNTHWAITE

Cette méthode est basée sur la notion de réserve en eau facilement utilisable (notée par la suite RFU).

On admet que le sol est capable de stocker une certaine quantité d'eau (la RFU) ; cette eau peut être reprise pour l'évaporation par l'intermédiaire des plantes.

La quantité d'eau stockée dans la RFU est bornée par 0 (la RFU vide) et RFU max (capacité maximale de la RFU qui est de l'ordre de 0 à 200 mm suivant les sols et sous-sols considérés, avec une moyenne de l'ordre de 100 mm).

On admet que la satisfaction de l'Etp a priorité sur l'écoulement, c'est-à-dire qu'avant qu'il n'y ait d'écoulement, il faut avoir satisfait le pouvoir évaporant (Etp = Etr). Par ailleurs, la complétion de la RFU est également prioritaire sur l'écoulement.

On établit ainsi un bilan à l'échelle mensuelle, à partir de la pluie du mois P, de l'Etp et de la RFU.

Si P > Etp, alors :

- Etr = Etp
- il reste un excédent (P - Etp) qui est affecté en premier lieu à la RFU, et, si la RFU est complète, à l'écoulement Q

Si P < Etp :

- on évapore toute la pluie et on prend à la RFU (jusqu'à la vider) l'eau nécessaire pour satisfaire l'Etr soit :
 - Etr = P + min (RFU, Etp-P)
 - RFU = 0 ou RFU + p - Etp
- si RFU = 0, la quantité (Da = Etp - Etr) représente le déficit agricole, c'est-à-dire sensiblement la quantité d'eau qu'il faudrait apporter aux plantes pour qu'elles ne souffrent pas de la sécheresse.

Mois	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pluie du mois	67	55	41	49	54	77	60	67	65	55	61	62
Etp	3	8	33	61	90	103	109	94	67	35	14	5
RFU	100	100	100	88	52	26	0	0	0	20	67	100
Etr	3	8	33	61	90	103	86	67	65	35	14	5
D.A.	0	0	0	0	0	0	23	27	2	0	0	0
Écoulement	64	47	8	0	0	0	0	0	0	0	0	23
							<-	RFU vide	->			

Pour établir ce bilan, il faut se donner la RFU maximale en fonction de la nature du bassin versant (dans cet exemple RFU max = 100 mm). Par ailleurs, il faut connaître l'état de la RFU à la fin du mois antérieur au début de l'établissement du bilan. On tient alors l'un des deux raisonnements suivants :

- si la RFU doit être pleine un jour, ce sera à la fin de la période durant laquelle on a pu la remplir, c'est-à-dire à la fin du dernier mois où P > Etp ;
- si la RFU doit être vide un jour, ce sera à la fin de la période durant laquelle on a pu la vider, c'est-à-dire à la fin du dernier mois où P < Etp.

Ayant établi ce bilan par mois, on évalue l'Etr annuelle par la somme de 12 Etr mensuelles.

Cette méthode peut être également utilisée avec l'estimation d'Etp par la formule de Turc et donne des résultats satisfaisants sous nos climats.

V.3.4.3 - Bilan tenant compte du stress hydrique de la végétation

La procédure précédente suppose que l'évapotranspiration réelle est égale à l'évapotranspiration potentielle, jusqu'à ce que la R.F.U. soit vide. Cependant avant que la R.F.U. soit vide, la végétation subit un stress hydrique et diminue son évapotranspiration. Il en résulte que si la part de la R.F.U. encore en eau diminue, la végétation n'évaporera pas toute l'E.T.P, mais une part réduite.

Nous supposons qu'entre deux instants t₁ et t₂ distants de Δt il est tombé une quantité de pluie P que l'on pourra supposer d'intensité constante : i

$$i = \frac{P}{t_2 - t_1}$$

De même pendant cet intervalle de temps, on supposera que l'évapotranspiration potentielle E_p se produit à intensité constante : e_p

$$e_p = \frac{E_p}{t_2 - t_1}$$

Pour passer de l'intensité de l'évapotranspiration potentielle e_p à l'intensité de l'évapotranspiration réelle e_r , on supposera que cette dernière est proportionnelle à e_p et au rapport de l'état de la R.F.U. $r(t)$, à sa capacité maximale R . L'évapotranspiration réelle $e_r(t)$ est alors variable dans le temps :

$$e_r(t) = e_p \frac{r(t)}{R}$$

Sur un petit intervalle de temps dt , le bilan en eau de la réserve s'écrit :

$$d\{r(t)\} = i dt - e(t) dt$$

Cette relation étant valable tant que $r(t) \leq R$

On obtient ainsi l'équation différentielle suivante :

$$d\{r(t)\} = \left(i - \frac{e_p}{R} r(t) \right) dt$$

En posant $\alpha = e_p/R$ on obtient :

$$\frac{d\{r(t)\}}{r(t) - i/\alpha} = -\alpha dt$$

cette équation s'intègre aisément entre les instants t_1 et t :

$$\left[\text{Ln} \{ r(t) - i/\alpha \} \right]_{t_1}^t = \left[-\alpha t \right]_{t_1}^t$$

$$\text{Ln} \left(\frac{r(t) - i/\alpha}{r(t_1) - i/\alpha} \right) = -\alpha (t - t_1)$$

$$r(t) = i/\alpha + \{r(t_1) - i/\alpha\} e^{-\alpha(t-t_1)}$$

a) cas où $r(t_2)$ reste inférieur à R

$$r(t_2) = i/\alpha + \{r(t_1) - i/\alpha\} e^{-\alpha(t_2-t_1)}$$

$$r(t_2) = \frac{P}{E_p} R + \left\{ r(t_1) - \frac{P}{E_p} R \right\} e^{-\frac{E_p}{R} (t_2-t_1)}$$

Pour calculer l'évapotranspiration réelle E_r entre les instants t_1 et t_2 , il suffit d'intégrer l'équation de $e_r(t)$:

$$E_r = \int_{t_1}^{t_2} e_r(t) dt$$

$$E_r = \int_{t_1}^{t_2} \frac{e_p}{R} r(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \alpha r(t) dt$$

En remplaçant $r(t)$ par son expression calculée plus haut on obtient :

$$E_r = \int_{t_1}^{t_2} [i + \{\alpha r(t_1) - i\} e^{-\alpha(t-t_1)}] dt$$

$$E_r = \left[i t \right]_{t_1}^{t_2} - \{r(t_1) - i/\alpha\} \left[e^{-\alpha(t-t_1)} \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$E_r = i(t_2 - t_1) - \{r(t_1) - i/\alpha\} \{e^{-\alpha(t_2-t_1)} - 1\}$$

$$E_r = P - \left\{ r(t_1) - \frac{P}{E_p} R \right\} \left\{ e^{-\frac{E_p}{R} (t_2-t_1)} - 1 \right\}$$

b) cas où $r(t_2)$ deviendrait supérieur R

On calcule alors le temps t' auquel $r(t)$ atteint R :

$$r(t') = i/\alpha + \{r(t_1) - i/\alpha\} e^{-\alpha(t'-t_1)} = R$$

$$e^{-\alpha(t'-t_1)} = \frac{R - i/\alpha}{r(t_1) - i/\alpha}$$

$$t' = t_1 + 1/\alpha \operatorname{Ln} \left\{ \frac{r(t_1) - i/\alpha}{R - i/\alpha} \right\}$$

On calcule alors aisément E_r :

$$E_r = \int_{t_1}^{t'} e(t) dt + \int_{t'}^{t_2} e_p dt$$

$$E_r = i(t' - t_1) - \{r(t_1) - i/\alpha\} \{e^{-\alpha(t' - t_1)} - 1\} + e_p(t_2 - t')$$

$$E_r = i/\alpha \operatorname{Ln} \left\{ \frac{r(t_1) - i/\alpha}{R - i/\alpha} \right\} - \{r(t_1) - i/\alpha\} \{e^{-\operatorname{Ln} \left\{ \frac{r(t_1) - i/\alpha}{R - i/\alpha} \right\}} - 1\} + e_p(t_2 - t_1 - 1/\alpha \operatorname{Ln} \left\{ \frac{r(t_1) - i/\alpha}{R - i/\alpha} \right\})$$

$$E_r = i/\alpha \operatorname{Ln} \left\{ \frac{r(t_1) - i/\alpha}{R - i/\alpha} \right\} - \{r(t_1) - i/\alpha\} \left\{ \frac{R - i/\alpha}{r(t_1) - i/\alpha} - 1 \right\} + e_p(t_2 - t_1) - e_p/\alpha \operatorname{Ln} \left\{ \frac{r(t_1) - i/\alpha}{R - i/\alpha} \right\}$$

$$E_r = (i/\alpha - e_p/\alpha) \operatorname{Ln} \left\{ \frac{r(t_1) - i/\alpha}{R - i/\alpha} \right\} + e_p(t_2 - t_1) - \{R - r(t_1)\}$$

$$E_r = \left(\frac{P R}{E_p} - R \right) \operatorname{Ln} \left\{ \frac{r(t_1) - \frac{P R}{E_p}}{R - \frac{P R}{E_p}} \right\} + E_p - \{R - r(t_1)\}$$

c) *Mise en oeuvre pratique :*

Entre les instants t_1 et t_2 distant de Δt , il est tombé une hauteur de pluie P , pendant cet intervalle de temps Δt , l'évapotranspiration potentielle est de E_p et à l'instant t_1 , la réserve contenait $r(t_1)$.

On calcule tout d'abord :

$$r(t_2) = \frac{P}{E_p} R + \left\{ r(t_1) - \frac{P}{E_p} R \right\} e^{-\frac{E_p}{R}}$$

Si le résultat est inférieur ou égal à R on aura :

$$E_r = P - \left\{ r(t_1) - \frac{P}{E_p} R \right\} \left\{ e^{-\frac{E_p}{R}} - 1 \right\} \quad \text{et} \quad r(t_2) = \frac{P}{E_p} R + \left\{ r(t_1) - \frac{P}{E_p} R \right\} e^{-\frac{E_p}{R}}$$

Si le résultat est supérieur à R on aura :

$$E_r = \left(\frac{P R}{E_p} - R \right) \operatorname{Ln} \left\{ \frac{r(t_1) - \frac{P R}{E_p}}{R - \frac{P R}{E_p}} \right\} + E_p - \{R - r(t_1)\} \quad \text{et} \quad r(t_2) = R$$

VI - MESURES DES PRECIPITATIONS

Sous le terme de précipitations, on regroupe toutes les eaux météoriques qui arrivent au sol sous quelque forme que ce soit. Comme l'a si bien dit notre Maître Pierre DAC : "Quand il est déjà tombé de la pluie, de la neige, de la grêle, de la rosée, du crachin, que voulez-vous qu'il tombe encore ? oui je sais, mais c'est pas fréquent !"

VI.1 - DIFFICULTES DE LA MESURE

Les mesures de précipitations intéressent des secteurs d'activités assez divers mais principalement la météorologie, l'agriculture, l'hydrologie, *etc.* Des réseaux de mesures ont généralement été installés de longue date. En France, le développement de ces réseaux a débuté vers le milieu du XIX^{ème} siècle ; malheureusement, le nombre de stations de mesures a subi des variations très importantes. De nos jours, il est encore fréquent d'avoir à installer de nouvelles stations pluvio-métriques pour les besoins d'une étude.

L'idée est de mesurer la quantité d'eau tombée au sol durant un certain intervalle de temps ; or, ceci n'est pas aussi facile qu'il y paraît :

- la taille de l'échantillon est ridiculement faible puisqu'avec une surface réceptrice ne dépassant pas 2 000 cm², on espère dans le meilleur des cas, représenter la pluie sur quelques kilomètres-carrés ; on échantillonne donc quelques dix millièmes de la surface ;
- les précipitations sont par ailleurs très sensibles au vent, ce qui explique que l'introduction de l'appareil occasionne une perturbation de la circulation et ainsi, une modification des précipitations ;
- enfin, signalons que pour la neige, on peut souvent se contenter de mesurer son équivalent en eau, mais dans ce cas, encore faut-il que les flocons aient bien voulu se poser dans la surface réceptrice.

On retiendra que la signification d'une mesure pluviométrique n'est que relative. Si on a le soin d'uniformiser les appareils et les conditions d'implantation, les hauteurs de pluie enregistrées seront comparables entre elles et liées par une relation stable mais inconnue à la hauteur de pluie réellement tombée au sol.

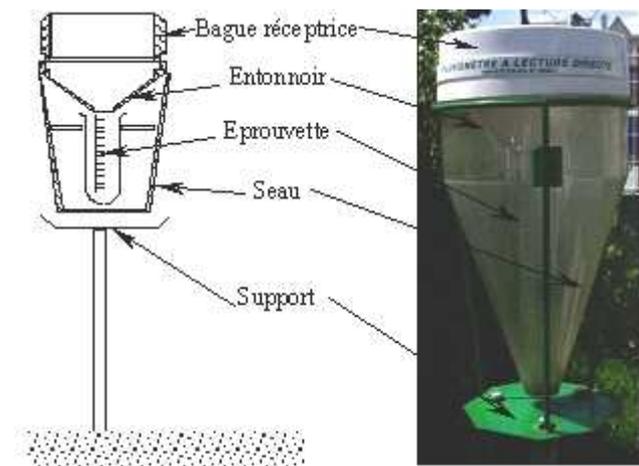
Cet handicap est acceptable dans la plupart des cas puisque les hauteurs de pluie mesurées seront mises en relation avec les écoulements par des modèles statistiques ou par des modèles déterministes mais calés sur différentes observations (par exemple, trouver un coefficient de ruissellement supérieur à 100 % est alors acceptable et signifie pratiquement que la hauteur de pluie réelle est sous-estimée).

VI.2 - APPAREILLAGES PLUVIOMETRIQUES

VI.2.1 - Les pluviomètres

Le pluviomètre est un appareil très simple qui comporte une surface réceptrice limitée par une collerette cylindrique ; l'eau traversant cette surface est dirigée par un entonnoir vers un seau récepteur. Si durant un certain intervalle de temps Δt , on a récupéré un volume V à travers la surface réceptrice S , la hauteur de pluie $H_{\Delta t}$ tombée est

$$H_{\Delta t} = V/S$$



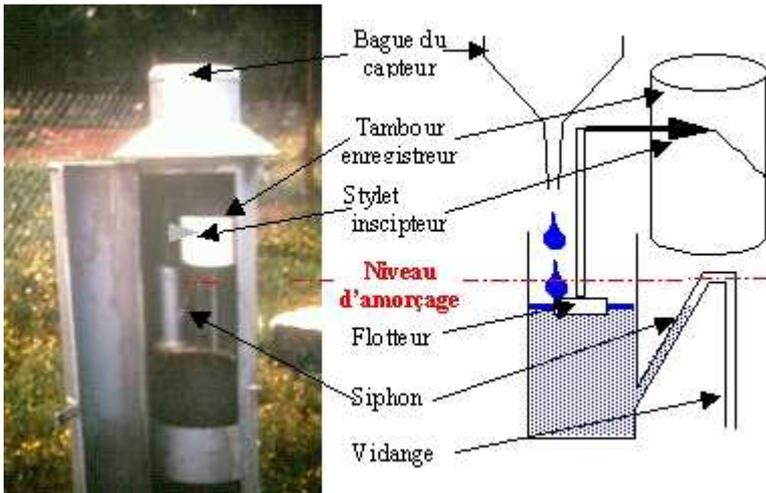
Dans la pratique, on adjoint à chaque pluviomètre une éprouvette graduée (fonction de la surface réceptrice S) qui permet la lecture directe de $H_{\Delta t}$ en 1/10^{ème} mm.

L'appareil le plus répandu en France était le pluviomètre "Association" de 400 cm² de surface et disposé sur un pied à 1,5 m du sol. L'O.M.M. préconise de faire les mesures à 1 m du sol et on voit se développer des appareils de 400 cm² en plastique dont le seau transparent est gradué et possède une éprouvette incorporée.

Bien que les surfaces réceptrices soient identiques, les mesures divergent du fait du changement de hauteur : 1,5 -> 1 mètre et du changement de matériaux : tôle -> plastique, ce qui modifie les condensations sur les parois du récepteur. En général, les pluviomètres sont relevés par un observateur une ou deux fois par jour à 6 h et 18 h T.U.

VI.2.2 - Les pluviographes

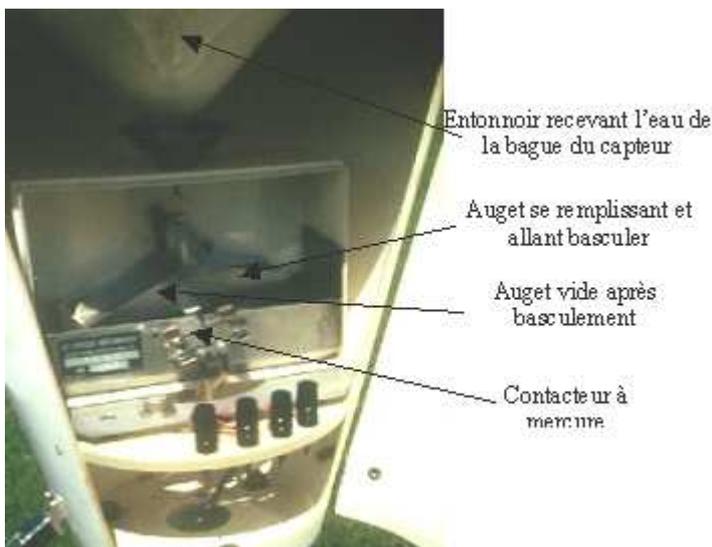
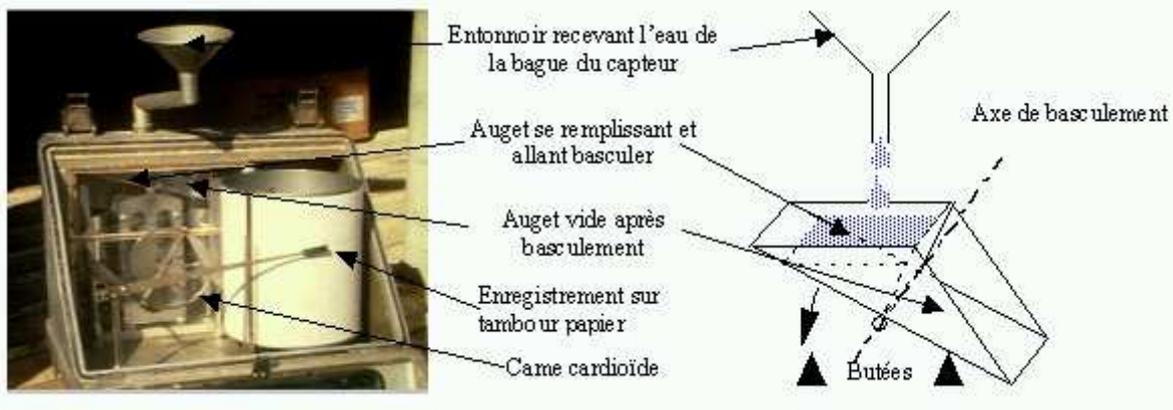
Ces appareils sont destinés à l'enregistrement de la hauteur de pluie cumulée en fonction du temps. Deux types principaux ont eu un certain développement : les pluviographes à augets basculeurs et ceux à siphons. Actuellement, ces derniers tendent à être abandonnés.



Les pluviographes à siphon ne sont plus que très rarement installés. Cependant on peut encore en rencontrer sur le terrain comme ici du matériel russe installé en Syrie.

Photo et schéma de principe d'un pluviographe à siphon

Les pluviographes à augets basculeurs ont la partie captante commune avec les pluviomètres ; ils en diffèrent par la partie réceptrice en aval de l'entonnoir. L'eau est dirigée par un court tube vers les augets de mesures. Ceux-ci sont disposés symétriquement par rapport à un axe de rotation horizontal. Dans la situation du schéma ci-contre, l'auge de gauche est en train de se remplir alors que celui de droite s'est déjà vidé.



Lors du remplissage, le centre de gravité de l'ensemble des deux augets se déplace vers la gauche jusqu'à dépasser la verticale de l'axe de rotation ; l'ensemble bascule alors vers la gauche et l'auge plein se vide alors que celui de droite est venu en position de remplissage. Les augets sont tarés de façon à ce que le basculement se produise lorsqu'ils contiennent 20 g d'eau. La partie captante ayant des surfaces de 2 000 cm², 1 000 cm² ou 400 cm², un basculement correspond à 0,1 mm, 0,2 mm ou 0,5 mm de pluie. (Les deux dernières surfaces sont celles préconisées par l'O.M.M.)

Pour comptabiliser les basculements, deux systèmes sont possibles.

VI.2.2.1 Enregistrement mécanique :

Chaque basculement provoque, par un système d'ancre, l'échappement d'une roue dentée. La rotation de cette roue entraîne mécaniquement le déplacement d'un stylet inscripteur sur un cylindre entraîné lui-même par un mouvement d'horlogerie. Un système de came cardioïde permet de modifier en limite du papier le sens du déplacement du stylet.

La vitesse d'entraînement du tambour est variable ; un système de démultiplication permet d'établir une rotation complète en un jour, une semaine, deux semaines ou un mois. En fonction de ces vitesses, l'intervalle de temps minimum sur lequel on peut effectuer une lecture varie de quelques minutes à une heure.

L'ensemble de l'appareillage est assez volumineux, ce qui nécessite de placer sous la partie réceptrice un boîtier cylindrique protégeant l'appareillage. L'importance du boîtier perturbe le vent et affecte donc la mesure de la pluie.

VI.2.2.2 Pluviographe transducteur d'impulsions :

Dans ce type d'appareil, les basculements des augets sont convertis en impulsions électriques : une ampoule contenant du mercure est fixée aux augets. A chaque mouvement, le mercure ferme un contact électrique en se déplaçant. Cette impulsion électrique est aisément transmissible à distance, soit vers un chronototalisateur qui enregistre les impulsions sur papier, soit vers un enregistreur magnétique. L'avantage de ce type d'appareil est de réduire quasiment au volume des augets, l'appareillage à installer sous la bague réceptrice ; on réussit alors à construire un coffret de protection d'encombrement analogue à celui d'un pluviomètre.

VI.2.2.3 Mesure de l'équivalent en eau des chutes de neige :

Tous les pluviographes sont aptes à mesurer l'équivalent en eau des précipitations sous forme solide qui atteignent le capteur. En effet, il suffit de leur adjoindre un système de réchauffage pour que la neige ou la grêle fonde au contact de l'entonnoir. Pour les pluviographes mécaniques, on leur adjoint généralement un chauffage au gaz propane, la bouteille, le brûleur et le thermostat prenant place dans la cabine. Pour les appareils à transducteur, la place réduite conduit à utiliser un chauffage électrique.

Notons tout de suite que néanmoins, ces appareils ne donnent qu'une estimation très grossière des chutes de neige car les flocons sont très soumis aux vents qui perturbent les appareils.

VI.2.2.4 Précision des appareils :

Les pluviographes présentent l'inconvénient de sous-estimer systématiquement les fortes intensités. Les gouttes de pluie éclaboussent vers l'extérieur des augets lorsque l'ensemble est à l'horizontale ; l'inertie de l'appareillage fait que, durant le basculement, les gouttes continuent d'arriver et font déborder l'auget. Enfin, l'appareillage perturbe le champ des vitesses du vent. Malgré des améliorations constantes, la sous-estimation varie de 4 à 10 % pour des intensités de 75 à 250 mm/h.

La prudence minimale veut que l'on adjoigne un seau qui récupère l'eau à la sortie du pluviographe. La mesure de l'eau qu'il contient permet de vérifier que l'appareil ne s'est pas détaré (basculement pour un poids différent de 20 g) ou en cas de panne totale, de connaître la hauteur totale de pluie durant la période séparant de la dernière visite.

VI.2.3 - Les nivomètres

Comme on l'a vu, les pluviographes permettent d'avoir une vague idée de l'équivalent en eau des précipitations neigeuses. Cela n'est pas suffisant, surtout en zone de montagne où il est intéressant de connaître à la fois l'importance quantitative du manteau neigeux mais aussi son état (prévision d'avalanches, prévision de crues, *etc.*).

VI.2.3.1 - Mesures par sondage

Une des premières techniques de mesure qui a été développée est d'envoyer sur le terrain un opérateur qui procède à un carottage du manteau neigeux. On pèse alors la carotte pour obtenir l'équivalent en eau. Bien évidemment, ce système est très contraignant pour le personnel qui doit opérer dans des zones d'accès difficiles et par des conditions météorologiques défavorables.

VI.2.3.2 - Mesures en continu du poids

Plusieurs techniques ont été développées ; elles sont basées essentiellement, soit sur la mesure directe du poids de la neige par un système de balance installé à la surface du sol (table à neige) ou par l'enregistrement de la pression régnant dans un coussin gonflé d'un fluide antigel et disposé à la surface du sol (coussin à neige).

Ces techniques semblent être de plus en plus abandonnées devant le développement des appareils à rayonnement radio-actif.

VI.2.3.3 - Nivomètres à rayonnement γ

Ces appareils permettent simultanément de mesurer la hauteur de neige et l'équivalent en eau des différentes couches. Le principe en est le suivant : un émetteur de rayon γ (Cesium 137) envoie un faisceau horizontal en direction d'un récepteur ; l'affaiblissement du rayonnement dépend de la quantité d'eau entre l'émetteur et le récepteur. D'un point de vue pratique, l'émetteur et le récepteur sont disposés dans des mâts creux en fibre de verre distants de 50 cm environ. A l'intérieur des mâts, l'émetteur et le récepteur peuvent se déplacer verticalement par un système de câbles, poulies et moteur d'entraînement. La mesure démarre soit par un mécanisme d'horlogerie, soit à la demande de l'opérateur. L'équipage mobile se déplace de bas en haut à une vitesse proportionnelle à l'intensité du rayonnement reçu.



Tous les 10 cm, l'appareillage envoie une impulsion électrique ; le temps séparant deux impulsions mesure donc la densité de la neige sur 10 cm d'épaisseur. Lorsque l'émetteur émerge de la neige, le rayonnement reçu devient maximum et l'équipage mobile retourne à son point de départ. Le nombre d'impulsions permet donc de connaître l'épaisseur de la neige à 10 cm près au maximum.

La transmission de la mesure se fait généralement par radio (sites peu accessibles), mais elle peut également se faire par câble.

VI.3 - STATIONS PLUVIOMETRIQUES

VI.3.1 - Le site

Le site d'implantation d'un pluviomètre comme d'un nivomètre doit répondre à certains critères :

- être représentatif du secteur en étant exposé "*normalement*" aux vents ;
- être éloigné de toute singularité trop proche. On admet en général une distance minimum de quatre fois la hauteur de l'obstacle.

Ces règles ne sont pas toujours faciles à respecter en particulier en montagne et en forêt. Par ailleurs, si les appareils autonomes peuvent être installés *a priori* à n'importe quel point, les pluviomètres imposent de les installer à proximité de la résidence de l'observateur. Le choix d'un site est donc un compromis entre des impératifs techniques, économiques et humains. Il garde donc un côté subjectif important.

VI.3.2 - Précautions d'installation

La collerette du capteur doit être rigoureusement horizontale ; on admet qu'un écart de 1° peut provoquer des erreurs de l'ordre de 1 %.

Les pluviomètres nouvellement installés auront une surface réceptrice normalisée : 400 ou 1 000 cm² (plus la section est grande, plus la pluie captée est importante).

Les pluviomètres seront installés à 1 m du sol. Si un ancien pluviomètre (situé à 1,5 m) doit être remplacé, il est prudent de le laisser fonctionner durant un an concurremment avec le nouveau calé à 1,0 m.

Après chaque installation, il convient d'établir une fiche descriptive du site avec croquis et photos, ce qui permettra dans les années à venir, de mettre en évidence les évolutions progressives du site (constructions, développement des arbres, *etc.*).

VI.4 - GESTION DU RESEAU

VI.4.1 - Fréquence des observations

Les pluviomètres ne sont guère plus installés que sur des sites où on étudie les pluies à une échelle de temps journalière. Un observateur local relèvera la pluviométrie une ou deux fois par jour et transmettra ses observations au bureau central une fois par mois.

Dans les autres cas, l'installation d'appareils enregistreurs permet d'espacer les visites. Les autonomies théoriques atteignent plusieurs mois ; cependant, il est bon de procéder à des visites au moins mensuelles, car les appareils nécessitent un petit entretien (par exemple, déboucher l'orifice d'un entonnoir que les oiseaux remplissent une fois sur deux en se posant sur la bague d'un pluviomètre). D'autre part, les pannes sont toujours possibles (ne serait-ce qu'un feutre à sec). Dans ce cas, on ne perd qu'un mois au maximum d'informations.

Notons également que la lecture immédiate d'un enregistrement permet de détecter une anomalie de fonctionnement. Les appareils procédant à un stockage sur support magnétique devront donc de préférence voir ce système doubler d'un enregistrement sur papier ou sur compteur numérique.

VI.4.2 - Publication des résultats

Chaque station pluviométrique ou pluviographique est exploitée à l'échelle journalière. En fin de mois ou plus généralement en fin d'année, on établit un annuaire pluviométrique où figurent pour chaque poste :

- les pluies journalières (de 6 h T.U. à 6 h T.U.) ;
- les totaux décennaires ;
- les totaux mensuels ;
- les totaux annuels ;
- le nombre de jours de pluies et des informations particulières sur les phénomènes exceptionnels qui ont pu se produire dans l'année.

Le dépouillement des hyétoigrammes à une échelle plus fine de temps ne font pas l'objet d'une publication systématique. Ces données sont archivées sur support informatique (facilement pour les enregistreurs sur support magnétique) ou encore à l'état brut des originaux papiers. La banalisation des tables à digitaliser rend plus facile l'archivage informatique à partir des hyétoigrammes ; cependant, la plupart des services n'ont pas pu faire ce travail pour des raisons de personnel. Les stocks d'enregistrement sur papier augmentent d'année en année et cela est inquiétant car une partie de cette information risque de se dégrader ou même de s'égarer.

En France, les principaux enregistrements pluviométriques sont disponibles sur la banque "PLUVIO" gérée par Météofrance. Les résultats sont accessibles par le réseau téléphonique à travers le logiciel Colchique.

VI.5 EVALUATION DES PRECIPITATIONS PAR LES RADARS METEOROLOGIQUES

La mesure des précipitations par radar est certainement vouée à un développement très prometteur. Certes, la précision actuelle des mesures ne permet pas de se passer d'un réseau d'observations au sol. Néanmoins, on peut penser que la mise en place du réseau ARAMIS conduira à une rationalisation du réseau climatologique ainsi qu'à une amélioration de la connaissance de la distribution spatiale des pluies.

VI.5.1 Intensité des précipitations

L'intensité d'une précipitation se définit comme le flux d'eau traversant une section horizontale unitaire. Cette intensité s'exprime en hauteur par unité de temps, généralement en mm/h. Bien entendu, cette intensité est instantanée ou quasi instantanée compte tenu des possibilités de mesure. Soit I cette intensité, elle peut s'exprimer en fonction du diamètre D des hydrométéores, de la concentration numérique $N(D)$ de goutte de diamètre $D \pm dD/2$ dans un volume unitaire, de la vitesse limite de chute $V(D)$ des hydrométéores de diamètre D et enfin en fonction de la vitesse verticale de l'air w :

$$I = \frac{\pi}{6} \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} N(D) \cdot D^3 \cdot \{V(D) - w\} dD$$

Cette formulation est bien sûr valable éventuellement pour de la neige ou de la grêle.

Dans bien des cas, w est négligeable devant $V(D)$ et d'autre part, la fonction $V(D)$ est relativement facile à obtenir, ne serait-ce qu'expérimentalement. La principale difficulté pour évaluer I avec la formule précédente est donc de connaître la répartition granulométrique des hydrométéores.

VI.5.2 Distribution statistique de la granulométrie des précipitations

Les travaux récents, montrent que la distribution statistique des diamètres est de forme exponentielle :

$$N(D) = N_0 \cdot e^{-\gamma D} \quad \text{avec } \gamma = aI^b$$

Cette relation, connue sous le nom de "loi de Marshall-Palmer" fait apparaître trois paramètres N_0 , a et b qui sont, semble-t-il, peu variables tout au moins pour la statistique des diamètres sur une longue période. MARSHALL et PALMER avaient trouvé la relation :

$$N_0 = 0,08 \quad \gamma = 41 I^{-0,21}$$

(avec N_0 en cm^{-4} ; γ en cm^{-1} ; I en mm/h !!)

D'autres auteurs donnent les valeurs $N_0 = 0,07$ et $\gamma = 38 I^{-0,14}$. Les différences sont faibles et la formulation est identique.

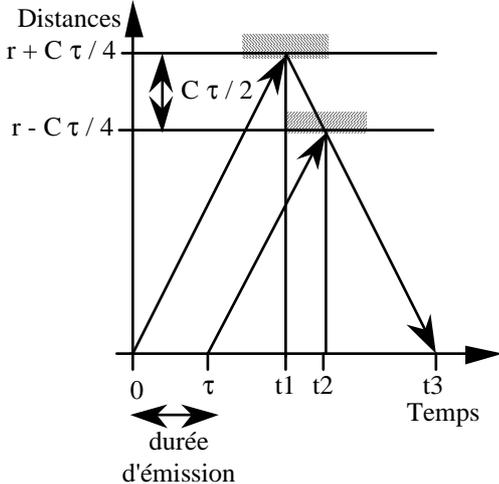
Par contre, ces paramètres deviennent très variables lorsqu'on étudie la distribution des D sur un intervalle de temps plus court, de l'ordre de quelques heures. N_0 , a et b varient également beaucoup avec la situation météorologique.

Pour la neige et la grêle, il ne semble pas que des résultats très généralisables aient encore été obtenus.

VI.5.3 La zone cible du radar

Les radars météorologiques ont pour objet de mesurer les précipitations au niveau du sol ; ils émettent donc avec des sites faibles.

L'antenne orientable va émettre dans une direction donnée et sous faible incidence, un faisceau conique de faible ouverture q (en général, q est de l'ordre de 1°). A une distance r du radar, l'ouverture latérale est donc rq : l'ouverture latérale augmente avec la distance. Durant un intervalle de temps τ très bref, le radar émet une impulsion électromagnétique qui se propage à la vitesse C .



Le début du front d'onde va atteindre la distance $r + \frac{C\tau}{4}$ au temps $t_1 = \frac{r + C\tau/4}{C}$.

Si à cette distance, il existe un réflecteur, l'onde rétrodiffusée atteindra l'antenne à $2t_1$, soit :

$$\frac{2r + C\tau/2}{C} = \frac{\tau}{2} + \frac{2r}{C}$$

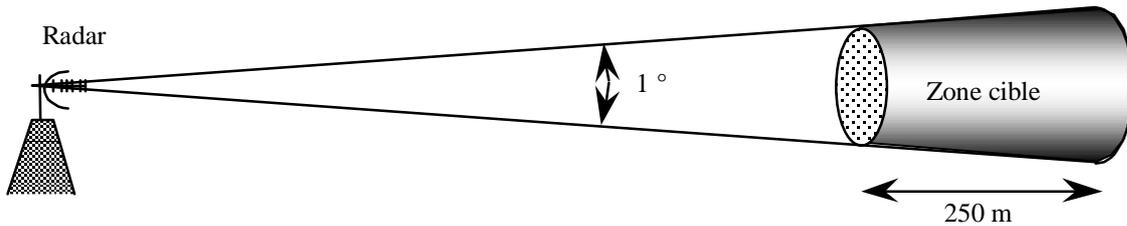
La fin de l'impulsion part de l'émetteur au temps τ ; elle

atteindra la distance $r - C\tau/4$ au temps $t_2 = \tau + \frac{r - C\tau/4}{C}$.

Si à cette distance il existe également un réflecteur, l'onde rétrodiffusée reviendra au radar au temps

$$t_3 = t_2 + \frac{r - C\tau/4}{C} = \tau + \frac{2r - C\tau/2}{C} = \frac{2r}{C} + \frac{\tau}{2}$$

Ces deux ondes arriveront en même temps, quelle que soit la distance r . On retiendra que la résolution radiale est donc $C\tau/2$ quelle que soit la distance à laquelle se fait la mesure (en général τ est de l'ordre de 1μ seconde, ce qui donne une résolution radiale de l'ordre de 150 m).



VI.5.4 Réflectivité radar et puissance reçue

Soit une cible située à une distance r du radar ; celui-ci recevra une puissance moyenne \bar{P}_r rétrodiffusée.

$$\bar{P}_r = C_1 L^2 \eta r^2$$

- C_1 représente une constante caractéristique uniquement du radar utilisé (puissance émise, longueur d'onde, gain d'antenne, etc.).

- L^2 représente la perte d'énergie, ou atténuation, pour le trajet aller-retour entre cible et radar. Elle varie avec le coefficient d'atténuation a (exprimé en décibels par unité de longueur) :

$$L = 10^{-0,2} \int_0^r a \, dr$$

Cette atténuation varie avec la longueur d'onde ; pour des radars "hydrologiques" de 10 cm de longueur d'onde, l'atténuation est pratiquement négligeable.

- η est la réflectivité radar. Elle ne dépend que des propriétés rétrodiffusantes de la cible. η est la valeur moyenne de la section efficace de rétrodiffusion par la cible à la distance r , ramenée au volume unitaire.

Comment se comportent les ondes radars à la rencontre d'une goutte de pluie ? Dans la gamme des longueurs d'onde de 3 à 10 cm, les gouttes de pluie diffusent le rayonnement dans le domaine de diffusion de Rayleigh. Dans ces conditions, la section efficace de rétrodiffusion radar σ d'une sphère homogène est donnée par la formule dite de Rayleigh :

$$\sigma = \frac{\pi^5}{\lambda^4} |K^2| D^6$$

D est bien sûr le diamètre de la sphère, λ la longueur d'onde et $|K^2|$ le facteur diélectrique du matériau constituant la sphère ($0,93$ pour l'eau).

Dans ces conditions, la réflectivité radar η d'un ensemble de gouttelettes contenues dans un volume unitaire est :

$$\eta = \sum_i \sigma_i = \frac{\pi^5}{\lambda^4} |K|^2 \sum_i D_i^6$$

Cette équation s'écrit également :

$$\eta = \frac{\pi^5}{\lambda^4} |K|^2 Z \quad \text{avec } Z = \sum_i D_i^6$$

Z est appelé "facteur de réflectivité radar" ; on peut également l'exprimer en fonction de la distribution granulométrique des précipitations :

$$Z = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} N(D) D^6 dD$$

Z s'exprime normalement en m^3 , mais compte tenu des faibles dimensions, on l'exprime usuellement en mm^6/m^3 ou encore plus souvent en dBZ :

$$Z \text{ (en dBZ)} = 10 \{ \log(Z) \} \quad (Z \text{ en } mm^6/m^3)$$

La puissance moyenne reçue par le radar a donc pour expression :

$$\overline{P}_r = C_1 L^2 \frac{\pi^5}{\lambda^4} |K|^2 Z / r^2$$

Lorsque l'atténuation est négligeable et pour un radar donné, tous les termes sont constants à l'exclusion de Z, r et \overline{P}_r :

$$\overline{P}_r = C_2 \frac{Z}{r^2}$$

VI.5.5 Etalonnage du radar

Comme on vient de le voir, la puissance reçue par le radar est proportionnelle au facteur de réflectivité Z qui varie lui-même comme D^6 . L'intensité I des précipitations varie comme le produit $D^3 V(D)$; or la vitesse de chute limite varie comme une fonction puissance de D variant de 0 à 2.

Il est donc raisonnable de penser qu'il existe une relation entre Z et I du type fonction puissance :

$$Z = a I^b$$

avec des valeurs de b de l'ordre de 1,2 à 2,2.

Effectivement, les travaux expérimentaux de MARSHALL et PALMER montrent qu'on a la relation $Z = 200 I^{1,6}$ (Z en mm^6/m^3 et I en mm/h) pour des pluies stratiformes. Plus tard, JONES donne la relation $Z = 486 R^{1,37}$ pour des pluies convectives.

Il existe donc une relation entre I et \overline{P}_r du type :
$$I = \left(\frac{r^2}{a C_2} \overline{P}_r \right)^{1/b}$$

Le radar mesure \overline{P}_r ; la distance r est évaluée par le temps séparant la réponse de l'impulsion de départ ; le terme C_2 est une constante ; restent donc deux inconnues : a et b.

VI.5.5.1 Radar utilisé seul

Dans ce cas, on utilise la formule expérimentale de Marshall-Palmer et à partir de la situation météorologique, on essaie subjectivement d'adapter "au mieux" les paramètres.

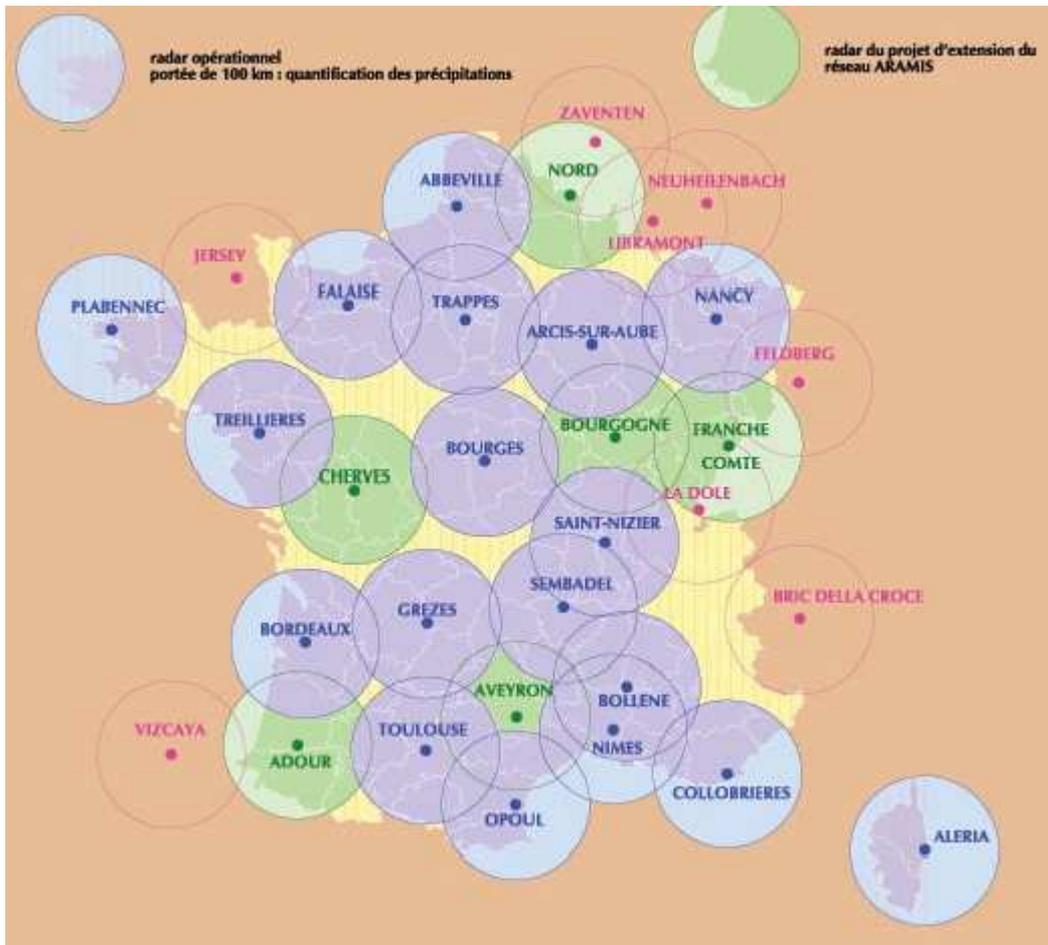
Dans ces conditions, il est vraisemblable que dans 15% des cas l'erreur ne dépasse pas un facteur de 2.

VI.5.5.2 Radar utilisé conjointement avec des pluviographes

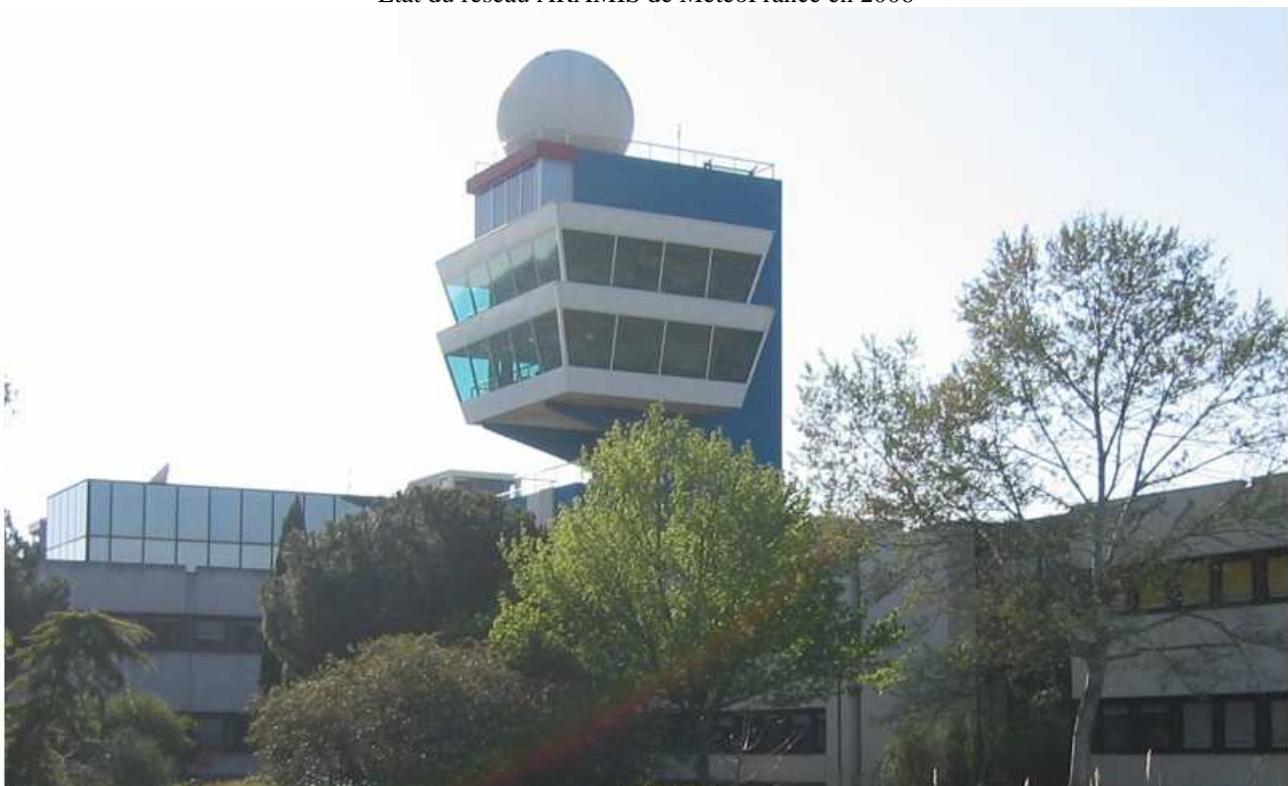
La meilleure technique d'utilisation des radars est de les coupler avec un certain nombre n de postes pluviographiques par télétransmission. Sur des pas de temps Δt réduits, on peut cumuler les termes $Z^{1/b}$ puis les comparer à la pluie réellement observée au pluviographe. On peut donc ainsi déterminer, pour chaque poste, le coefficient a le mieux adapté. (Il n'est pas possible de jouer sur b qui doit être fixé a priori pour le cumul des $Z^{1/b}$).

On peut alors, soit calculer la moyenne des n valeurs de a et l'appliquer globalement à l'ensemble de la zone couverte par le radar ; ou mieux, procéder à une cartographie du champ des a à partir des n valeurs ponctuelles.

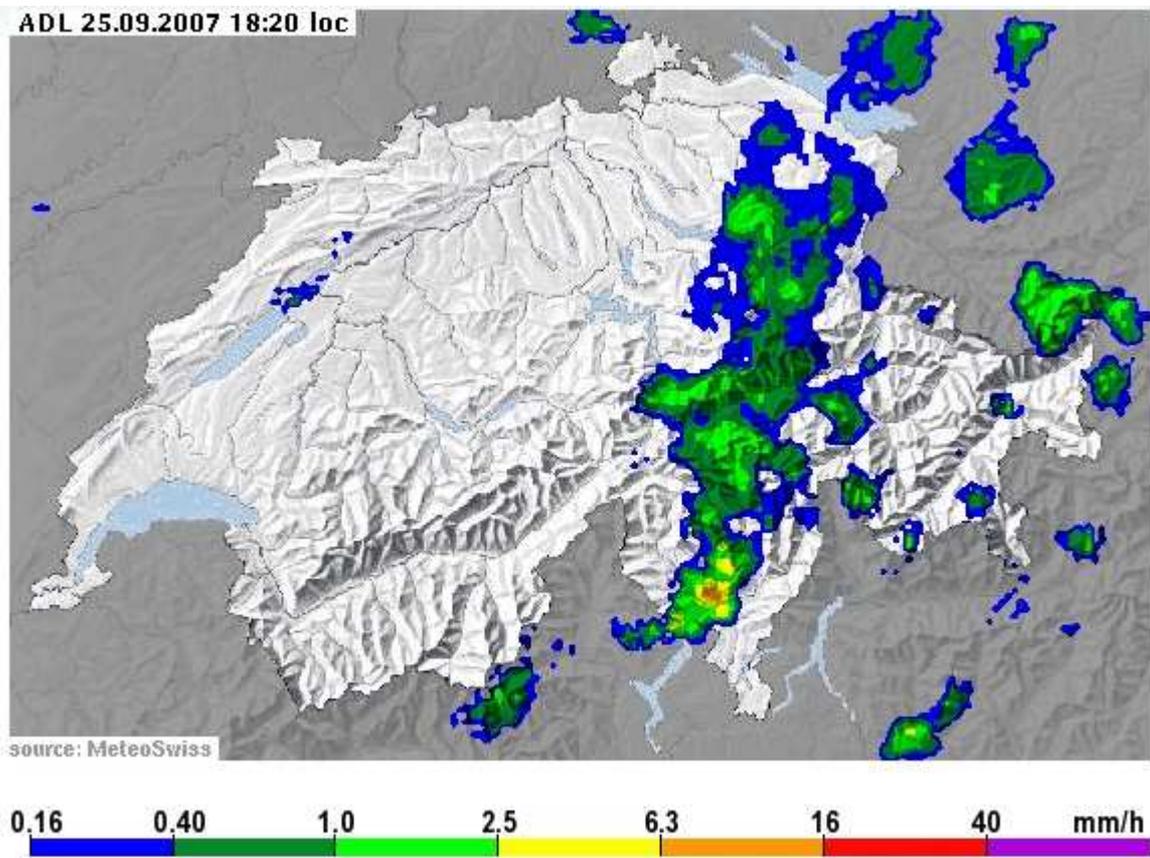
L'ordre de grandeur de la précision ainsi obtenue est de l'ordre de 20% sur l'estimation de la pluie moyenne sur 1000 km^2 en 1 heure avec un radar étalonné par un seul pluviographe.



Etat du réseau ARAMIS de MétéoFrance en 2006



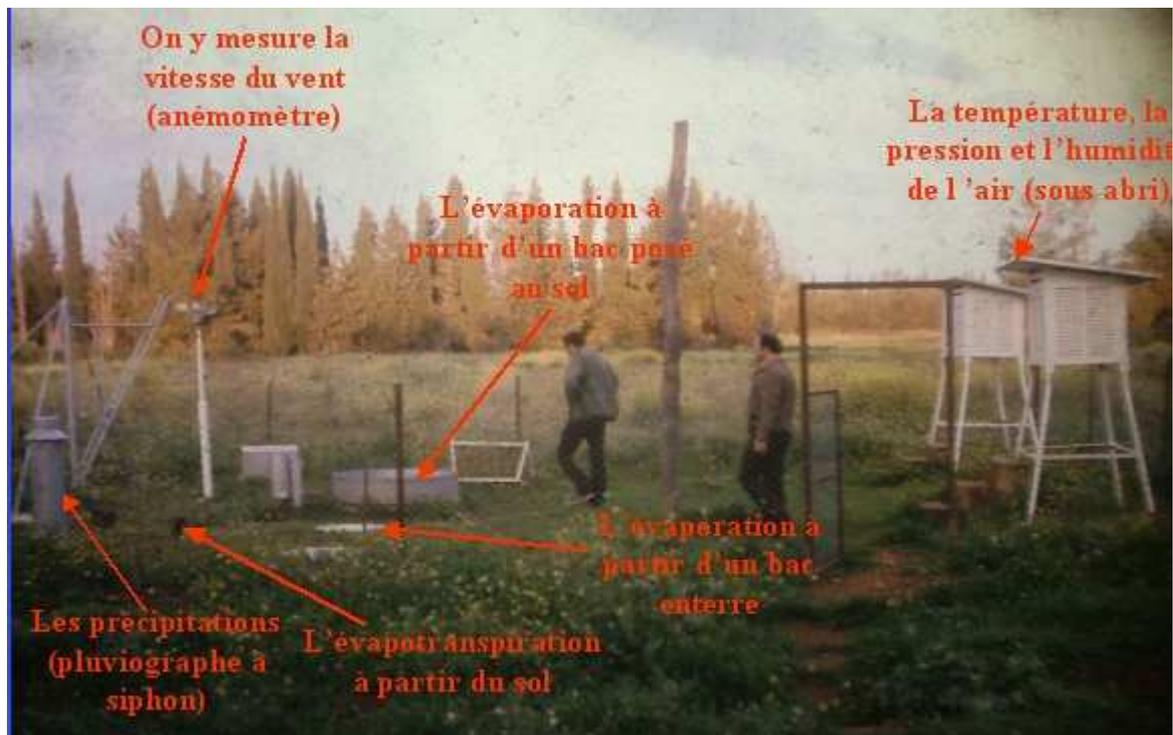
Radar Météorologique de Toulouse



Exemple d'image radar



Exemple de station climatologique en montagne (CNRS Mont Lozère)



*Exemple d'installation d'une station climatologique
ici, en milieu méditerranéen (Bureau d'étude russe, Hauran, Syrie)*

VII - HYDROMETRIE

Les débits des cours d'eau varient en fonction du temps. Certaines études nécessitent des mesures instantanées de ces débits ; on exécute alors des jaugeages aux instants choisis. Dans la plupart des cas, c'est l'évolution des débits en fonction du temps qui nous intéresse ; on installe alors des stations hydrométriques (appelées également stations de jaugeage).

VII.1 - ACQUISITION DES DEBITS EN FONCTION DU TEMPS

Actuellement, il n'existe aucune technique opérationnelle qui permette de mesurer directement le débit en fonction du temps. Cette opération se fait généralement dans la pratique de la manière suivante :

- on enregistre en un point du cours d'eau (la station hydrométrique), la hauteur d'eau H en fonction du temps. Cet enregistrement $H(t)$ est appelé "limnigramme"
- A différents instants $t = t_1, t_2, \dots, t_n$, on pratique des mesures instantanées de débits $Q_{t1}, Q_{t2}, \dots, Q_{tn}$; ces mesures correspondent à des enregistrements de hauteur synchrone $H_{t1}, H_{t2}, \dots, H_{tn}$.
- Dans certaines conditions hydrauliques, comme le passage en "section critique", il existe une relation biunivoque entre la hauteur d'eau et les débits. Dans ces conditions, les différents jaugeages (Q_{ti}, H_{ti}) permettent d'établir la relation hauteur-débit appelée courbe de tarage : $Q(H)$.
- en combinant la courbe de tarage $Q(H)$ et le limnigraphe $H(t)$, on obtient aisément l'évolution du débit en fonction du temps $Q(t)$ appelé hydrogramme.

Cette vision est tout à fait idyllique car de nombreuses difficultés apparaissent au long des différentes étapes comme nous allons le voir.

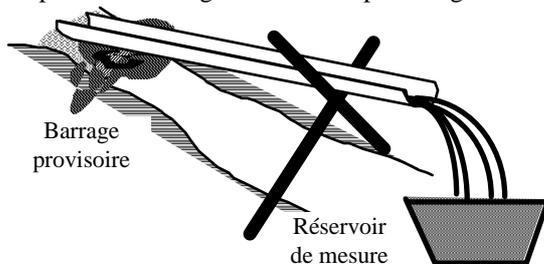
VII.2 - LES METHODES DE JAUGEAGES

Un jaugeage est donc une mesure quasiment instantanée du débit d'un cours d'eau. Les techniques utilisées sont nombreuses et généralement complémentaires ; elles s'appuient sur des principes très différents selon les cas.

VII.2.1 - Réservoirs étalonnés

Cette technique simple consiste à mesurer le temps nécessaire Δt , pour remplir un récipient de volume V . On obtient le débit Q par la relation suivante : $Q = V/\Delta t$.

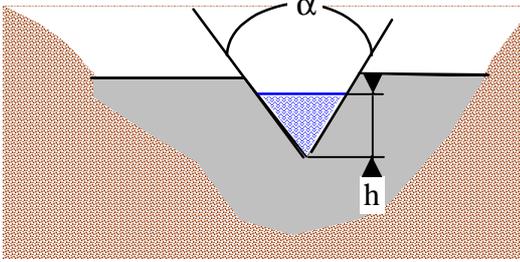
Cette méthode est surtout utilisée pour jauger des sources ou de très petits cours d'eau (débits de l'ordre de quelques litres par seconde au maximum). Le récipient peut être un seau de 10 litres ou un bac plastique de 100 litres par exemple. La seule condition est de pouvoir faire rentrer l'eau dans le récipient ce qui nécessite, soit une chute naturelle, soit de pouvoir aménager cette chute par une gouttière en plastique par exemple.



VII.2.2 – Déversoirs

Le débit d'un cours d'eau peut être mesuré en utilisant des déversoirs sur des orifices normalisés. Ces techniques, adaptées surtout aux petits débits, utilisent les résultats de l'hydraulique classique mais dans des conditions bien souvent éloignées de celles rencontrées en laboratoire !

Différents types de déversoirs sont utilisés mais on rencontre principalement des déversoirs triangulaires dont la relation hauteur-débit théorique est :



$$Q = a h^b$$

En général on utilise :

$$Q = 1,32 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot h^{2,47}$$

Dans la pratique, il est prudent de réaliser quelques jaugeages de contrôle permettant de déterminer les valeurs a et b dans les conditions réelles d'installation. Il en est de même pour les autres types de déversoirs rectangulaires avec ou sans contraction, à large seuil ou profilés.



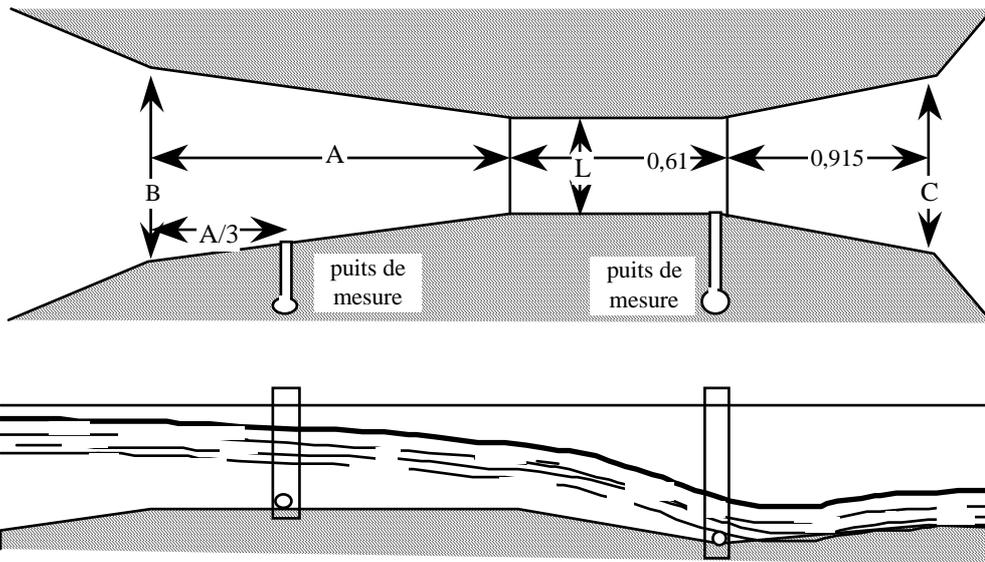
Dans la quasi-totalité des cas, on utilise des déversoirs fixés à demeure dans le cours d'eau. Cette technique n'intéresse donc que des stations où l'on est disposé à réaliser un certain investissement.

Par ailleurs, l'installation d'un déversoir ne peut se faire que si la pente est suffisante pour permettre un relèvement de la ligne d'eau amont sans conséquences néfastes ; d'autre part, le ralentissement provoqué à l'amont entraîne des sédimentations qui peuvent modifier progressivement la relation hauteur-débit.

VII.2.3 - Jaugeurs à ressaut

Ces appareils ont pour but de provoquer un passage en régime critique où la relation hauteur-débit est biunivoque et ne dépend théoriquement que des dimensions géométriques de l'appareil.

Ce passage en régime critique est provoqué soit par un rétrécissement de la veine fluide, soit par un relèvement, soit par les deux à la fois. Les avantages de ces appareils par rapport aux déversoirs sont de ne provoquer qu'un faible relèvement de la courbe de remous et de permettre un passage facile au transport solide.



Le jaugeur à ressaut le plus connu est le jaugeur "Parshall" figuré ci-dessus. Les différentes dimensions sont normalisées en fonction de sa largeur L au col.

$$\left. \begin{aligned} A &= 0,49 L + 1,194 \\ B &= 1,196 L + 0,479 \\ C &= L + 0,305 \end{aligned} \right\} \text{ABC et L en mètres}$$

Le débit Q (en m³/s) est fonction de la largeur L au col (en m) et de la hauteur d'eau H (en m) :

$$Q = 0,372 L (H * 3,28)^x \quad \text{où l'exposant x dépend de la largeur au col L :$$

L (en m)	0,2	0,6	0,8	1,0	2,0	2,6
x	1,506	1,548	1,560	1,569	1,598	1,609

Il convient cependant de se méfier de ces formules car elles peuvent légèrement varier selon les conditions locales d'installation du Parshall. La prudence élémentaire est de vérifier ces formules par quelques jaugeages.

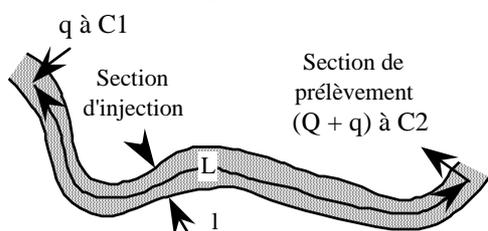
Enfin, si une remontée du niveau aval noie le ressaut, des coefficients correcteurs peuvent intervenir en fonction du niveau h.

Actuellement les jaugeurs à ressaut sont disponibles sous forme préfabriquée en résine polyester. Il suffit alors de le caler en bonne position dans le cours d'eau puis de le noyer dans du béton en s'en servant comme coffrage perdu.



Exemple de canal venturi

VII.2.4 - Jaugeages par dilution



Le principe général du jaugeage par dilution est simple. On injecte dans une section I, un traceur à une concentration C_1 ; en un point de prélèvement P situé en aval, on prélève un échantillon d'eau de la rivière et l'on détermine sa concentration C_2 en traceur. Il est alors aisé d'établir la relation entre le débit Q du cours d'eau et les concentrations C_1 et C_2 , soit par l'égalité des flux, soit par la conservation des masses entre les points P et I selon les procédés d'injection.

Ces jaugeages ont été mis en oeuvre en France sous l'impulsion de Monsieur H. ANDRE de l'E.D.F. et on pourra se référer à son ouvrage cité en référence pour toutes informations complémentaires.

VII.2.4.1 - Choix du traceur

A priori, le nombre de traceurs utilisables est élevé ; cependant, il est souhaitable qu'ils possèdent les qualités suivantes :

- facilement solubles dans l'eau,
- stables chimiquement en solution,
- non toxiques,
- facilement dosables et à faibles concentrations,
- peu coûteux,
- non adsorbable par les matières en suspension ou au contact des rives (argiles),
- non préexistants dans le cours d'eau (si possible) ou à faible concentration,
- etc.

Dans ces conditions, le choix se réduit beaucoup et dans la pratique, on utilise les produits suivants :

- chlorure de sodium (NaCl) : l'inconvénient est que souvent les quantités de sel à injecter sont importantes ; par contre, le dosage par résistivimétrie est relativement aisé ;
- La Rhodamine B ($\text{C}_{10} \text{H}_21 \text{Cl} \text{O}_3 \text{N}_2$) : son avantage essentiel est d'être dosable à de très faibles concentrations. On utilise ainsi peu de produit même pour de gros débits ; on fait donc une économie financière et surtout la mise en oeuvre sur le terrain est simplifiée. Cependant, ce colorant rouge très violent est difficile à diluer, à nettoyer des appareils et d'autre part, il se fixe sur les argiles en suspension dans l'eau ;
- le biochromate de sodium ($\text{Na}_2 \text{Cr}_2 \text{O}_7$) : c'est de loin le traceur qui a été le plus utilisé. Il satisfait à la quasi-totalité des qualités requises pour un traceur hydrologique. Cependant, il s'avère que ce sel est toxique tout au moins à forte concentration ($\gg 1$ mg/litre) et pour des durées supérieures à la journée ;
- colorants alimentaires : trois traceurs ont été retenus jusqu'à maintenant : la tartrazine (E102), le jaune orange S (E110) et le rouge cochenille (E124). Au niveau des avantages, citons la non-toxicité ; par contre, comme la rhodamine, ces substances sont difficilement solubles ;
- enfin, d'une autre nature, les traceurs radio-actifs :
 - à rayonnements γ , surtout le brome 82 ; les inconvénients sont surtout dus à la protection nécessaire (matériel lourd) et à la nécessité d'avoir une pile proche pour les irradiations (période courte de l'ordre de 36 h) ;
 - à rayonnements β essentiellement le tritium, beaucoup moins dangereux mais avec une période beaucoup plus longue (24 ans), ce qui justifie son utilisation plutôt comme traceur des eaux souterraines.

On retiendra que le bichromate est un bon traceur jusqu'à présent le plus utilisé. Il est probable que d'autres produits pourront le supplanter comme peut-être les colorants alimentaires ou des traceurs radio-actifs avec le développement des générateurs de radio-éléments ("vaches" à radio-éléments).

Le principe général n'en demeure pas moins le même. Seules les techniques de dosages seront affectées.

VII.2.4.2 - Choix du site

La mesure des débits par dilution ne peut s'effectuer que s'il y a un bon brassage de l'eau entre le point d'injection et le point de prélèvement. Il faut que la concentration C_2 mesurée au point de prélèvement représente bien la concentration moyenne dans toute la section à cet instant.

Un site favorable est un tronçon de rivière particulièrement agitée avec soit des blocs rocheux au milieu du cours d'eau, soit une succession de coudes qui assurent un brassage latéral. Dans la pratique, on a souvent tendance à privilégier le rôle de chutes ou de rapides qui n'assurent cependant qu'un brassage vertical.

La longueur du tronçon sur lequel on doit faire la mesure sera au moins égale à la "distance de bon mélange". Cette notion est un peu subjective ; la meilleure façon de procéder est encore de faire un test avec un colorant et d'évaluer à l'oeil la distance nécessaire pour que ce colorant se répartisse uniformément.

Selon la nature du courant, l'ordre de grandeur des distances de bon mélange est, selon M. ANDRE :

Largeur du cours d'eau (m)	Longueur de bon mélange (m)
0 à 10	50 à 500
10 à 50	500 à 2 500
50 à 200	2 500 à 15 000

On peut également utiliser une formule qui donne la distance de bon mélange L (en m) en fonction de la largeur b (en m) et du débit Q (en m^3/s), ou en tout cas de son estimation, sans cela..... :

$$L = k b^{1,1} Q^{0,33}$$

k est un paramètre qui varie entre 8 et 12 selon la nature du courant.

Par ailleurs, il faut éviter, dans la mesure du possible, que dans le tronçon de mesure, il y ait des zones d'eaux mortes que le traceur met très longtemps à envahir.

VII.2.4.3 - Injection à débit constant

Supposons que l'on ait déterminé le site d'injection I , la distance de bon mélange L et par conséquent le point de prélèvement P ; on injecte en I un débit constant q de traceur à la concentration C_1 . Au point P , on prélève des échantillons à la concentration C_2 .

Si on peut supposer que le régime permanent est atteint, le flux de traceur entrant dans le tronçon est égal au flux sortant :

$$q.C_1 = (Q + q).C_2$$

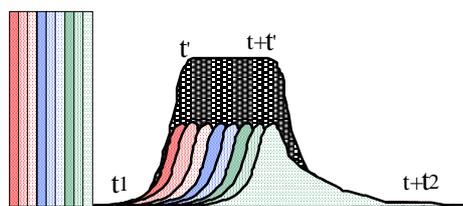
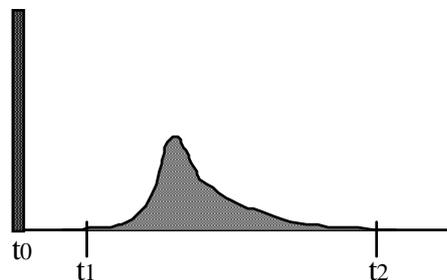
En général, q est négligeable devant Q , d'où l'on tire :

$$Q = q \frac{C_1}{C_2}$$

La seule difficulté est de réaliser le régime permanent. Pour cela, on effectue un essai avec un colorant généralement de la fluorescéine. (Pour une rivière limpide, on peut compter 100 grammes de fluorescéine pour colorer $1\ 000\ m^3$ d'eau et on dissout aisément 100 grammes de fluorescéine dans un litre d'eau. On peut se baser sur une dose de 100 g par m^3/s .)

A un instant $t = 0$, on injecte la fluorescéine au point I et on note au point P l'instant t_1 où apparaît la fluorescéine et t_2 l'instant où elle disparaît.

Cet essai peut s'interpréter comme l'injection en I d'une impulsion de traceur et l'observation P de la réponse impulsionnelle du tronçon IP . On admet aisément que la durée $t_2 - t_1$ est indépendante de la qualité de colorant injecté (dans la mesure où l'injection demeure quasi-instantanée).



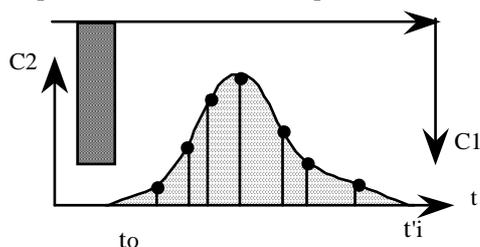
A une succession d'impulsions de durée dt correspondra une succession de réponses impulsionnelles déphasées dans le temps de dt . La réponse globale d_e sera la somme des réponses impulsionnelles comme le suggère la figure ci-contre.

Si on injecte durant une durée t suffisante, on observera une montée de la concentration en sel entre les instants t_1 et t' puis un palier en régime permanent entre les instants t' et $t + t'$ enfin une décroissance entre les instants $t + t'$ et $t + t_2$.

Dans la pratique, on désire obtenir un régime permanent durant 15 minutes où on fera un prélèvement par minute. Par ailleurs, le temps t_1 est généralement sous-estimé car en fait, t_1 représente l'instant où la fluorescéine disparaît "à la vue" ; on peut raisonnablement penser que la concentration ne s'annule réellement que pour un temps plus long $t_1' \cong t_1 + (t_1 - t_0)$, soit un temps de passage deux fois plus long. Dans ces conditions, on injectera entre les instants t_0 et $t_1' - t_0 + 15 \text{ mn}$ [soit $2(t_1 - t_0) + 15 \text{ mn}$] et on fera les 15 prélèvements entre les instants t_1' [soit $2(t_1 - t_0)$] et $t_1' + 15 \text{ mn}$ [soit $2(t_1 - t_0) + 15 \text{ mn}$]].

VII.2.4.4 - Méthode dite globale

Comme pour le cas précédent, on se positionne en deux points P et I séparés par une distance L de bon mélange. On injecte instantanément en I une certaine quantité de traceurs : un volume V à la concentration C_1 soit $V.C_1$. Au point P, on fait différents prélèvements dans le temps dont on mesure la concentration $C_2(t)$.



On peut écrire qu'il y a conservation des masses et par conséquent que, ce que l'on a injecté, passera dans la section P, donc :

$$V.C_1 = \int_0^{\infty} Q.C_2(t)dt$$

$$\text{soit } Q = \frac{V.C_1}{\int_0^{\infty} C_2(t)dt}$$

Les différents prélèvements faits en P permettent de construire point par point la courbe $C_2(t)$ et de déterminer alors l'intégrale qui permet d'évaluer Q . Il faut toutefois noter que les "queues de courbe" sont toujours mal connues, dans la mesure où l'opérateur ne dispose pas de l'éternité pour achever ses prélèvements. Il sera dans ce cas toujours judicieux de rechercher si cette "queue de courbe" ne s'ajuste pas à une fonction de type hyperbolique ou exponentielle décroissante, ce qui en facilite l'intégration algébrique.

VII.2.4.5 - Mise en oeuvre pratique

D'un point de vue pratique, il convient de prévoir les concentrations C_1 à injecter, l'injection à débit constant, les prises d'échantillons.

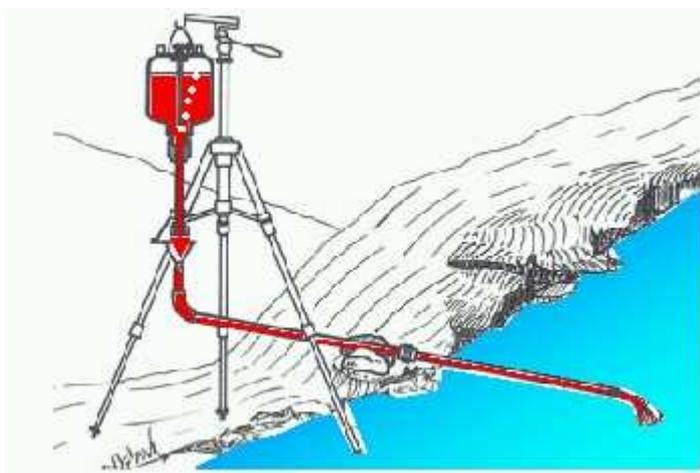
VII.2.4.5.1 Concentrations C_1 à injecter :

La quantité du traceur que l'on injectera doit être telle que la concentration finale C_2 soit au moins du double de la précision de dosage. Pour les principaux traceurs, les concentrations minimales dosables C_2 sont les suivantes :

Traceur	Chlorure	Rhodamine	Bichromate	Colorants alimentaires
$C_2 \text{ min(mg/l)}$	5	0,1	0,2	0,2
$C_1 \text{ max(mg/l)}$	200	10	600	100

Il faudra donc en passer par une évaluation du débit à mesurer de façon à ajuster au mieux la concentration et le débit d'injection.

VII.2.4.5.2 Injection :



Pour l'injection à débit constant, s'étant fixé le terme $Q C_1$ et la durée t de l'injection, on prépare la quantité de traceur à utiliser (par exemple, dans un fût de 100 ou 200 litres) Le liquide est alors mis dans un récipient fermé hermétiquement. Lorsque l'on ouvre le robinet, il se crée une dépression qui augmente jusqu'à ce que l'air s'introduise par le tube d'aération. Le débit reste alors constant jusqu'à ce que le niveau du liquide atteigne le bas du tube d'aération. Ce vase se vidange directement dans le cours d'eau ou si la largeur est importante, on installera une rampe d'arrosage.

Pour la méthode globale, l'injection est plus simple et on se contente de déverser instantanément le contenu du récipient où on a préparé la solution à C_1 .

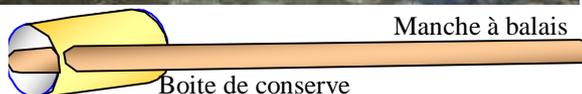
VII.2.4.5.3 Prélèvements et analyses :

Dans la méthode à débit constant, on prélèvera une quinzaine d'échantillons (un par minute) en passant de la rive droite, au milieu, puis à la rive gauche et retour.

Pour la méthode globale, le plus simple est de procéder à des prises d'échantillons (20 à 25), de volume constant et à des intervalles de temps constants en un point fixe de la section (si possible au milieu).

Le mélange de ces différents prélèvements donnera un échantillon de la concentration moyenne sur la période de prise.

Dans la plupart des cas, l'analyse est faite par colorimétrie ; on procédera donc, durant le jaugeage, à un prélèvement de solution à C_1 que l'on diluera avec l'eau de la rivière à différentes concentrations voisines du C_2 escompté. Au laboratoire, ces échantillons dilués serviront à l'étalonnage du colorimètre.



VII.2.4.6 - Domaine d'application

Longtemps, les méthodes de jaugeage par dilution n'ont été utilisées que pour des petits débits (inférieurs à $10 \text{ m}^3/\text{s}$) et pour des eaux peu chargées.

Le développement de techniques chimiques d'extraction et de reconcentration font que de nos jours, il est possible à des expérimentateurs avertis de procéder à des jaugeages beaucoup plus importants et dans des eaux chargées.

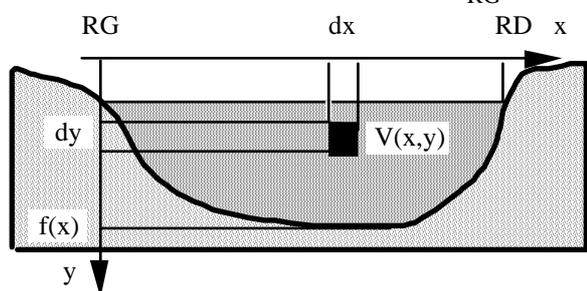
Par ailleurs, ces techniques sont particulièrement adaptées aux cours d'eau très brassés (type torrent de montagne), conditions qui sont au contraire défavorables aux mesures au moulinet comme on le verra plus tard.

Enfin, du point de vue personnel, ces techniques demandent beaucoup de soin, de propreté, etc., surtout la méthode dite globale.

VII.2.5 - Jaugeages par exploration du champ des vitesses

Soit une section droite S d'un cours d'eau ; le débit dans cette section se définit comme le flux du vecteur vitesse à travers S ...

$$Q = \int_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{ou plus explicitement} \quad Q = \int_{RG}^{RD} \int_0^{f(x)} V(x,y) \cdot dy \cdot dx$$



Les jaugeages par exploration du champ des vitesses consistent à étudier la fonction $V(x,y)$ en l'échantillonnant suivant différentes valeurs de x et de y . Généralement, on se fixe différentes abscisses (des "verticales") $x_1, x_2, \dots, x_i, x_n$ et sur chaque abscisse x_i , on échantillonne à différentes profondeurs $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{ip}$, la vitesse $V(x_i, y_{ij})$; cette technique est appelée jaugeage "point par point".

On peut également, sur chaque verticale x_i , mesurer directement $(\int_0^{y_{max}} V(x,y) \cdot dy)$; on dit alors que l'on effectue un

jaugeage "par intégration".

Regardons maintenant comment s'effectue plus en détails la mesure.

VII.2.5.1 - Le matériel de mesures

La chaîne de mesures comporte différents éléments que nous allons étudier successivement.

VII.2.5.1.1 Les capteurs : les hélices :

Le paramètre à mesurer est la composante normale à la section de la vitesse de l'eau.

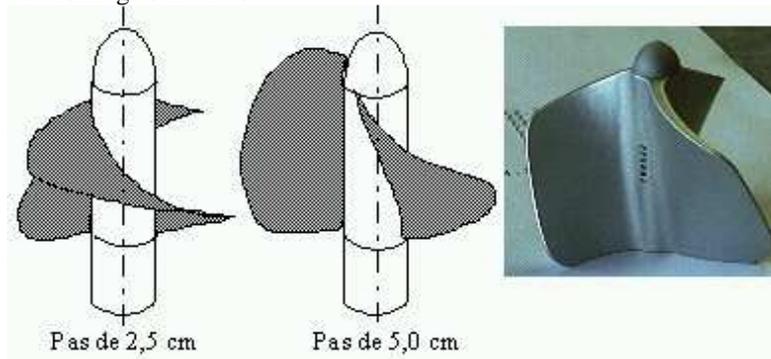
Le capteur le plus utilisé (tout au moins en Europe) est une hélice. Si on introduit cette hélice dans l'écoulement, la vitesse longitudinale de l'eau va provoquer la rotation de l'hélice. Théoriquement, la relation entre la vitesse de rotation n (en tours/seconde) et la vitesse de l'eau V (en m/s) ne dépend que du pas p de l'hélice :

$$V = n p$$

Dans la pratique, on s'éloigne de cette courbe idéale du fait des frottements et des perturbations des vitesses dues au support de l'hélice. L'étalonnage est fait au laboratoire dans les conditions réelles d'emploi et la relation V [n] est du type :

$$V = a n + b$$

où a représente le pas réel et b la vitesse de démarrage (ou vitesse de frottement). Parfois même, on est amené à utiliser deux formules, suivant les plages de vitesses : par exemple, une hélice de pas nominal 0,25 m peut avoir des formules d'étalonnage suivantes :



$$n < 0,59 \quad V = 0,2345 n + 0,017$$

$$n > 0,59 \quad V = 0,2515 n + 0,007$$

La sensibilité d'une hélice dépendant de son pas, on utilisera pour mesurer des faibles vitesses, des hélices à faibles pas et pour des grandes vitesses, des pas plus longs.

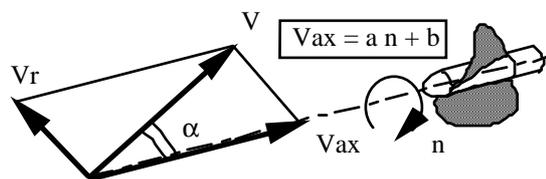
Il existe par ailleurs une vitesse limite supérieure liée aux capacités d'enregistrement du nombre de tours par seconde.

Diamètre (m)	Pas nominal (m)	Vitesse minimale (m/s)	Vitesse maximale (m/s)
0,03	0,05	0,050	0,50
	0,10	0,055	1,10
0,05	0,05	0,025	0,50
	0,10	0,030	1,00
	0,25	0,035	2,50
0,08	0,50	0,060	5,00
	0,125	0,060	1,25
0,1	0,25	0,040	6,00
	0,50	0,050	2,50
0,125	0,25	0,050	2,50
	0,50	0,060	5,00
	1,00	0,080	10,00

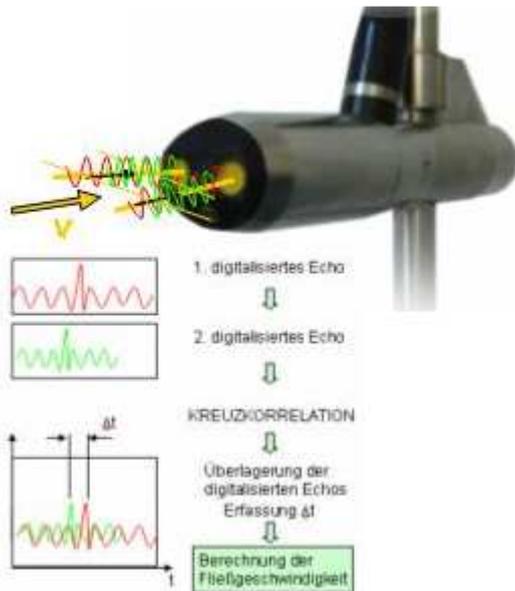
Pour des hélices très classiques (OTT ou NEYRPI) et des compteurs d'impulsions électriques (limites à n de l'ordre de 10 à 20) on a les domaines d'applications reproduits sur la planche précédente.

L'étalonnage des hélices correspond à la mesure des vitesses de l'eau lorsque l'axe de l'hélice est confondu avec la direction du courant.

Dans certains cas, il n'est pas possible de réaliser cet accord ; aussi a-t-on conçu des hélices dites "auto-composantes". Elles ont pour caractéristiques de mesurer la composante axiale V_{ax} de la vitesse lorsque celle-ci est oblique par rapport à l'axe. Selon les constructions, l'angle α maximum varie entre 15° et 45°.



Les hélices sont réalisées le plus souvent en alliage léger mais apparaissent sur le marché des hélices plastiques tout aussi performantes pour un coût bien moindre. Leur précision est tout à fait satisfaisante puisque l'erreur est toujours inférieure à 1 % (dans la mesure où elles n'ont pas subi de chocs qui les ont détériorées !).



Progressivement on trouve sur le marché, d'autres capteurs que les hélices. On notera par exemple les courantomètres acoustiques numériques.

Les signaux ultrasons émis par les deux transducteurs de l'ADC sont réfléchis par les particules se trouvant dans les cours d'eau (par ex. particules en suspension, plancton, bulles d'air, etc). Un signal d'écho dépendant de la taille et de la forme des particules est renvoyé aux transducteurs, il est réceptionné puis traité par un processeur numérique DSP.

Ce processus est réitéré après une courte pause. Le deuxième écho réceptionné est également numérisé.

Ensuite, le DSP vérifie à l'aide du procédé mathématique de la corrélation croisée si les deux échos se ressemblent. Le résultat de la fonction mathématique permet de tirer des conclusions sur le décalage temporel des deux échos. Ce décalage est par la suite utilisé pour calculer la vitesse d'écoulement.

VII.2.5.1.2 Traitement du signal : les moulinets

Les moulinets ont pour objet de transformer le mouvement de rotation de l'hélice en impulsions électriques aisément transférables et enregistrables.



Le principe en est simple ; un axe auquel est fixée l'hélice est entraîné dans son mouvement de rotation. La partie arrière de cet axe porte, soit une vis sans fin qui par un système d'engrenage ferme un circuit électrique à chaque tour, soit un aimant dont la rotation provoque la fermeture d'un contacteur magnétique. L'axe du moulinet est porté par des paliers de haute précision à très faible frottement.

Les éléments mécaniques sont dans un bain d'huile spécial dont les variations de viscosité avec la température sont négligeables. Des joints empêchent la pénétration des substances en suspension : il n'y a donc qu'une très faible usure des paliers.

L'ensemble du moulinet est généralement réalisé en acier inoxydable. Notons enfin que pour certains matériels, le dispositif de contact est modifiable de façon à n'émettre une impulsion que les 1, 2, 10 ou 20 tours.

VII.2.5.1.3 Enregistrement : les compteurs

Les compteurs ont pour objet de totaliser les impulsions électriques émises par le moulinet. La cadence maximale d'enregistrement est généralement de 10 hHz (10 impulsions/seconde) ; les modèles les plus récents montent à 20 Hz.

Parmi les différents modèles, on peut citer :

Les totalisateurs

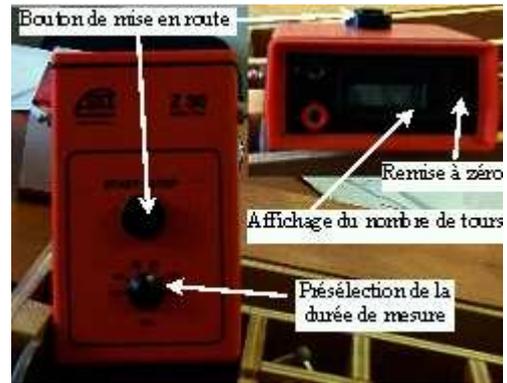
Un même bouton sert à la mise en route et à l'arrêt du comptage. Un affichage mécanique ou à cristaux liquides, donne le nombre d'impulsions enregistrées et un bouton permet la remise à zéro. Ce type d'appareil est donc utilisé avec un chronomètre que l'on met simultanément en route.

Les chrono-compteurs

A partir de l'appareillage de base précédent, on adjoint un chronomètre dont la commande est asservie à celle du compteur. Il ne reste donc qu'un seul bouton. La première pression met en route le compteur et le chronomètre ; la deuxième pression les arrête simultanément pour permettre la lecture du nombre d'impulsions i et du temps Δt ($n = 1/\Delta t$) ; la troisième remet le tout à zéro.

Les compteurs à présélection

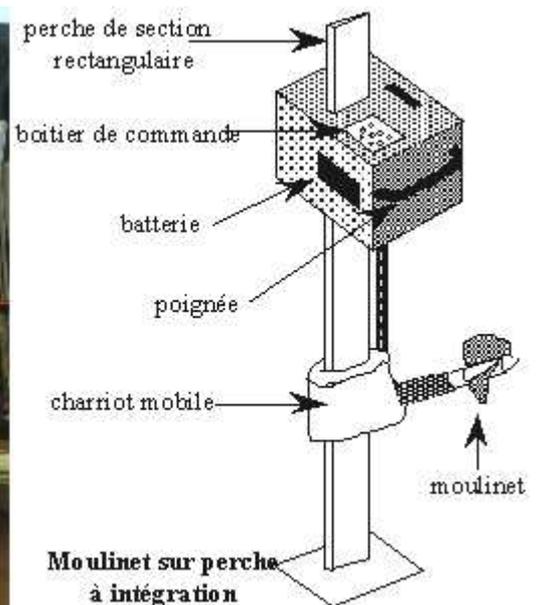
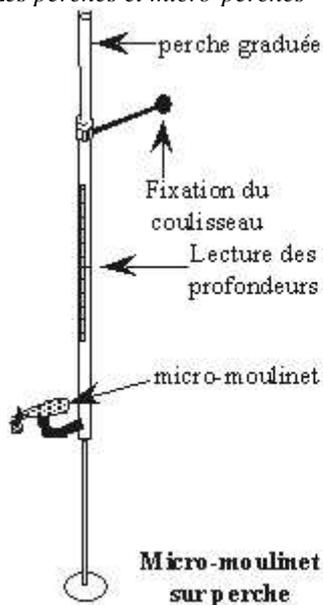
Une amélioration a encore été apportée en permettant le choix de la durée Δt de la mesure (présélection du temps) ou du nombre i d'impulsions à enregistrer (présélection d'impulsions). Ayant fait sa présélection, la première pression sur le bouton met le compteur en marche et il s'arrête automatiquement soit au bout de Δt en affichant le nombre d'impulsions enregistrées, soit au bout de i impulsions, en affichant le nombre Δt . La deuxième pression remet les compteurs à zéro. Tous ces modèles comportent une alimentation électrique, soit par piles sèches, soit par batteries rechargeables.



VII.2.5.1.3 Les supports

Nous avons vu quels étaient les trois éléments principaux de la chaîne de mesures ; reste maintenant à positionner le capteur à différentes profondeurs suivant une verticale. Deux supports sont possibles :

Les perches et micro-perches



Le système le plus ancien est constitué d'une perche graduée cylindrique (d'un diamètre ϕ 9 mm à ϕ 30 mm) ou pisciforme (de 20 x 40 mm à 70 x 150 mm) qui est maintenue verticalement dans l'écoulement. Un coulisseau coaxial permet de déplacer le moulinet suivant la verticale. Un tel système ne permet que des jaugeages point par point.

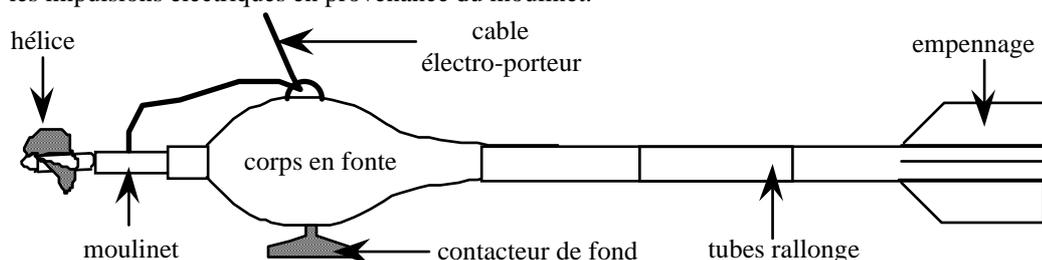
De nouveaux matériels se sont développés pour permettre des jaugeages à la perche par intégration. Le matériel qui semble le plus au point actuellement est la perche PIREE. La perche support est de section rectangulaire. Sur celle-ci est fixé un boîtier qui contient les différents compteurs (temps, impulsion) et un moteur électrique à vitesse réglable. Sur la perche coulisse un porte-moulinet suspendu au boîtier par un ruban perforé et métallique entraîné par une roue dentée mue par le moteur. La mesure se fait par intégration en remontant le porte-moulinet. Après avoir choisi la vitesse de remontée (de 3 à 40 mm/s), on met en route par un bouton-poussoir. Dès que l'hélice arrive à la surface, on arrête et on lit directement la profondeur, le temps de montée et le nombre d'impulsions. L'énergie est fournie par une batterie rechargeable dont l'autonomie est d'une dizaine de jaugeages.

Ce type d'appareil est certainement celui qui répond le mieux aux besoins des hydrologues pour les jaugeages en bottes. La mesure est aisée, plus rapide et plus précise.

Les saumons

Un saumon est un lest profilé dont le poids varie de 5 à 150 kg. Il porte à sa partie amont le moulinet et son hélice ; un empennage à sa partie permet son orientation dans le sens du courant.

Le saumon est suspendu par un câble électroporteur à un treuil. Le câble sert à la fois à soutenir le saumon, mais aussi à transmettre les impulsions électriques en provenance du moulinet.



Le treuil, généralement à manoeuvre manuelle, comporte un compteur indiquant la longueur de câble lâchée, ce qui permet de mesurer les profondeurs par rapport à la surface. La descente du saumon peut être manuelle (jaugeage point par point) ou à vitesse constante par adjonction d'un régulateur de vitesse (de l'ordre de 2 à 5 cm/s), ce qui permet de faire des jaugeages par intégration.

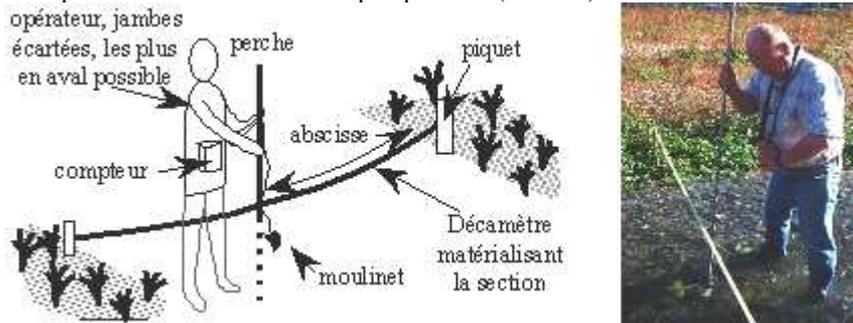
Lors de sa descente, on perd généralement de vue le saumon. On lui adjoint un contacteur de fond qui, lorsqu'il touche le fond, forme un circuit électrique et allume à la surface une ampoule ou un signal sonore.

VII.2.5.2 - Matérialisation de la section et déplacement transversal

Nous venons de voir comment les supports permettent de déplacer le moulinet le long d'une verticale ; nous allons voir maintenant comment déterminer la section transversale et comment s'y déplacer d'une verticale à une autre. Différentes techniques complémentaires et adoptées au cours d'eau sont utilisables :

VII.2.5.2.1 Jaugeages "en bottes"

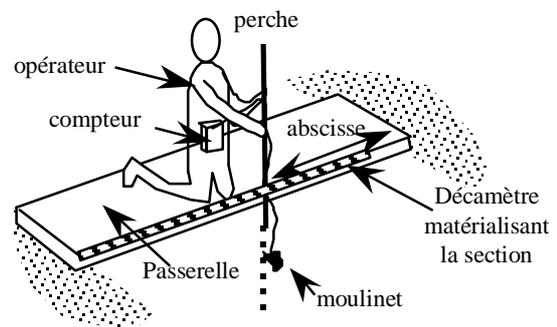
Dans ce cas, l'opérateur rentre dans le cours d'eau avec la perche moulinet et le compteur. On conçoit aisément que cette technique se limite au cours d'eau peu profond ($h < 1$ m) et surtout à faible courant ($V < 2$ m/s).



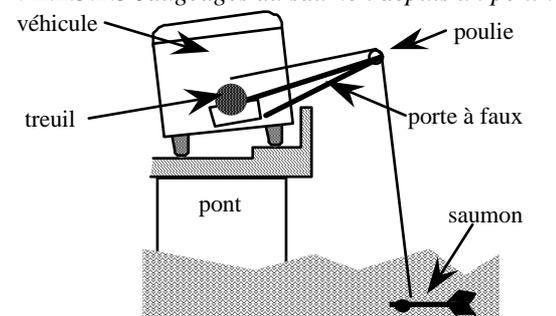
La section est matérialisée par un double décamètre tendu perpendiculairement à l'écoulement général. L'opérateur place la perche verticalement à la hauteur du décamètre, ce qui permet de repérer l'abscisse de la verticale. Dans la mesure du possible, il se tient le plus en aval et jambes écartées de façon à ne pas perturber l'écoulement au niveau du moulinet. La perche est tenue de manière que le moulinet soit bien dans le sens du courant. Le jaugeage est alors effectué point par point ou par intégration.

VII.2.5.2.2 Jaugeages depuis une passerelle :

Quand on dispose d'une passerelle, on peut procéder d'une façon analogue à la précédente. La section est matérialisée par la passerelle sur laquelle on se déplace en abscisse. Les avantages sont que d'une part, l'opérateur n'est pas soumis au froid et d'autre part, que l'on peut jauger sur des profondeurs plus grandes (jusqu'à 3 m) et à de plus fortes vitesses (jusqu'à 3 m/s). Dans ce dernier cas, on fixe la perche sur un pied de manoeuvre solidaire de la passerelle.



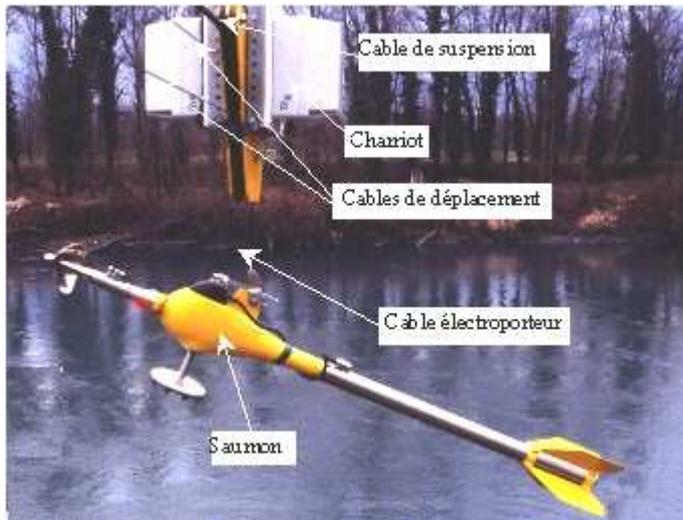
VII.2.5.2.3 Jaugeages au saumon depuis un pont :



Lorsque la vitesse devient trop forte ou la profondeur trop grande, il est nécessaire d'utiliser un saumon. Celui-ci est suspendu à un treuil simple par l'intermédiaire d'une porte à faux fixée sur un véhicule lorsque la taille du pont le permet ou sinon, à une cyclopotence moins encombrante. Comme précédemment, le pont matérialise la section et les profondeurs se lisent sur le treuil.



VII.2.5.2.4 Jaugeages avec trilles téléphérique



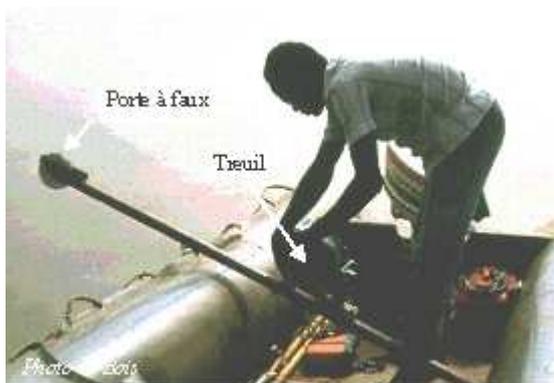
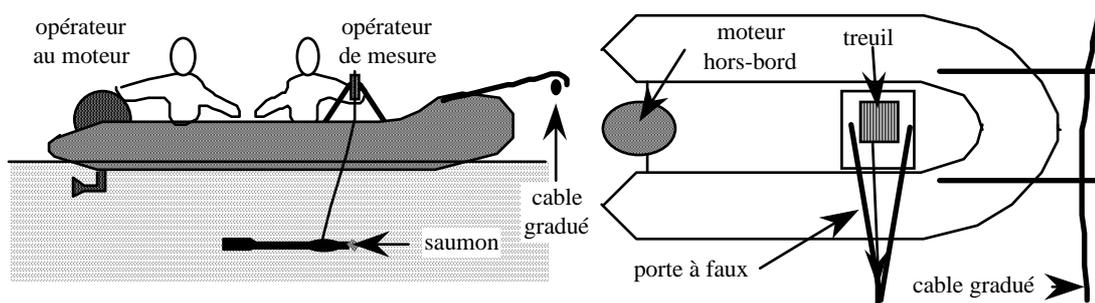
Lorsqu'il n'y a pas de pont et que le cours d'eau ne se prête pas à la navigation, on peut utiliser une station dite téléphérique. Le saumon est alors suspendu par son câble électroporteur à un chariot se déplaçant le long d'un câble porteur. Différents matériels existent selon les poids des saumons (de 25 kg à 100 kg) et les portées (de 50 m à plus de 400 m). Le treuil est alors double avec un compteur des déplacements horizontaux et un pour les déplacements verticaux.

De telles stations permettent de faire des jaugeages par temps de crue en laissant le personnel à l'abri des dangers ; par contre, l'investissement est lourd car il faut le plus souvent laisser le matériel à demeure. Même avec des treuils motorisés, la manœuvre est longue. Signalons enfin que dans le cas de courants très violents, le saumon est entraîné vers l'aval ; ainsi, la section explorée n'est plus verticale.

On peut y remédier en installant un deuxième câble à l'amont duquel est également suspendu le saumon, ce qui permet de le ramener dans la section verticale.

VII.2.5.2.5 Jaugeages en bateau :

Il est possible d'équiper un bateau plus ou moins léger pour effectuer les jaugeages. Cela se justifie pour les rivières de grande largeur (difficultés à installer un téléphérique) ou lorsque le bateau est lui-même un moyen d'approche du site de jaugeage. Le plus fréquemment, ce sont des bateaux légers pneumatiques que l'on équipe d'une porte à faux avec un treuil simple et un saumon.



Dans la mesure du possible, la section est matérialisée par un câble tendu au travers du cours d'eau. Ce câble est gradué de façon à permettre le repérage en abscisse. L'un des opérateurs se maintient au moteur de façon que le bateau reste au niveau du câble (système d'accrochage) sans tirer sur lui. Le moteur doit rester en marche et compenser le courant de façon à pouvoir manœuvrer immédiatement en cas de dangers (coups flottants). Si la rivière est trop large pour que l'on puisse tendre un câble en travers, on disposera des repères sur les rives de façon à se positionner dans la section par relèvement avec un cercle hydrographique.

Ce type de jaugeage est limité par la vitesse de courant qui ne doit guère dépasser 2 m/s. Un inconvénient est que le bateau perturbe les vitesses en surface.

VII.2.5.3 - Conduite et exploitation du jaugeage

VII.2.5.3.1 Choix du site

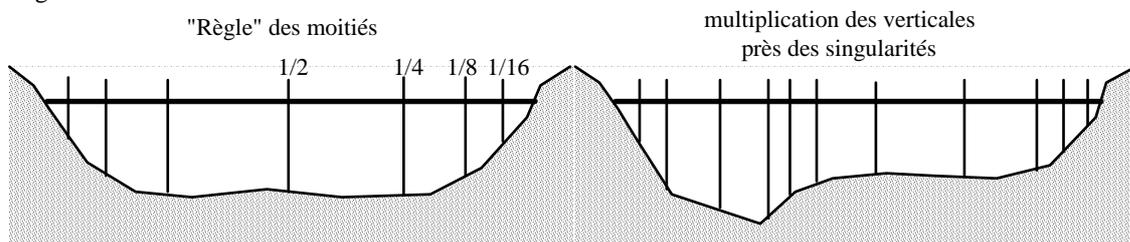
Généralement, le site du jaugeage n'est pas complètement imposé ; on peut très bien selon les cas, envisager différents sites plus ou moins en amont ou en aval, dans la mesure où il n'y a pas d'affluent ou de pertes entre ces points.

On choisira donc de préférence un site où les vitesses sont parallèles entre elles et perpendiculaires à la section de jaugeage. La profondeur doit être suffisante par rapport au diamètre de l'hélice (au moins 10 cm environ), mais les vitesses doivent être également suffisantes par rapport aux vitesses de démarrage des hélices (au moins 5 cm/s).

Enfin, le fond doit être si possible régulier et dépourvu d'entraves au fonctionnement de l'hélice (végétation par exemple). Pour les jaugeages au saumon depuis un pont, on choisira de préférence des ponts n'ayant pas ou peu de piles en rivière car cela provoque des remous dans lesquels il est difficile de mesurer le débit. Généralement, la mesure se fait en aval du point avec un saumon et en amont avec une perche, mais l'inverse est possible selon les cas.

VII.2.5.3.2 Choix des verticales :

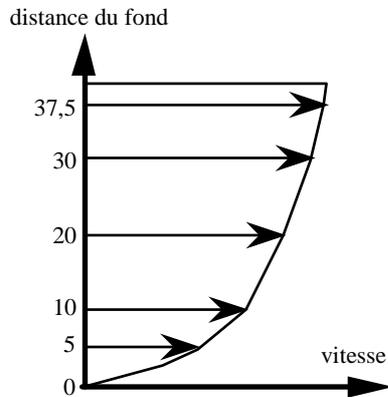
Le nombre de verticales doit être suffisant pour bien définir la section mouillée et la répartition des vitesses. Ce nombre est variable et il est bien difficile de fixer une règle stricte. Disons que généralement 5 à 20 verticales sont suffisantes mais le choix est une question d'appréciation sur le terrain. On multipliera les verticales par des hétérogénéités de la section.



Dans les cas simples, on pourra appliquer la "règle" dite des moitiés avec une verticale au milieu, deux aux quarts, deux aux huitièmes, deux aux seizièmes de la section.

VII.2.5.3.3 Durée et nombre de mesures sur une verticale :

Dans le cas d'un jaugeage point par point, le nombre de mesures par verticale dépend de la profondeur totale et de la variabilité des vitesses.



Ce nombre de points varie généralement de 5 à 10, les points étant souvent resserrés vers le bas. Prenons le cas d'une verticale de 40 cm de profondeur jaugeée avec une microperche et une hélice de ϕ 5 cm ; on fera la première mesure à 5 cm du fond (2,5 cm en plus du rayon de l'hélice) puis les autres à 10, 20, 30 et 37,5 cm du fond (l'hélice tangentant la surface libre).

A chaque point de mesures, il faut laisser tourner l'hélice un temps suffisant pour obtenir la vitesse moyenne en ce point et que l'erreur sur les temps soit négligeable. En général, on admet des mesures d'au moins 30 secondes et d'au moins 100 impulsions.

Dans le cas d'un jaugeage par intégration, le principe est d'explorer la verticale, de profondeur h, à vitesse constante v (variant de 1 à 5 cm/s dans les cas les plus fréquents).

Supposons que la verticale soit à l'abscisse x ; on peut définir la vitesse moyenne $\overline{V_x}$ dans cette verticale comme étant...

$$\overline{V_x} = \frac{1}{h} \int_0^h V(x,y) dy$$

mais l'on a :

$$v = \frac{dy}{dt} \text{ et } V(x,y) = a n + b$$

$$\overline{V_x} = \frac{1}{h} \int_0^t (a n + b) v dt$$

$$= 1/h a v \int_0^t n dt + 1/h b \int_0^t v dt$$

Mais $\int_0^t n dt$ représente le nombre n' d'impulsions enregistrées durant la montée

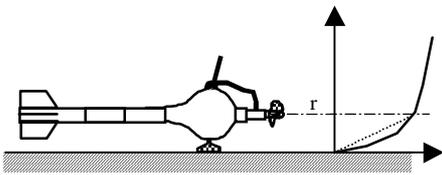
$$\int_0^t v dt \text{ est la profondeur } h \text{ de la verticale}$$

$$v/h = 1/t \text{ (t : durée de la montée)} \quad \overline{V_x} = a n'/t + b$$

Dans la mesure où les paramètres a et b sont constants (tarage purement linéaire), la vitesse moyenne sur une verticale se déduit de la vitesse moyenne de rotation durant la remontée.

Dans ces conditions, les règles de durée de la mesure seront les mêmes que pour les jaugeages point par point : la vitesse de montée (ou descente) v doit être telle que l'on ait environ $t > 30$ secondes et $n' > 100$ impulsions

Remarquons que vers la surface, on arrête le comptage lorsque l'hélice traverse la surface libre ; par contre au fond, le comptage s'arrête à une distance r du fond. Comment tenir compte de ce fait ? On peut raisonnablement penser que le profil des vitesses est sensiblement triangulaire sur les r premiers centimètres. La vitesse moyenne y est $(V_x, r/2) = V(x, r)/2$.



On procédera donc de la façon suivante : on mesure sur la zone (r, h) , le nombre n' d'impulsions pour un temps t ; ensuite, on procède à la "mesure résiduelle de fond" en laissant l'hélice tourner à la profondeur r durant la moitié du temps qui aurait été nécessaire pour atteindre le fond ; on compte n'' impulsions durant un temps $r/2v$; on calcule ensuite la vitesse moyenne sur la verticale par la relation :

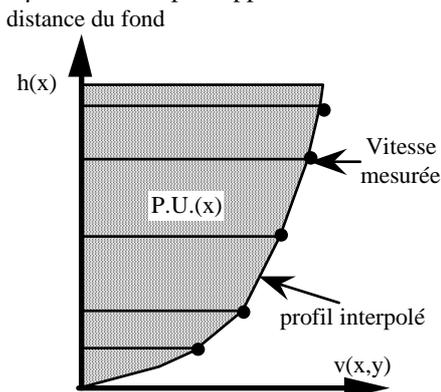
$$\overline{V_x} = a \frac{n' + n''}{t + \frac{r}{v}} + b = a \frac{n' + n''}{\frac{h}{v}} + b$$

VII.2.5.3.4 Exploitation du jaugeage

L'exploitation du jaugeage ne peut se faire correctement que si la tenue du carnet de terrain a fait l'objet d'un soin particulier. Tous les éléments qui peuvent expliquer les anomalies constatées au bureau sont notées. Il vaut toujours mieux être trop précis dans la description du jaugeage.

Cours d'eau, lieu, jour, heures, minutes de début et de fin de jaugeage, hauteurs à l'échelle de début et de fin (si on dispose d'une échelle), noms des opérateurs et matériels utilisés (numéro de l'hélice, du moulinet, support).

Pour chaque verticale, on notera l'abscisse, la profondeur totale et soit les différentes couples hauteur-vitesse (jaugeages point par point), soit la vitesse moyenne, l'angle α du câble du saumon par rapport à la verticale et l'angle β du saumon par rapport à la normale à l'écoulement (jaugeage au saumon).



On interprétera le jaugeage en considérant successivement chaque verticale et on porte dans un graphique les couples hauteur-vitesse. (Après avoir corrigé éventuellement la hauteur h de l'angle α et la vitesse de l'angle β .)

On interpole à partir de ces points, le profil des vitesses le plus vraisemblable.

On intègre ensuite ce profil dont l'aire inférieure appelée P.U. (profil unitaire) est :

$$P.U. (x) = \int_0^{h(x)} V(x,y) dy \text{ (en } m^2/s)$$

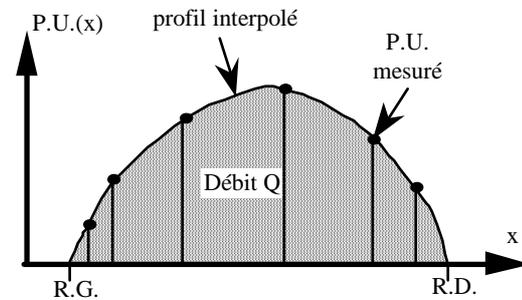
Si on a procédé à un jaugeage par intégration, on calcule directement le P.U. (x) à partir de la vitesse moyenne sur la verticale $\overline{V(x)}$ et de la profondeur $h(x)$: $P.U. (x) = h(x) \overline{V(x)}$

Ayant déterminé les différents P.U. (x), on les reporte directement en fonction de l'abscisse x des verticales. On interpole le profil en travers des P.U. en s'appuyant sur les différentes verticales exploitées et les rives gauches et droites.

L'intégrale de ce profil en travers n'est autre que le débit puisque :

$$\int_{RG}^{RD} P.U.(x) dx = \int_{RG}^{RD} \int_0^{h(x)} v(x,y) dx dy = Q$$

Notons que ces deux intégrations graphiques successives sont faites impérativement au moins une fois sur le terrain car il est hors de question de quitter un site sans avoir exploité le jaugeage (en cas d'erreur, on peut recommencer le jaugeage). L'intégration se fait en comptant les centimètres-carré sur un papier millimétré ou en utilisant une calculatrice (intégration discrète par les trapèzes). Au retour au bureau, on vérifiera la première exploitation (si possible par un autre opérateur) en utilisant un planimètre ou une table à digitaliser.



VII.2.5.3.6 Jaugeages par "verticales indépendantes"

La plupart des jaugeages sont faits pour établir une courbe de tarage, c'est-à-dire associer à un débit Q une hauteur H. Lorsque le débit varie rapidement durant le jaugeage, on est confronté à un dilemme :

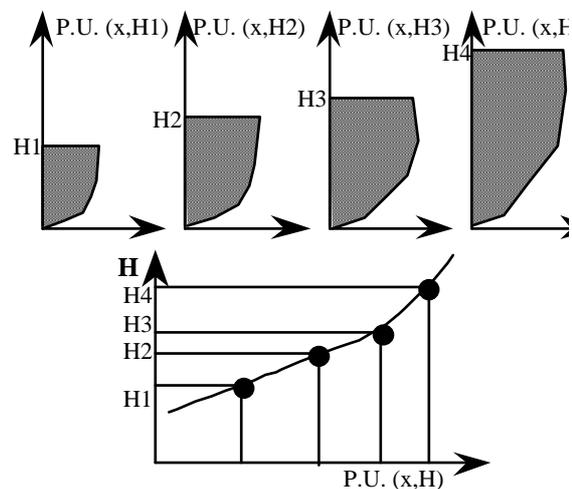
- soit faire un jaugeage précis mais plus long, donc avec une incertitude sur H, - soit faire un jaugeage rapide mais moins précis.

Le choix du nombre de verticales et de points de mesures par verticale est un compromis entre ces deux possibilités.

Si vraiment le débit varie trop vite, on pourra procéder par "verticales indépendantes".

Ayant choisi un certain nombre de verticales, on les exploite d'une rive à l'autre en notant la hauteur à l'échelle pour chaque verticale. On recommence plusieurs fois les mesures sur chaque verticale et donc pour différentes hauteurs.

Les résultats obtenus sur chaque verticale d'abscisses x_j pour différentes hauteurs H_j sont interprétés pour obtenir comme précédemment les P.U. (x_j, H_j). Pour chaque verticale, on établit le profil des P.U. (x_j) avec la hauteur H à l'échelle. Ensuite, pour différentes hauteurs H, on interpole les P.U. correspondantes sur les différentes verticales.



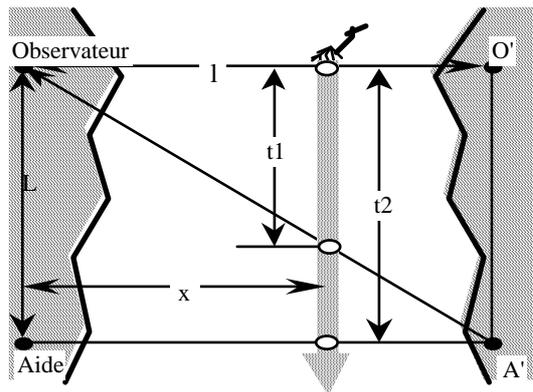
VII.2.6 - Système mobile de mesure de débit à effet Doppler

Système de mesure de débit mobile à effet Doppler pour la mesure dans les rivières et les canaux (depuis un pont, un bateau ou un téléphérique) permet de mesurer des profils de vitesse verticaux, ainsi que des profondeurs, sur un nombre paramétrable de verticales sur la rivière. Par le biais d'une liaison Bluetooth, le Qliner transmet les données directement au Pocket PC. Les avantages sont nombreux :

- Permet aux jaugeurs de rester hors des cours d'eau
- Technologie Doppler mobile pour des mesures précises, idéal pour les rivières de taille moyenne et parfaitement adapté aux mesures dans le cas d'inondations
- Adapté aux sections étroites avec rives pentues
- Utilisable à partir d'un treuil monté sur potence ou d'un téléphérique
- Pas de GPS, ni de "bottom tracking" nécessaire : utilisation sans réserve en cas de fond en mouvement
- Idéal pour les rivières moyennes - largeur de 1 à 30 m et profondeur de 0.3 à 5 m -, mais possibilité d'utilisation en rivières de taille supérieure également
- Système complètement intégré



VII.2.7 - Jaugeage au flotteur



Comme nous venons de le voir, les différentes méthodes permettent dans la majorité des cas d'estimer le débit d'un cours d'eau.

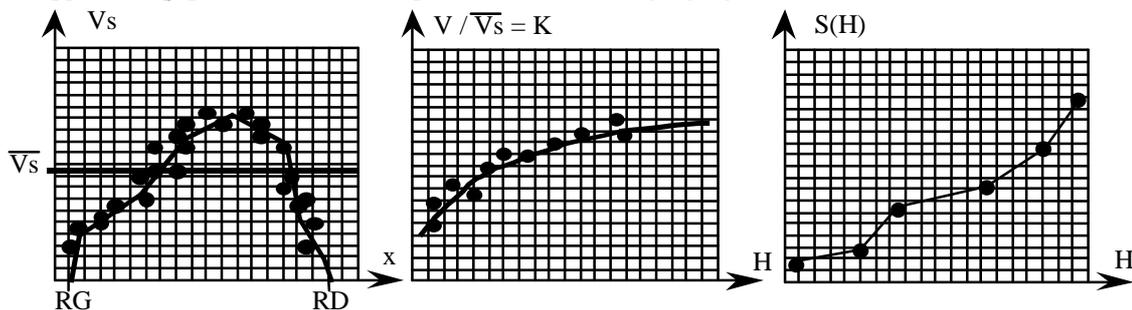
Cependant, dans des cas exceptionnels (crues catastrophiques, matériel hors service ou inadapté, etc.), il n'est pas possible d'utiliser les méthodes décrites précédemment. On pourra en désespoir de cause procéder à un jaugeage "au flotteur", ce qui est toujours préférable que de ne rien faire. Pour cela, il est nécessaire d'avoir un chronomètre à aiguilles rattrapantes et un aide. On choisit deux sections transversales limitées par des repères sur les rives OO' et AA' ; puis on choisit des corps flottants entraînés par le flot (flotteurs) et on mesure le temps t1 mis pour aller de la section OO' à l'alignement OA'.

Puis on mesure le temps t2 mis pour aller de la section OO' à la section AA' (l'aide signale à l'observateur le passage du flotteur dans AA'). Ce travail est effectué pour de nombreux flotteurs passant dans toute la section. Après la crue (ou avant si on a disposé les repères fixes OO' AA'), on mesure la distance OO' = l et O'A' = L pour chaque flotteur. Les temps t1 et t2 permettent de déterminer leur vitesse V et leur abscisse x :

$$V = \frac{L}{t_2} \quad x = l \frac{t_1}{t_2}$$

On reporte sur papier millimétré les différents couples (V,x) correspondant à chaque flotteur. Ces points permettent de tracer un profil en travers les vitesses de surface à partir duquel on détermine la vitesse moyenne de surface . Pour les jaugeages antérieurs effectués par exploration du champ des vitesses, on peut calculer la

vitesse moyenne $V = Q/S$ et sa vitesse moyenne de surface \bar{V}_s . On porte le rapport V/\bar{V}_s en fonction de la hauteur à l'échelle ; généralement, ce rapport tend lentement vers 1 ($0,8 < V/\bar{V}_s < 1,05$). Sur ce graphique, on peut extrapoler la valeur du rapport V/\bar{V}_s par la hauteur H à laquelle on a effectué le jaugeage au flotteur.



Connaissant \bar{V}_s , on en déduit V mais les profils topographiques faits dans la section donnent la relation entre la surface mouillée S et la hauteur à l'échelle H. Il suffit alors de multiplier la surface mouillée par la vitesse moyenne pour avoir une estimation du débit Q :

$$Q \cong k S(h) \bar{V}_s$$

VII.3 - LES STATIONS DE JAUGEAGE

Une station de jaugeage est un site (ou éventuellement plusieurs mais proches) où on réalisera les différentes opérations nécessaires à l'acquisition des débits en fonction du temps. En particulier, ce site doit de préférence être tel que la relation hauteur-débit soit biunivoque et stable dans le temps.

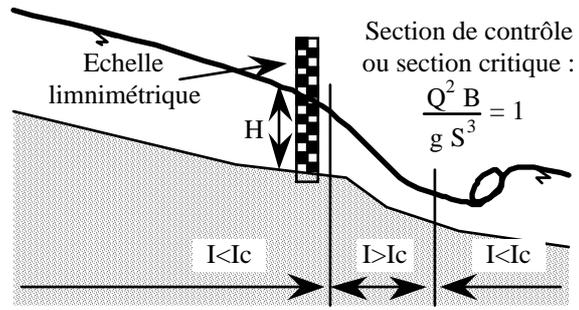
VII.3.1 - Le seuil ou contrôle

Le cas idéal est donc celui d'un site où la courbe de tarage est biunivoque : on choisira donc un emplacement situé juste à l'amont d'une traversée du niveau critique, ainsi les perturbations de niveau aval ne se feront pas sentir.

H ne dépend que du débit, de la forme de la section critique et des pertes de charge entre station critique et station de mesures (qui sont sensiblement constantes). Pour que la courbe de tarage soit stable dans le temps, il faut donc essentiellement que la forme de la section de contrôle soit stable dans le temps.

Enfin, il est souhaitable que la section soit sensible, c'est-à-dire qu'une erreur Δt (en général de l'ordre du cm) n'entraîne pas une erreur inacceptable sur le débit. Cette sensibilité est souvent faible en basses eaux.

Dans la mesure du possible, on cherchera des seuils naturels ou installés depuis longtemps ; on est à peu près assuré dans ces cas, d'avoir un seuil stable. Les contrôles de ce type sont tous ceux qui conditionnent un passage en régime critique : chutes, rapides, rétrécissements du lit, passage de ponts, etc.



Exemples de seuil artificiel et d'un contrôle naturel par affleurement d'une couche résistante

S'il n'est pas possible de trouver un seuil satisfaisant, on pourra se rabattre sur un tronçon où le régime est uniforme. Là-aussi, une relation biunivoque existe entre hauteur normale et débit :

$$Q = k S R H^{2/3} I^{1/2}$$

On installera donc de préférence la station au milieu d'un tronçon uniforme. Dans ce cas, on voit que le coefficient de Strickler et la forme de la section jouent un rôle ; donc, même avec une section stable, on risque d'avoir une courbe de tarage instable du fait des variations du coefficient de Strickler avec le développement saisonnier de la végétation.

Une autre solution est de construire un seuil artificiel (déversoir, jaugeur, etc.) ; les inconvénients sont d'une part le coût d'une telle installation si on veut qu'elle ne soit pas emportée par la première crue ; d'autre part, une modification du lit entraîne une variation des conditions de transport solide et cette station n'est pas stable immédiatement (sédimentation et affouillement tendant, on l'espère, vers un équilibre stable).

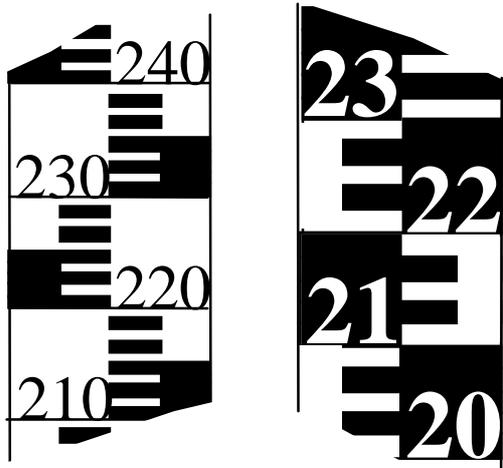
Dans le cas extrême où il n'y a ni tronçon de contrôle ni seuil de contrôle, on installera deux échelles de mesures des niveaux H₁ et H₂ ; la relation entre Q et H₁ H₂ s'obtient en intégrant l'équation différentielle de la ligne d'eau :

$$\frac{dH}{dL} = \frac{i - j}{1 - \frac{Q^2 B}{g S^3}}$$

VII.3.2 - Limnimétrie

La limnimétrie est la mesure des niveaux en fonction du temps. Toute station comporte au moins une échelle de mesures des hauteurs et éventuellement un limnigraphe.

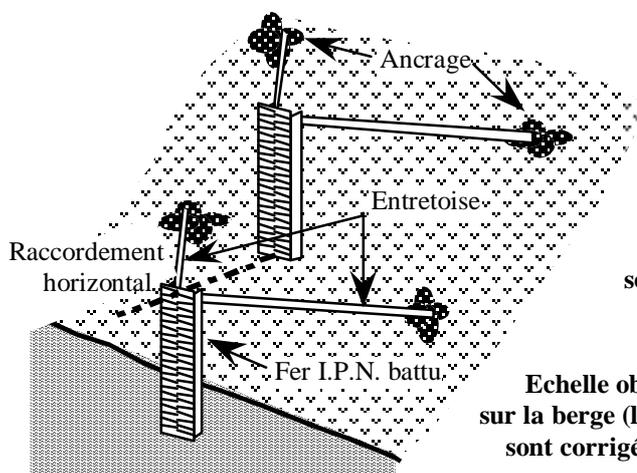
VII.3.2.1- Les échelles



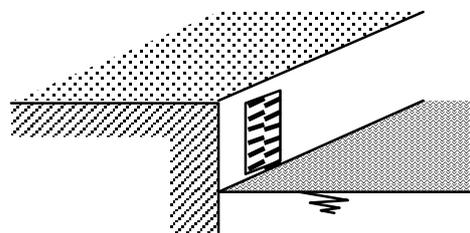
Les échelles sont les repères fixes sur lesquels on lira le niveau d'eau H. Elles sont réalisées le plus souvent en tôle émaillée). Constituées généralement d'éléments de 1 m, elles portent des indications métriques, décimétriques et centimétriques. L'installation des échelles se fait sur des supports fixes : fers IPN battus dans le lit, culée de point, quais, rives rocheuses, etc.

L'échelle doit être installée de façon à être protégée des corps flottants qui pourraient l'endommager lors des crues. Par ailleurs, elle doit être à l'abri du battillage de façon que l'on puisse lire les niveaux de près.

Une fois installées, les échelles seront nivelées et rattachées au nivellement général. Ainsi, au cas où une échelle serait endommagée, il sera possible d'en remettre une nouvelle à la même cote. Enfin, il faut que le zéro de l'échelle soit toujours sous l'eau, même lors des étiages les plus sévères et après d'éventuels affouillements (des hauteurs négatives entraînent souvent des gênes dans le traitement informatique).

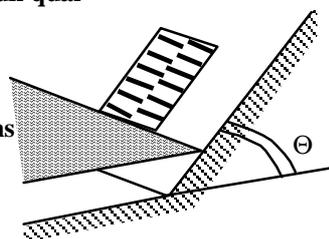


Echelles métriques en relai le long de la berge



Echelle verticale scellée contre un quai

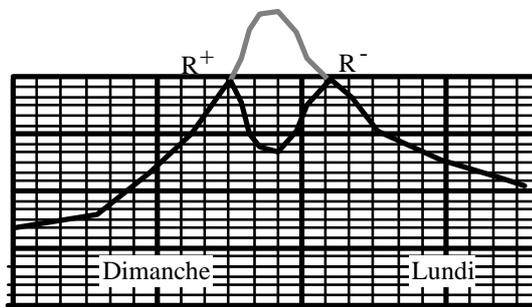
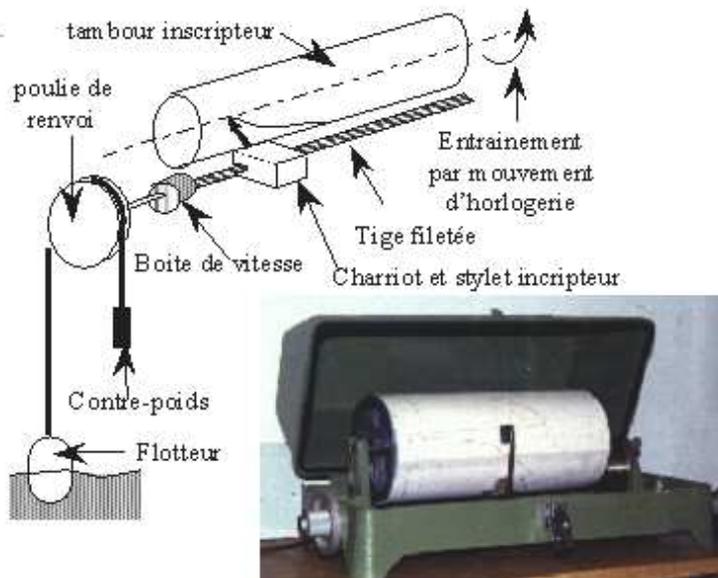
Echelle oblique fixée sur la berge (les graduations sont corrigées de $\cos \Theta$)



VII.3.2.2 - Les limnigraphes à flotteur

Ces appareils ont pour but d'enregistrer les niveaux d'eau en fonction du temps. Parmi tous les types de limnigraphes, ceux à flotteurs sont les plus utilisés. Leur principe commun est très simple. Le capteur est un flotteur équilibré en partie par un contre-poids dont les déplacements sont liés à ceux du flotteur par un câble et une poulie. Les mouvements verticaux du flotteur sont transformés en mouvements de rotation de l'axe de la poulie. Cet axe entraîne, par un système d'engrenage, le déplacement transversal d'un stylet le long d'une tige filetée.

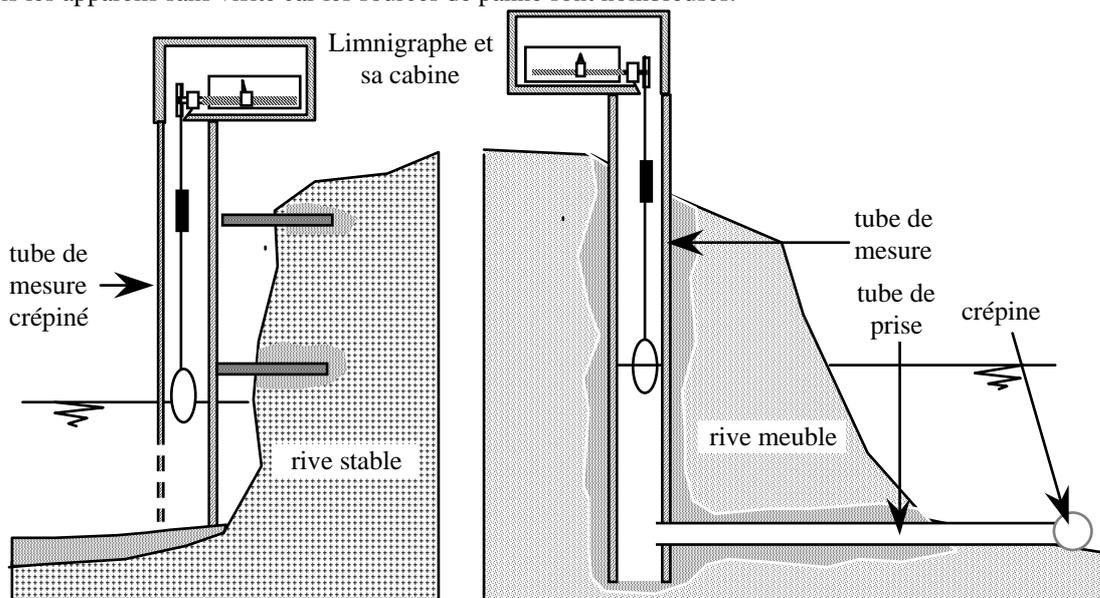
Le stylet inscrit sur le papier d'un tambour ou d'une table déroulante dont le déplacement est proportionnel au temps. Les modèles sont très nombreux : ils se distinguent essentiellement entre les limnigraphes à tambour (à axe horizontal ou vertical) et à table déroulante. En général, le système d'engrenage permet différentes démultiplications : 1/1, 1/2, 1/5, 1/10, 1/20 (1/5 => 1 cm papier = 5 cm niveau).



Par ailleurs, de nombreux limnigraphes sont équipés d'un système dit "à retournements" : la tige filetée possède deux filetages l'un à pas à droite, l'autre à pas à gauche. Le chariot porte-stylet arrivant en bout de course repart en sens inverse ; il n'y a plus de limite à l'amplitude des mouvements du plan d'eau enregistrable.

La figure ci-contre illustre un retournement en crue et un retournement en décrue. L'hydrogramme réel s'obtient par symétrie par rapport aux bords du papier.

Ces appareils sont souvent réglables en vitesse de rotation. Communément pour les tambours, les rotations se font en un jour, une semaine, deux semaines ou un mois ; pour les tables déroulantes, l'autonomie peut être de plusieurs mois. Le mécanisme d'horlogerie peut être entraîné soit par un ressort, soit par des piles électriques. Dans le choix de l'échelle de réduction et de l'autonomie, il faut trouver un compromis entre une bonne sensibilité verticale (réduction faible), mais une amplitude suffisante (forte réduction) pour mesurer toutes les hauteurs et entre une bonne lisibilité des temps (rotation rapide) et une autonomie grande (rotation lente). Dans tous les cas, il est conseillé de ne pas laisser plus d'un mois les appareils sans visite car les sources de panne sont nombreuses.



L'installation de ces appareils se fait à la verticale d'un puits de mesures dans lequel est situé le flotteur. Il est ainsi protégé du battillage et des corps flottants. Selon les cas et les circonstances, l'installation peut se faire soit en prise directe dans le cours d'eau, soit enterrée dans la rive avec un tube de prise.

Les inconvénients de ces appareils résident essentiellement dans :

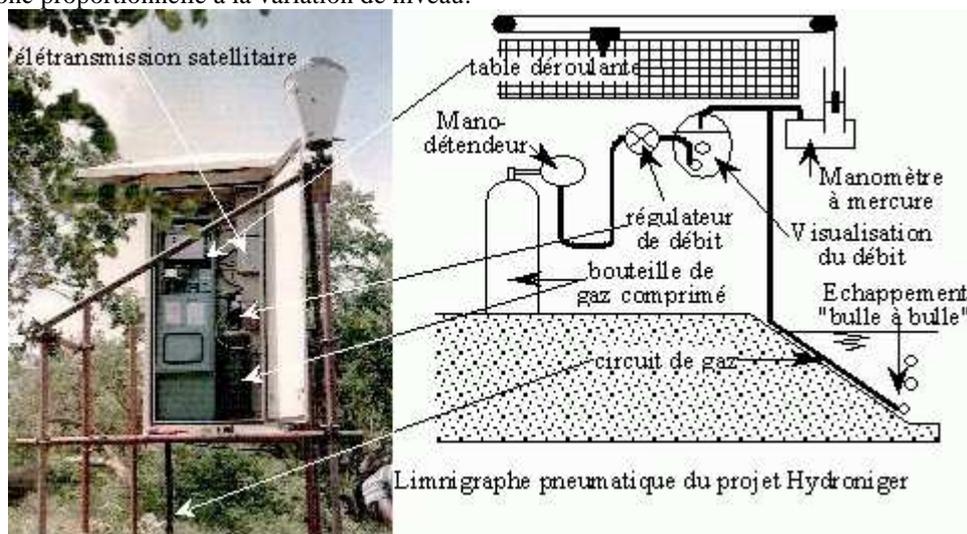
- les possibilités de colmatage des tubes de prise (ce qui provoque un retard entre niveau dans le puits et cours d'eau) ;
- les possibilités de gel dans le tube ;
- le coût de l'installation du puits (puits enterré) ou le risque de mettre l'appareil à portée des crues (puits en prise directe).

Les avantages sont ceux d'un coût relativement modique de l'appareil lui-même, d'un mécanisme simple et robuste.

VII.3.2.3 - Les limnigraphes dits à bulles

Ces appareils sont basés sur le principe d'une prise de pression au fond de la rivière. Une bouteille de gaz comprimé (azote ou air), munie d'un mano-détendeur, alimente le circuit gaz à débit constant. Le régulateur de débit est couplé avec un visualisateur ; on peut ainsi régler le débit constant à un écoulement "bulle à bulle". Le circuit gaz se poursuit jusqu'au fond de la rivière à partir de laquelle s'échappent les bulles de gaz. Sur ce circuit de gaz est branchée une prise de pression reliée à un manomètre à mercure (ou à une capsule manométrique). Le déplacement d'un stylet inscripteur sur une table déroulante est asservi par différents systèmes à la mesure de pression. Or, cette pression est égale à la pression qui règne au fond de la rivière $H \rho g$ moins le poids de la colonne de gaz plus les pertes de charges dans le circuit gaz.

Ces deux derniers termes sont constants (géométrie et débit donnés) et d'ailleurs négligeables. La variation de pression est donc proportionnelle à la variation de niveau.



Les inconvénients de ces appareils résident :

- dans leur coût ;
- dans leur mécanique plus sophistiquée donc nécessité d'un entretien nécessitant un personnel plus qualifié ;
- dans l'astreinte d'une organisation d'un parc de bouteilles de gaz quoi que l'on puisse remplacer la bouteille de gaz par un compresseur électrique programmé pour une mise en route au moment de mesures préprogrammées dans le temps..

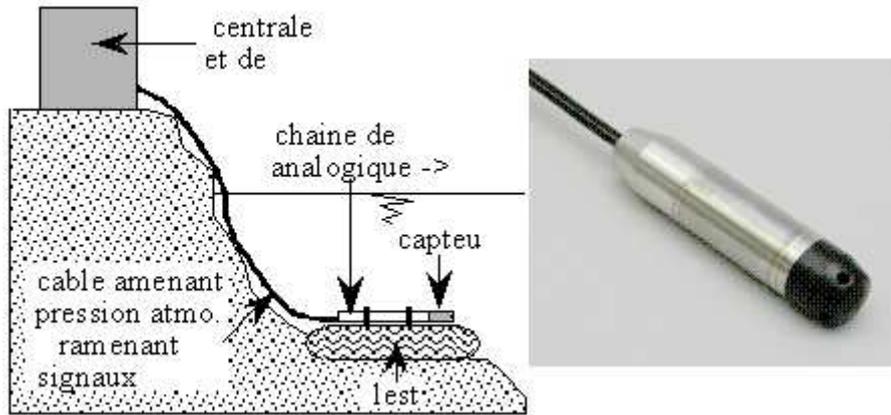
Les avantages sont cependant nombreux :

- l'appareil s'accommode très bien des eaux chargées (si la prise de pression se colmate, la pression du gaz montera jusqu'à déboucher la conduite) ;
- l'appareil peut être installé à plusieurs dizaines voire centaines de mètres du cours d'eau (on peut le mettre hors crue) ;
- si on déplace la station, on récupère facilement tout le matériel (éventuellement, on perdra uniquement le tube du circuit de gaz).

VII.3.2.4 - Sondes piézorésistives immergées (S.P.I.)

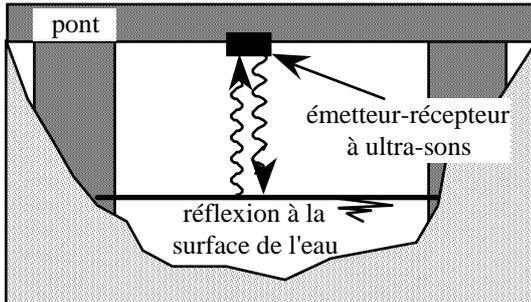
Depuis la fin des années 1980 sont apparues sur le marché de nouveau type de capteurs piézorésistifs. Les déformations que subit le capteur sont dues à la pression (pression atmosphérique + $\rho g H$) et à la température.

Une chaîne de traitement électronique est associée au capteur et délivre sous forme digitale la hauteur d'eau (au cm) et sa température. Le capteur est lui-même dans de l'huile maintenu à la pression de l'eau par une membrane souple.



Ce type d'appareil remplace progressivement les anciens limnigraphes à bulle ou à flotteur.

VII.3.2.5 - Limnigraphes à ultra-sons



Ce type d'appareil est constitué d'un émetteur récepteur d'ultrasons, fixé à la verticale du plan d'eau. Le temps de parcours aller retour entre l'appareil et le plan d'eau permet de déterminer la distance x et par déduction la hauteur d'eau H puisque l'on connaît la position nécessairement fixe de l'appareil.

Ce type de limnigraphe nécessite la présence d'un pont stable ou la mise en place d'un portique.



VII.3.2.6 - Remarques sur la gestion des limnigraphes

Comme nous l'avons déjà dit, quelle que soit l'autonomie de l'appareillage, il est bon de visiter ces appareils au moins une fois par mois lors du relevé des limnigrammes. Un minimum de mesures de contrôle sont nécessaires : lorsque l'on place le papier d'enregistrement, noter sur la feuille : la date et l'heure de mise en service, et la hauteur d'eau lue à l'échelle, faire de même lors du relevé ; on pourra ainsi contrôler la vitesse de déroulement du papier ainsi qu'un éventuel détarage des hauteurs (glissement du câble sur la poulie, déroulement en biais du papier, horlogerie prenant du retard ou de l'avance, *etc.*).

Il est bon de prévoir un grand entretien du matériel une fois par an : décolmatage du tube de prise, révision des mécaniques, peinture des cabines de protection.

VII.3.3 - Les sections de jaugeage

Lorsque l'on choisit le site d'une station de jaugeage, le critère essentiel est l'existence d'un contrôle stable et sensible ; des critères d'accessibilité s'y ajoutent ; ce n'est qu'en dernier lieu que l'on considère les sections où on

effectue les jaugeages. En effet, il n'est généralement pas nécessaire de faire le jaugeage dans la section même où on effectue la mesure de niveau. Ayant donc choisi le contrôle, on prospectera vers l'amont et vers l'aval (à distance raisonnable bien sûr) les sites possibles pour effectuer les jaugeages. On peut imaginer plusieurs sites selon que l'on est en basses, moyennes ou hautes eaux. Ce dernier cas est certainement celui qu'il faut le mieux prévoir car en période de crues, on ne dispose guère de temps à perdre. Dès l'installation de la station, on retiendra un site pour les jaugeages de crue (pont ou jaugeage en bateaux) et si nécessaire, on installera à demeure un câble pour une station téléphérique. Il faut absolument, pour des crues exceptionnelles, que l'équipe de jaugeage n'ait pas à hésiter sur le site de la mesure et sur la technique à employer. Ce n'est que dans ces conditions que l'on ne ratera pas la crue exceptionnelle.

VII.3.4 - Les courbes de tarage

Si on a pu réunir les conditions idéales d'installation d'une station de jaugeage, l'établissement d'une courbe de tarage ne devrait pas poser de difficultés particulières. Malheureusement, ces conditions idéales ne se rencontrent pas fréquemment !

La relation hauteur-débit pour une station avec une section de contrôle dépend à la fois de la hauteur critique H_C pour le débit considéré dans la section de contrôle, mais aussi au niveau normal à l'amont et de la distance à la section de contrôle.

La relation hauteur-débit dépend donc de la forme du lit et du coefficient de Strickler ; il n'est guère possible de préjuger de la forme mathématique que prendra cette relation. On se contente donc de reporter les couples hauteurs-débits obtenus par jaugeage, sur un graphique millimétré ; le nuage de points permet d'évaluer la relation la plus probable.

En général, il est relativement aisé de tracer la courbe de tarage en eau ; par contre, le tarage est plus délicat en hautes et basses eaux.

Lorsque les eaux sont basses, on constate une diminution de la précision relative sur les débits. En effet, de faibles modifications du lit perturbent gravement la relation hauteur-débit. Il en est de même pour le développement de la végétation.

Il est toujours difficile d'obtenir une bonne courbe hauteur-débit en étiage. Les remèdes sont, soit de multiplier les jaugeages d'étiage, soit d'aménager la station pour la mesure des débits de basses eaux. Il est parfois même impossible d'établir une véritable courbe de tarage.

En hautes eaux, le problème essentiel est celui de l'extrapolation de la courbe ; en effet, on enregistre au limnigraphe des hauteurs supérieures à celles correspondant aux jaugeages des plus grands débits. Comment extrapoler cette courbe ? Les solutions sont multiples mais pas toujours satisfaisantes.

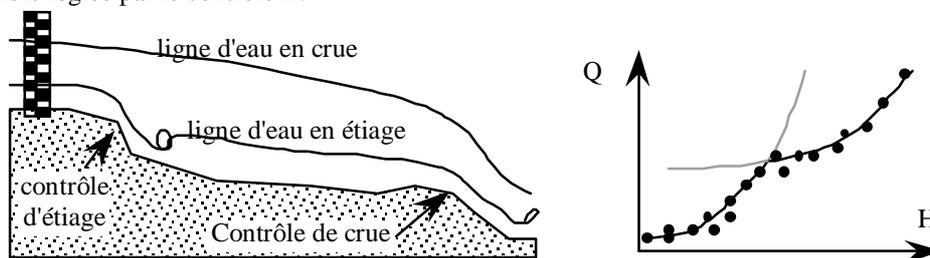
Dans les cas les plus simples où la variation de la section est progressive avec la hauteur, on peut supposer que les différents paramètres varient comme des fonctions puissances de $(H - H_0)$, H_0 étant un paramètre dépendant du zéro de l'échelle. Pour extrapoler la courbe de tarage, on portera donc sur un papier log-log, les plus forts jaugeages en testant différentes valeurs de H_0 jusqu'à obtenir l'alignement.

Cependant, la section n'est pas toujours homogène et il est alors préférable d'extrapoler la courbe de tarage d'après par exemple, la formule de Strickler :

$$Q = k S(H) [RH(H)]^{2/3} I^{1/2}$$

$S(H)$ est la section mouillée pour une hauteur H ; $RH(H)$ est le rayon hydraulique. Ces deux fonctions sont déterminées par l'étude des profils en travers au voisinage de la section de mesures. On se contentera seulement d'extrapoler $k(H)$ et $I(H)$ d'après l'allure de ces courbes obtenues d'après les plus forts jaugeages réalisés. Il faut là-encore se méfier car une station peut très bien avoir plusieurs contrôles.

Comme le suggère la figure ci-dessous, en basses et moyennes eaux, c'est le contrôle A qui gouverne les hauteurs H ; par contre, si le débit augmente, le ressaut en aval de A va se rapprocher puis noyer le contrôle A ; la station est alors réglée par le contrôle B.



Dans les premières années de la vie d'une station, on multiplie les jaugeages de façon à établir au plus tôt une courbe de tarage précise.

Dans certaines conditions, on peut avoir une courbe parfaitement stable (pas de végétation, transport solide faible, lit parfaitement stabilisé) ; il suffit alors de procéder à quelques jaugeages de contrôle assez espacés dans le temps.

Bien souvent, les courbes ne sont pas stables surtout en basses eaux. En effet, l'influence de modifications du lit ou de la végétation perturbe beaucoup la relation hauteur-débit. On est alors obligé de multiplier les jaugeages et

d'établir différentes courbes suivant les périodes de l'année. Généralement, ces courbes sont plus stables en hautes eaux. On obtient donc des faisceaux de courbes de tarage auxquelles sont attachées différentes périodes de validité.

Parfois même, pour les périodes d'étiage, il est impossible d'établir une courbe de tarage. On se contente alors d'interpoler les débits entre les jaugeages successifs en tenant compte d'une façon subjective du limnigramme.

VII.4 - ETABLISSEMENT DES HYDROGRAMMES ET DES ANNUAIRES HYDROLOGIQUES

VII.4.1 - Digitalisation des courbes de tarage et des limnigrammes

Après le développement de l'informatique, les limnigrammes sont bien sûr archivés mais leur exploitation se fait d'une façon automatique après digitalisation. Les jaugeurs sont indiqués sur les limnigrammes, les points limitant des zones où on peut considérer que H varie linéairement en fonction du temps.

Le limnigramme est alors passé à la table à digitaliser à partir de laquelle on constitue une chronique dite des hauteurs-temps. Cette chronique est celle de base car une fois ce travail fait, il n'y a plus lieu d'y revenir.

Parfois, au lieu d'utiliser un pas de temps variable, on utilise un pas de temps fixe ; cela conduit à un stockage d'informations beaucoup plus volumineux.

Pour les courbes de tarage, on peut procéder à une approximation de cette courbe par un polynôme de degré suffisant, ou - ce qui est généralement préféré - procéder à une digitalisation de la courbe en segment de droite comme pour les limnigrammes.

Evidemment, on archivera également dans le dossier de la station, les résultats de jaugeage qui sont établis une fois pour toute.

VII.4.2 - Les annuaires

Chaque année, les principaux services hydrologiques établissent un annuaire où sont récapitulés les débits moyens journaliers de chaque station. Ayant en machine limnigramme et hydrogramme, ce travail ne présente guère de difficultés particulières. Les annuaires précisent également les débits moyens mensuels et annuels aux différentes unités m^3/s , $l/s/km^2$, $mm/mois$, etc. Enfin, on donne les plus forts débits instantanés.

Rappelons qu'un annuaire est susceptible d'être modifié par des améliorations des courbes de tarage, ce n'est donc pas un document définitif. Cependant la sortie de l'annuaire est une étape indispensable au moins moralement, pour la motivation des personnels.

Avant d'utiliser les données d'un annuaire, il est indispensable de consulter le service gestionnaire pour savoir s'il est toujours valide. Avec le développement de l'informatique, il est aisé de recalculer les débits à la demande (périodes autres que journalières) et de fournir des résultats plus élaborés (graphiques, ajustement) ; c'est l'objet de la banque Hydro en France.

VII.5 - TENDANCES ACTUELLES

Les tendances qui se dessinent actuellement portent sur une amélioration des techniques existantes ou sur le développement de techniques nouvelles.

VII.5.1 - Techniques possibles d'enregistrement en continu des débits

Plusieurs techniques ont été envisagées mais elles n'ont pas dépassé actuellement le stade du prototype. Celles qui semblent pouvoir déboucher sur un développement pratique sont :

VII.5.1.1 - Jaugeages par ultra-sons

Le principe en est relativement simple : deux émetteurs récepteurs sont disposés dans des puits en rives gauche et droite du cours d'eau mais dans des sections décalées. La différence des temps de parcours des ondes ultra-sons entre A et B et B et A dépend de la vitesse moyenne entre A et B.

En faisant ainsi explorer toute la hauteur, on peut espérer atteindre la vitesse moyenne dans la section et dans la mesure où le lit est calibré, le débit.

VII.5.1.2 - Jaugeages chimiques en continu

Le développement des vaches à radio-éléments de courte période permet d'entrevoir une solution qui consiste à injecter en continu un traceur radio-actif et à disposer en aval un compteur Geiger dont les indications permettent de remonter aux débits.

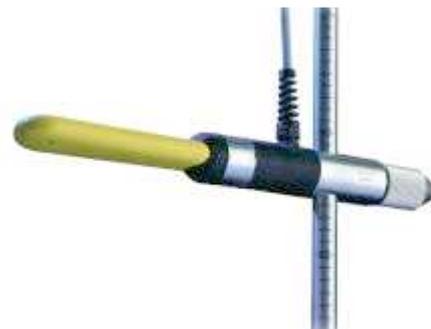
VII.5.1.3 - Jaugeages électro-magnétiques

Le principe est grossièrement le suivant : on crée, au-dessus de la rivière, un champ électro-magnétique (conducteurs bobinés sur des câbles tendus en travers et au-dessus de la rivière ou conducteurs bobinés enterrés sous le lit). L'eau de la rivière étant conductrice, le débit entraîne un déplacement d'un conducteur dans un champ électro-magnétique ; il en résulte une force électro-magnétique induite que l'on mesure avec deux électrodes situées en amont et en aval. Cette force électro-magnétique est liée directement au flux de conducteur donc au débit quelle que soit la forme de la section, la végétation et le transport solide. Actuellement, la limite est le coût de l'installation.

VII.5.2 - Amélioration des techniques existantes

VII.5.2.1 - Techniques de jaugeage par exploration du champ des vitesses

Viennent d'apparaître sur le marché des perches à intégration ; leur emploi ira s'élargissant. Le rôle de capteur de l'hélice risque cependant d'être remis en cause par l'apparition de capteurs thermiques à deux sondes : l'une permet de mesurer la température de l'eau l'autre la puissance absorbée pour maintenir la sonde à température constante. Cette puissance dépend de la vitesse et de la température de l'eau. Ces techniques sont déjà utilisées pour la mesure des vitesses dans les conduites industrielles. Se développe également des micromoulinets « électro magnétique » comme celui ci-contre développé par OTT.



VII.5.2.2 - Codage et archivage des données

Différents matériels sont proposés sur le marché ; ils permettent de stocker conjointement les hauteurs-temps sur supports magnétiques (cassettes ou EPROM) et sur support papier, directement lisible. Le coût de ces appareils explique qu'ils ne soient introduits que lentement, au fur et à mesure du renouvellement du parc de limnigraphes.

VII.6 - DEVELOPPEMENT DES TELETRANSMISSIONS

Télédéttection et télétransmission sont des domaines qui évoluent extrêmement rapidement. La description de ces techniques très complexes nécessiterait à elle-seule un ouvrage qui serait d'ailleurs périmé dès sa parution. Il paraît préférable de donner ici un aperçu très global, étant bien entendu que dans le détail des techniques et des performances, les lignes qui suivent sont certainement déjà dépassées.

Actuellement, on rencontre en hydrologie deux types principaux de télétransmission :

- télétransmissions téléphoniques ; elles peuvent utiliser soit le réseau commuté (P.T.T.), soit des lignes spécialisées ;
- télétransmissions radios ; elles-mêmes se différencient entre radio au sol (émetteur, réémetteur et récepteur au sol) et télétransmission satellitaire (réémetteur embarqué sur un satellite).

VII.6.1 - Télétransmissions par réseau téléphonique

VII.6.1.1 - Télétransmissions par réseau commuté

Les exemples d'application sont nombreux ; citons par exemple le réseau d'interrogation de stations hydrologiques par le réseau mis en place par l'E.D.F. Les systèmes sont bien au point et leur marche est satisfaisante dans des conditions normales.

Les avantages de ce système résident dans le faible coût d'investissement et de fonctionnement (sous réserve bien sûr que les lignes soient préexistantes et que l'investissement ne porte que sur le modem et le branchement).

Sauf cas particulier où le réseau est encombré ou défectueux, ce système a une très grande souplesse. On peut librement appeler les stations ou au contraire en faire partir des messages d'alerte par exemple ; c'est du vrai temps réel. Par contre, la transmission par ligne téléphonique n'est pas assez sûre pour servir dans des problèmes d'annonce de crue. En effet, dans des situations catastrophiques, il est très probable que des lignes seront coupées

VII.6.1.2 - Télétransmissions par lignes spécialisées

Les conditions techniques de transmission des messages sont à peu près identiques mais on s'affranchit des problèmes d'occupation des lignes. Ce système est bien sûr réservé à des cas particuliers où on dispose déjà de lignes (problèmes d'assainissement urbain, de télécontrôle en irrigation, etc.). On économise alors sur les redevances P.T.T.

VII.6.2 - Télétransmission radio au sol

Pendant de longues années, ce mode de télétransmission était le seul utilisable s'il n'y avait pas de possibilité de lignes téléphoniques. Les inconvénients de ce système sont maintenant quasi-réhibitaires.

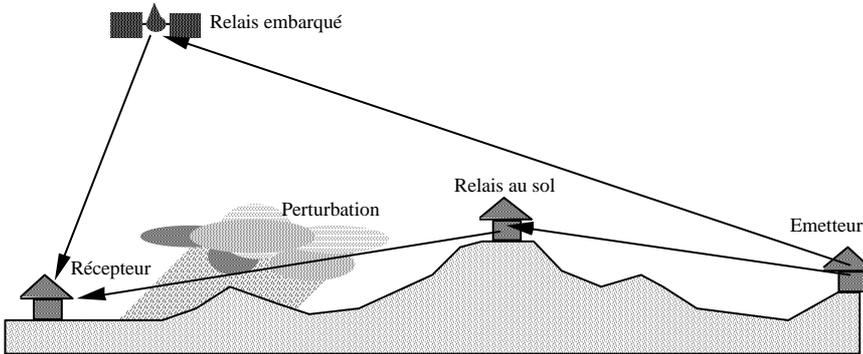
Cette transmission se fait en effet dans les couches denses de l'atmosphère, au voisinage du sol et dans la zone où se concentrent les hydrométéores. Dans l'ensemble, il faudra donc émettre avec une puissance relativement importante, prévoir des relais si le relief l'impose ; enfin, on risque toujours des perturbations atmosphériques.

Actuellement ce type de télétransmission est très coûteux et ne présente pour intérêt que d'être propriétaire et exploitant de la chaîne d'un bout à l'autre.

Un tel système ne s'installe donc plus que dans les cas particuliers où les utilisations des satellites sont impossibles.

VII.6.3 - Télétransmission satellitaire

Actuellement, ce mode de télétransmission est celui qui se développe et qui paraît avoir le plus bel avenir. Les raisons en sont relativement simples. Cette télétransmission utilise elle-aussi les ondes radio, mais celles-ci ne traversent les couches denses de l'atmosphère que sur leur épaisseur. Les risques de perturbation sont donc plus réduits, les puissances d'émission plus faibles ; enfin, le relief n'est plus guère un obstacle. Ceci est illustré par le schéma suivant.



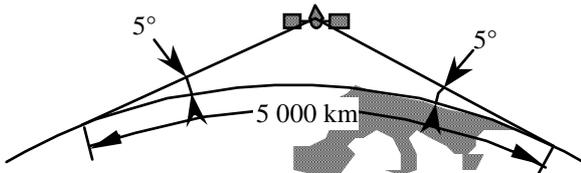
En 1987, deux systèmes principaux sont utilisables. Le premier, MÉTÉOSAT, est typique de ce qu'est et sera l'utilisation d'un satellite géostationnaire. Le second, ARGOS, présente les avantages et les inconvénients du satellite à défilement. Voyons en plus en détails les caractères particuliers de chacun.

VII.6.3.1 - Le système ARGOS

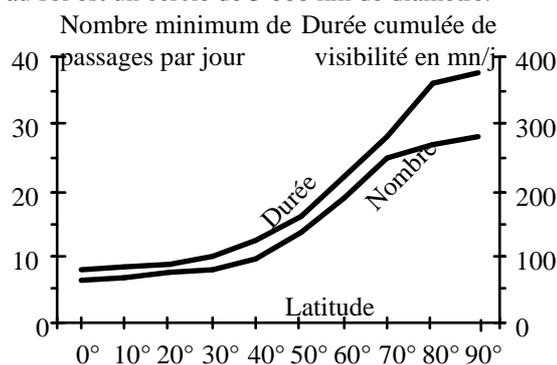
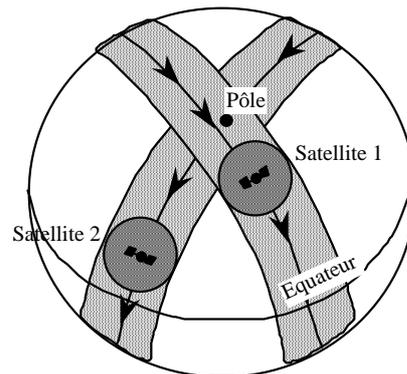
Le système ARGOS de localisation et transmission de données est le fruit d'une collaboration entre le Centre National d'Étude Spatiale (CNES, France), la National Aeronautic and Space Administration (NASA, U.S.A.) et la National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA, U.S.A.). Jusqu'en 1990 au moins, le système ARGOS sera embarqué sur deux satellites TIROS-N simultanément en orbite.

VII.6.3.1.1 Orbites et zones de visibilité

Les satellites ont des orbites quasi-polaires (inclinaées de $88,7^\circ$ par rapport au plan de l'équateur) et sont à des altitudes de 830 et 870 km.



Les caractéristiques sont telles que leur période est de 101 mn, soit environ 14 orbites par jour. Ainsi, les satellites sont héliosynchrones c'est-à-dire que chaque satellite coupe chaque jour, à la même heure, le plan de l'équateur à la verticale d'un même point. Le satellite ne voit les plates-formes que pour un site minimum de réception de 5° . Ainsi à tout instant, la zone de visibilité au sol est un cercle de 5 000 km de diamètre.



Du fait de la légère inclinaison des orbites par rapport à l'axe polaire, les zones de visibilité à différents instants engendrent un ruban de 5 000 km de large qui s'enroule autour de la terre en passant par les pôles et en se décalant à chaque tour de 25° vers l'Ouest, soit de 2 800 km à l'équateur. La figure ci-dessus illustre ces orbites successives.

Ainsi, le nombre de fois où un satellite est visible et la durée de visibilité ne dépend que de la latitude comme le montre la figure ci-contre.

VII.6.3.1.2 Message : son émission et sa réception par le satellite

Du point de vue de l'utilisateur, le message ARGOS comprend l'identification de la station sur 20 bits et un message libre de 256 bits. Ceci est très court. Ainsi, le système CHLOE.D permet d'émettre un message qui comporte les renseignements suivants :

- le numéro du message,
- la tension de la batterie,
- la tension des panneaux solaires,
- la température de l'eau,
- la température interne de la cabine,
- l'état de remplissage de la cartouche EPROM,
- les 15 hauteurs d'eau enregistrées à la demi-heure juste qui a précédé l'élaboration du message et aux 14 demi-heures justes qui la précédaient.

Un message couvre ainsi 7 h d'observations et les satellites sont visibles au moins 6 fois par jour. Ceci n'est pas un luxe car on n'est pas assuré qu'à chaque passage le message sera reçu correctement.

En effet, toutes les balises émettent sur la même longueur d'onde (401 MHz) en répétant le message avec une période variable de 40 à 200 s.

La réception des messages par le satellite est aléatoire. En effet, toutes les balises émettent en permanence et sur la même fréquence d'onde. Le système embarqué sépare cependant les messages selon leur fréquence car à la réception de la fréquence dépend de la position relative de la balise par rapport au satellite (effet Doppler). Quatre messages sur différentes longueurs d'ondes peuvent être traités à la fois.

La probabilité de recevoir correctement un message dépend à la fois du nombre de balises en vue, de la durée des messages et de leurs répétitions. Cette fonction est complexe mais on retiendra l'ordre de grandeur suivant : avec 75 balises en vue, répétant un message de 256 bits toutes les 40 secondes, la probabilité d'acquisition est de 0.9999 pour un message répété six fois (or un satellite reste en vue en moyenne pendant 10 mn soit le temps pour répéter 15 fois le message). Hormis le risque de ne pas capter le message, il existe encore des erreurs possibles sur la transmission. On peut admettre qu'un bit sur 10 000 est faux. La répétition des messages permet donc dans l'ensemble d'avoir une bonne fiabilité dans le système.

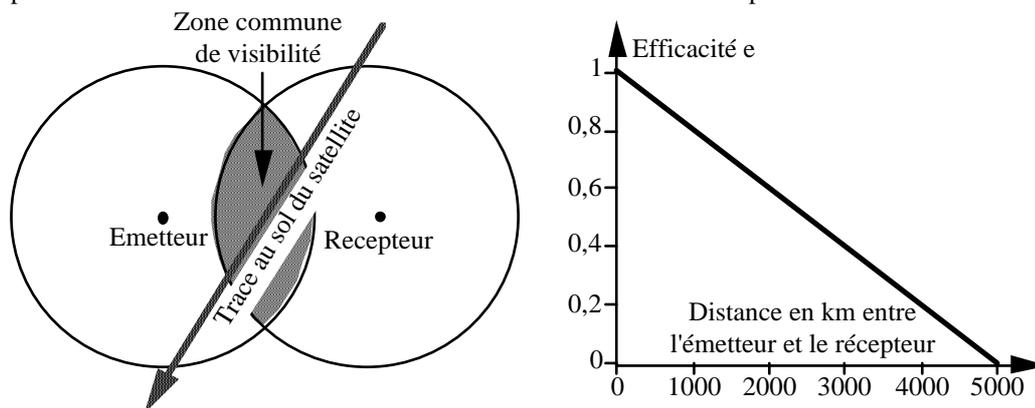
Sur le plan physique, l'émetteur ARGOS est un boîtier de faibles dimensions qui prend place dans le coffret du CHLOE.D. Une antenne omnidirectionnelle émet le message avec une puissance de 3 à 4 W.

VII.6.3.1.3 Réémission et réception au sol

Dès la réception par le satellite du message émis par la balise, le message est retransmis en temps réel. D'autre part, ce message est mémorisé sur un support magnétique. Lorsque le satellite passe en vue l'un des trois centres de réception (2 aux U.S.A., 1 en France), il vide cette mémoire et les messages sont retransmis dans le monde entier par le Système Mondial des Télécommunications. Une fois par jour au moins, les messages sont ainsi collectés et peuvent être transmis à l'utilisateur par de multiples voies :

- réseau commuté (P.T.T.),
- réseaux spécialisés (transpac),
- envoi postal de bandes magnétiques, listing,
- télex.

Évidemment, pour les besoins de l'hydrologie, on préfère s'équiper d'une station de réception directe des messages réémis par le satellite. Pour que ceci soit efficace, il faut bien sûr que le satellite soit en vue à la fois de la balise d'émission et de la station de réception. Comme l'indique la figure ci-dessous, il faut que la trace au sol du satellite coupe la zone commune des domaines de visibilité des émetteurs et récepteurs.



Selon la distance d entre émetteur et récepteur, l'efficacité e varie linéairement. Cette efficacité est définie pour le rapport du nombre de messages reçus par la station de réception, au nombre de messages reçus par le satellite.

VII.6.3.1.4 Possibilités et limites du système ARGOS pour l'hydrologie

Nous avons vu que ce système avait une efficacité qui dépendait de la latitude. En nous mettant dans les conditions les plus défavorables, soit à l'équateur, une station de réception directe permet de recevoir, dans de bonnes conditions, les informations émanant de balises distantes de 1000 km voire 2 000 km, ce qui est très amplement suffisant. Les messages sont cependant courts et compte tenu des divers aléas, on est à peu près sûr d'obtenir le message mais différé de quelques heures (4 à 7 h). Manifestement, cela ne se prête pas à des problèmes de prévision de crues brutales ; par contre, il permet de suivre en temps réel des phénomènes à variations temporelles plus amples (crues de grands fleuves) et surtout de suivre la bonne marche d'un réseau. Ce dernier point est certainement essentiel car c'est là que l'on peut espérer amortir la télétransmission en économisant sur les tournées de terrain et en réduisant les périodes de lacunes d'observations.

En 1980, les ordres de grandeur des coûts étaient les suivants :

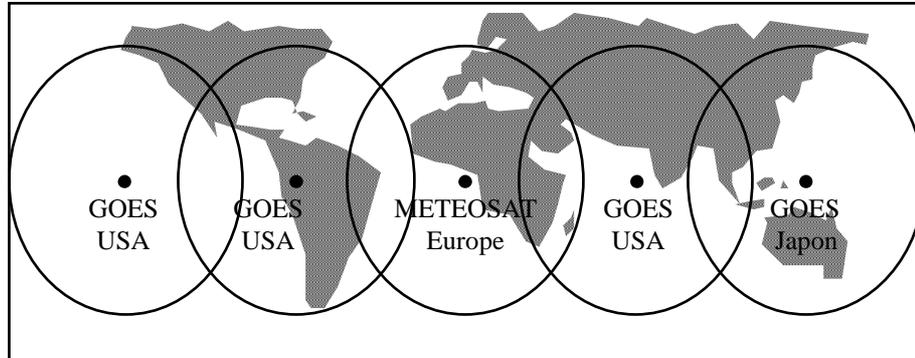
- station limnimétrique SPI + CHLOE.C + Balise ARGOS de stockage EPROM + accessoires : $\approx 75\ 000$ F ;
- coût du même ordre pour une station pluviographique avec augets basculeurs et OEDIPE ;
- station de réception directe: $\approx 200\ 000$ F ;
- redevance de fonctionnement du système ARGOS : $\approx 1\ 400$ F/an/émetteur (mais variable suivant les services et les états).

VII.6.3.2 - Le système METEOSAT

La description du système METEOSAT est beaucoup plus simple; cela tient à la fois à la nature géostationnaire du satellite mais aussi au mode de fonctionnement de la télétransmission.

VII.6.3.2.1 Orbites et zones de visibilité

Le satellite européen METEOSAT fait partie d'une famille plus vaste comprenant d'autres satellites américains, japonais, etc. Pour être géostationnaires, ces satellites sont situés dans le plan équatorial et à une altitude voisine de 36 000 km. La figure ci-dessous indique les positions de ces satellites et leurs zones de visibilité.



Positions et zones de visibilité des principaux satellites géostationnaires de télétransmission

Avec ce système, si une station au sol est en vue de METEOSAT, elle y est toujours et la position apparente du satellite ne change pas. Ceci est un avantage ne serait-ce que pour l'emploi d'antennes d'émissions directionnelles. Par contre, certaines zones du globe ne sont pas couvertes.

VII.6.3.2.2 Le message : son émission et sa réception par le satellite

Il existe deux types de messages : un message standard de 5104 bits et un message d'alerte de 184 bits. Le message standard est donc très confortable du point de vue place ; par contre, son émission doit se faire à des heures fixes choisies à l'avance et sur la fréquence d'un des 66 canaux dont dispose le système. Il est bien sûr impératif de respecter les créneaux horaires pour éviter les interférences avec d'autres émetteurs. L'horloge interne de l'émetteur doit donc être particulièrement fiable. Les messages d'alerte sont eux émis instantanément et sur un canal particulier. Ceci est un des gros avantages de METEOSAT par rapport à ARGOS. L'annonce d'une crue (dépassement d'un seuil d'alerte) est ainsi instantanée.

Comme pour ARGOS, la balise METEOSAT est d'un volume réduit et on pourra utiliser une antenne d'émission directionnelle, ce qui nécessitera une puissance d'environ 5 watts.

VII.6.3.2.3 Réémission et réception au sol

Pour les messages standards, le système peut supporter environ 3400 balises et actuellement quelques centaines seulement sont installées. La fiabilité est donc plus grande car il y a quasi-certitude de voir circuler le message ; d'autre part, le satellite ne réémet pas directement vers l'utilisateur mais fait d'abord transiter l'information par le centre de Darmstadt (R.F.A.). Le message y est vérifié et une procédure permet d'en corriger éventuellement les erreurs de transmission. De Darmstadt, le message peut être diffusé par diverses voies déjà signalées (téléphone, télex, etc.) mais il est aussi retransmis une seconde fois par le même satellite METEOSAT. Il est donc possible, comme pour ARGOS, d'acquérir une station de réception directe.

VII.6.3.2.4 Possibilités et limites du système METEOSAT en hydrologie

La première nécessité est bien sûr d'être dans la zone de visibilité du satellite. A partir de là, le système METEOSAT ne présente que des avantages techniques par rapport à ARGOS : message plus long, horaires d'émissions fixes, possibilité d'alerte à tout instant, etc. Malheureusement, tout se paie et d'une façon générale, METEOSAT est plus coûteux en investissement (20 000 F l'émetteur METEOSAT au lieu de 10 000 F pour ARGOS en 1980) et aussi en fonctionnement.

Actuellement, ce système ne paraît devoir être réservé qu'au cas où une télétransmission en temps réel est nécessaire (différé de quelques heures intolérable).

VIII.6.4 - Éléments de conclusion

La gestion d'un réseau de base de mesure hydrologique est grandement améliorée par l'utilisation d'un système de télétransmission. Il permet d'optimiser les visites sur le terrain et de réduire les lacunes d'observations. Pour cette utilisation, ARGOS et le réseau commuté sont parfaitement adaptés.

Pour des stations de projets où une télétransmission en temps réel est nécessaire, on pourra utiliser le téléphone, la radio au sol ou le système METEOSAT. Le téléphone n'est pas sûr en période catastrophique, la radio au sol l'est un peu plus, METEOSAT est le plus fiable mais coûteux.

VIII.- STATISTIQUES APPLIQUEES A L'HYDROLOGIE

Compte tenu de la grande variabilité de formation des lecteurs, il paraît utile de rappeler quelques résultats élémentaires de statistiques.

Leur présentation dans le style "*parachutage de recette de cuisine*" était imposé par la nature même d'un cours d'hydrologie qui n'est pas un cours de statistique. Je m'en excuse par avance auprès de ceux que cette présentation pourrait choquer.

VIII.1. - RAPPELS ET GENERALITES

VIII.1.1. - Répartition, échantillon et variable aléatoire

On appelle population un ensemble fini ou infini d'événements. Un échantillon est un sous-ensemble de la population. La taille de l'échantillon est le nombre d'événements qui le constituent. On dira qu'un échantillon est exhaustif lorsque sa taille est celle de la population.

En hydrologie de surface, les populations sont généralement infinies et par conséquent, les échantillons sont non exhaustifs.

On appelle variable aléatoire (ou variate), le caractère numérique (ou non) qui distingue chaque événement de l'échantillon ou de la population.

Dans l'utilisation que nous ferons des statistiques, nous aurons toujours affaire à des variates numériques discrètes ou continues. Elles seront discrètes si les valeurs numériques qu'elles peuvent prendre sont en nombre fini (par exemple nombre de jours de gel par an) ou en infinité dénombrable (nombre de crue par an). On dira qu'une variate est continue si ces valeurs numériques peuvent varier de façon continue (pluie journalière, débit, *etc.*). Ceci est le cas le plus fréquent, bien que l'on puisse remarquer que la précision des mesures limite la continuité de variation des valeurs numériques mesurées. Plus concrètement, si on mesure les pluies journalières au 1/10ème de millimètre, les pluies varieront de façon discrète avec un pas minimum de 1/10ème de millimètre.

Par ailleurs, les valeurs numériques x que peut prendre la variate X sont comprises entre deux bornes x_a et x_b finies ou infinies : $-\infty \leq x_a \leq x_b \leq +\infty$. L'intervalle (x_a, x_b) est appelé intervalle de variation de la variable aléatoire X .

VIII.1.2. - Notions de probabilité

Supposons que l'on puisse dénombrer l'ensemble E de toutes les éventualités également possibles et soit N le nombre de ces éventualités. Si parmi l'ensemble E , il n'existe que n éventualités favorables à un événement e , on dira que la probabilité de voir arriver l'événement e est la suivante :

$$\text{Prob}(e/E) = \frac{n}{N}$$

Malheureusement pour nous, il est bien souvent impossible de dénombrer l'ensemble E et nous devons nous contenter d'une approche expérimentale. En effet, soit une série d'expériences à partir de laquelle on observe un intervalle E' (de taille N') d'éventualités. Parmi ces expériences on observe n' réalisations de l'événement e ; nous définirons alors la fréquence relative de l'événement e comme :

$$f = \frac{n'}{N'}$$

En général, on peut admettre que si la taille N' augmente, la fréquence relative f se stabilise et tend sur la probabilité $\text{Prob}(e/E)$:

$$\text{Prob}(e/E) = \lim_{N' \rightarrow \infty} \frac{n}{N'}$$

VIII.1.3. - Résultats fondamentaux

Dans ce qui suit, nous simplifierons l'écriture en remplaçant $P(e/E)$ par $P(e)$. La probabilité de réalisation de l'événement a parmi l'ensemble E , sachant que l'événement b est déjà réalisé, est notée :

$P(a/b)$

* Si la réalisation de b exclut celle de a , on a : $P(a/b) = 0$.

* Si la réalisation de b entraîne nécessairement celle de a : $P(a/b) = 1$.

* Si on note $(a+b)$ l'événement consistant en la réalisation de a ou de b , et (a,b) la réalisation de a et de b , nous aurons les relations suivantes :

$$P(a+b) = P(a) + P(b) - P(a,b)$$
$$P(a,b) = P(a) \cdot P(b/a) = P(b) \cdot P(a/b)$$

VIII.2. LA LOI DE PROBABILITE

VIII.2.1. - Notion de loi de probabilité

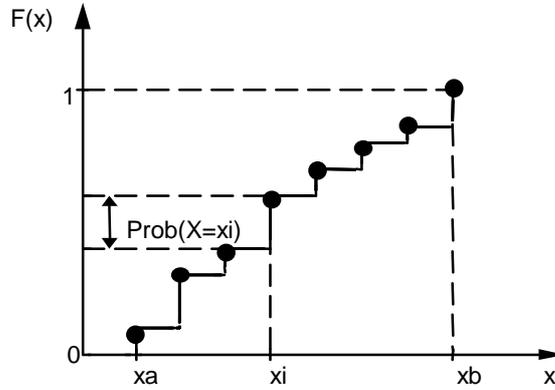
Si la variable aléatoire X est une variable numérique, on peut considérer comme événement favorable, le fait que X soit inférieur ou égal à une valeur x de E . La probabilité de voir arriver cet événement est une fonction numérique de x , comprise entre 0 et 1 et que l'on appelle fonction de répartition $F(x)$:

$$F(x) = \text{Prob}(X \leq x) = \text{Prob}(e/E)$$

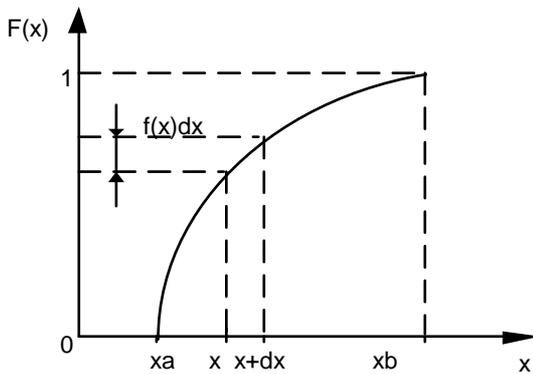
Cette loi de probabilité doit être monotone, non décroissante, et varier de 0 à 1 lorsque x décrit de x_a à x_b l'intervalle de définition de la variate X .

VIII.2.1.1 - Cas des variates discrètes

Dans ce cas, la fonction de répartition varie par plateaux dont la distance représente la probabilité P_i de voir $X = x_i$.



VIII.2.1.2 - Cas des variates continues



La fonction de répartition $F(x)$ est alors une fonction continue. Dans le cas général où cette fonction est dérivable, on appellera la dérivée $f(x)$ de $F(x)$ par rapport à x , densité de probabilité.

On a alors les relations suivantes :

$$F(x_i) = \int_{x_a}^{x_i} f(x) dx$$

$$F(x_{i+1}) = \int_{x_a}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

$$\text{Prob}(x_i \leq X \leq x_{i+1}) = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

$$F(x_i \leq X \leq x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

Dans le cas de variables continues, il est ainsi impossible d'associer une probabilité non nulle à l'apparition d'une valeur particulière de X

VIII.2.2. - Construction d'une loi de probabilité

Une loi de probabilité se définit d'une part par sa formulation mathématique, ce qui distingue les différents types de lois, et d'autre part, par les valeurs des paramètres qui entrent dans la formulation mathématique et qui sont estimés d'après l'échantillon observé.

En hydrologie, nous nous limiterons à l'emploi de cinq à six types de lois unimodales ou amodales, chacune de ces lois ne dépendant que de trois paramètres au plus. Ces paramètres peuvent être les suivants :

VIII.2.2.1 - Des paramètres de forme

Comme on le verra plus loin, ces paramètres peuvent caractériser l'aplatissement, l'asymétrie, etc. de la loi de distribution. Selon le type de loi, on peut avoir 0 (loi de Gauss), 1 (lois exponentielles généralisées) ou 2 (loi bêta incomplète) paramètres de formes.

VIII.2.2.2 - Des paramètres d'échelle s

Ce paramètre caractérise les variations de la variable X . Selon les cas, on pourra introduire comme paramètre d'échelle, chacun des paramètres de dispersion.

VIII.2.2.3 - Des paramètres de position x_0

Il situe dans quelle zone s'effectuent les variations de X . On utilise bien souvent une des valeurs centrales de la population (moyenne, mode) ou une des bornes de l'intervalle de variation (x_a, x_b).

VIII.2.2.4 - Variable réduite

On ramène bien souvent l'écriture de la loi de probabilité $F(x)$ à l'écriture d'une loi plus simple $F(u)$, en remplaçant x par sa variable réduite u :

$$u = \frac{x - x_0}{s}$$

VIII.2.3. - Paramètres définis d'après cette loi

Nous allons supposer à présent que nous connaissons parfaitement la probabilité et l'intervalle de définition d'une variable X . A partir de cette distribution théorique, on définira les paramètres suivants :

VIII.2.3.1 - Paramètres de tendance centrale

• La moyenne m est définie par l'expression suivante :

$$m = \int_{x_a}^{x_b} x f(x) dx$$

• Le mode m_0 est la valeur de x qui est la plus fréquente (variable discrète) ou qui a la plus forte densité de probabilité. Nous avons dit plus haut que nous n'emploierons que des lois unimodales ou amodales. Dans ces conditions, la densité de probabilité sur l'intervalle x_a et x_b ne doit présenter qu'un seul maximum :

$$f'(m_0) = 0 \quad x_a \leq m_0 \leq x_b$$

• La médiane m_e est la valeur qui divise la population en deux sous-populations équiprobables :

$$\int_{x_a}^{m_e} f(x) dx = \int_{m_e}^{x_b} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

Dans les lois que nous utiliserons, ces trois paramètres se rencontrent dans l'ordre croissant (ou décroissant) suivant :

$$x_a \leq \text{mode} \leq \text{médiane} \leq \text{moyenne} \leq x_b$$

$$x_a \leq \text{moyenne} \leq \text{médiane} \leq \text{mode} \leq x_b$$

• On utilisera parfois les notions de moyennes harmonique et géométrique.

La moyenne harmonique est définie ainsi :

$$m_h = \int_{x_a}^{x_b} \frac{1}{x} f(x) dx$$

Elle peut être considérée comme le moment d'ordre -1 et elle n'a de sens que si $x_a \geq 0$ ou $x_b \leq 0$ et si $f(0) = 0$.

La moyenne géométrique a pour expression :

$$L_n(m_g) = \int_{x_a}^{x_b} \ln(x) f(x) dx$$

Cette définition n'a de sens que si $x_a > 0$.

VIII.2.3.2 - Moments

On définit le moment d'ordre k , m_k , par la relation :

$$M_k(m_g) = \int_{x_a}^{x_b} x^k \ln(x) f(x) dx$$

Cette définition des moments est bien souvent gênante et on préfère utiliser la notion de moment centré d'ordre k , μ_k :

$$\mu_k = \int_{x_a}^{x_b} (x - \bar{x})^k f(x) dx$$

Dans cette expression, \bar{x} représente la moyenne définie plus haut.

On peut dès à présent noter les résultats suivants concernant les premiers moments :

• Le moment d'ordre 1 n'est autre que la moyenne :

$$m_1 = \int_{x_a}^{x_b} x f(x) dx = m$$

- Le moment centré d'ordre 1 est nul :

$$\mu_1 = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = \int_{x_a}^{x_b} x f(x) dx - \int_{x_a}^{x_b} m_1 f(x) dx$$

$$\int_{x_a}^{x_b} x f(x) dx = m_1 ; \int_{x_a}^{x_b} m_1 f(x) dx = m_1 \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx ; \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = 1 \Rightarrow \mu_1 = 0$$

- Le moment centré d'ordre 2 est appelé la variance :

$$\mu_2 = \int_{x_a}^{x_b} x^2 f(x) dx = m_2 - m_1^2$$

On définit l'écart-type σ comme : $\sigma = \sqrt{\mu_2}$.

- Les premiers moments centrés sont liés aux moments non centrés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} m_2 &= m_2 - m_1^2 & m_2 &= \mu_2 + m_1^2 \\ m_3 &= m_3 - 3 m_1 m_2 + 2 m_1^3 & m_3 &= \mu_3 + 3 m_1 \mu_2 + m_1^3 \\ m_4 &= m_4 - 4 m_1 m_3 + 6 m_1^2 m_2 - 3 m_1^4 & m_4 &= \mu_4 + 4 m_1 \mu_3 + 6 m_1^2 \mu_2 + m_1^4 \end{aligned}$$

- L'intervalle de variation I.V. :

Il se définit à partir des bornes x_a et x_b : I.V. = $x_b - x_a$

Bien souvent, ce paramètre n'a guère de sens (bornes infinies, valeurs proches des bornes extrêmement rares, etc.) et on lui préfère un des paramètres suivants :

- L'intervalle inter-quantiles :

C'est l'intervalle entre deux valeurs particulières de X telles que le pourcentage de valeurs inférieures à la plus petite soit égal au pourcentage de valeurs supérieures à la plus grande.

On travaille souvent par exemple à partir des quantiles Q_1 et Q_2 définis comme suit :

$$\int_{x_a}^{Q_1} f(x) dx = \int_{Q_2}^{x_b} f(x) dx = 0,25$$

L'intervalle inter-quantiles ($Q_2 - Q_1$) contient 50 % de la population. On peut définir également les 4 quintiles, les 9 déciles, etc.

- Ecart absolu moyen e_a :

C'est la moyenne des valeurs absolues des déviations ($x - \bar{x}$) :

$$e_a = \int_{x_a}^{x_b} |x - \bar{x}| f(x) dx$$

- Variance μ_2 et écart-type σ :

Ces paramètres déjà définis, sont les plus usités :

$$\mu_a = \int_{x_a}^{x_b} (x - \bar{x})^2 f(x) dx = \sigma^2$$

- Coefficient de variation CV :

Ce paramètre, très usité, se définit comme suit à partir de la moyenne m_1 et de l'écart-type s :

$$CV = \frac{s}{m_1}$$

VIII.2.3.3 - Paramètres caractéristiques de la forme

Parmi les très nombreux paramètres de formes, nous n'utiliserons que les coefficients β_1 et β_2 de Pearson.

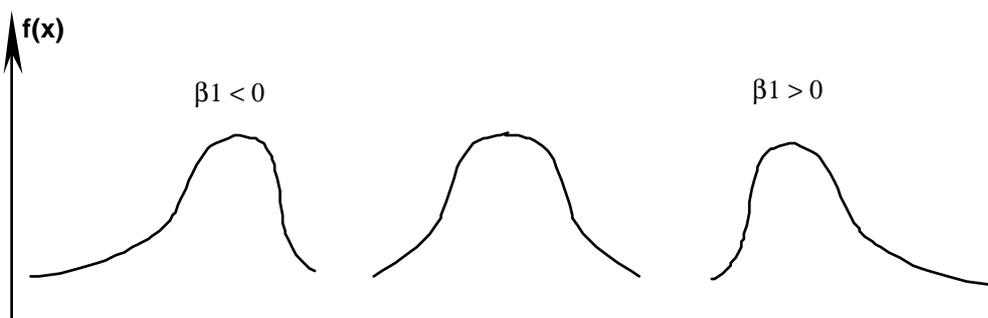
• Mesure de la dissymétrie :

Pearson propose d'utiliser le coefficient β_1 non borné :
$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

* Si β_1 est positif, la distribution est étalée sur la droite ; on observe la succession mode-médiane-moyenne et la dissymétrie est dite positive.

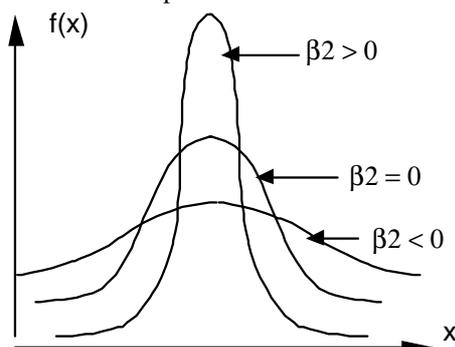
* Si β_1 est négatif, la distribution est étalée sur la gauche ; on observe la succession moyenne-médiane-mode et la dissymétrie est dite négative.

* Si β_1 est nul, la dissymétrie n'est pas forcément symétrique (mais si la distribution est symétrique, on a $\beta_1 = 0$).



Sens de la dissymétrie.

• Mesure de l'aplatissement :



Pearson propose d'utiliser le coefficient β_2 , borné inférieurement par la valeur -2, telle que :

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3.$$

* Si β_2 est négatif, la distribution est plus aplatie que la distribution normale ; la distribution est dite platicurtique.

* Si β_2 est positif, la distribution est moins aplatie que la distribution normale ; la distribution est dite leptocurtique.

* Si $\beta_2 = 0$, l'aplatissement est le même que pour la loi normale et la courbe est dite mésocurtique.

VIII.3. - DETERMINATION DES PARAMETRES D'APRES UN ECHANTILLON

Nous ne connaissons jamais en hydrologie, la population totale mais nous ne disposons que d'échantillons non exhaustifs tirés dans cette population. A partir de cet échantillon, nous nous proposons de choisir la forme mathématique de la loi de probabilité (problème de bonne **adéquation**) et d'en calculer le mieux possible les paramètres numériques de cette loi (problème d'**ajustement**).

VIII.3.1. - Qualité des estimations

Supposons que l'on cherche à déterminer un paramètre λ de valeur inconnue. On dispose pour cela d'un échantillon de n valeurs tirées dans la population des X : (x_1, x_2, \dots, x_n) .

λ est estimé par la fonction des différents éléments de l'échantillon :

$$l = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

La fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est l'**estimateur** et la valeur l prise par cette fonction pour un échantillon donné est l'**estimation**

Si on multiplie le tirage d'échantillon de taille n , on obtiendra une série de réalisations l qui peuvent être considérées comme des valeurs d'une variable aléatoire L .

On dira que l'estimation $l = f(x_1, \dots, x_n)$ est une estimation **consistante (ou correcte)** de λ si la variable aléatoire L vérifie les conditions suivantes lorsque n croît indéfiniment :

$$\left. \begin{array}{l} E(L) = \lambda \\ \text{VAR}(L) = 0 \end{array} \right\} \text{ si } n \rightarrow \infty \left[\begin{array}{l} - \text{ la valeur limite de l'espérance mathématique de } L \text{ est } \lambda \\ - \text{ la valeur limite de la variance de } L \text{ est nulle.} \end{array} \right.$$

L'estimation sera **absolument correcte (ou sans biais)** si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} E(L) = \lambda \forall n \\ \text{VAR}(L) = 0 \text{ si } n \rightarrow \infty \end{array} \right\}$$

Il peut exister plusieurs estimations absolument correctes ; parmi elles, celle qui prend le mieux en compte l'échantillon et qui donne la variance minimale (pour n donnée) des L est dite "**estimation efficace**" (ou exhaustive).

VIII.3.2. - Tests d'ajustement

Comme nous l'avons déjà dit, nous ne connaissons qu'un échantillon de la population à étudier. D'après cet échantillon, nous choisirons la formulation mathématique de la loi de probabilité et nous calculerons les paramètres numériques de cette loi. On peut alors se demander quelle est la probabilité pour que la loi retenue représente effectivement la population mère dont l'échantillon est *a priori* représentatif.

En testant cette hypothèse, on court deux risques :

- un risque de première espèce qui consiste à rejeter à tort l'hypothèse alors qu'elle est vraie. La probabilité de ce risque est appelée niveau de signification à α %. Elle est définie par la valeur numérique du test, α étant toujours exprimé en probabilité au dépassement de cette valeur numérique ;

- un risque de deuxième espèce qui est d'accepter à tort l'hypothèse alors qu'elle est fautive. La probabilité de ce risque étant β , on appelle puissance du test la valeur $(1 - \beta)$.

VIII.3.2.1 - Test du χ^2 de Pearson

Parmi tous les tests existants, le test du χ^2 de K. PEARSON est le plus pratique et le plus utilisé bien qu'il ne soit pas très puissant.

Pour mettre en oeuvre ce test, on procède de la façon suivante :

- on découpe l'échantillon de n éléments, en K classes ($K > 4$) de façon à ce que chaque classe contienne théoriquement plus de 5 éléments ;

- soit n_i le nombre d'éléments contenus dans la $i^{\text{ème}}$ classe et $n'_i (> 5)$ le nombre théorique qui devrait s'y trouver ; on forme le terme suivant :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$$

Cette variable χ^2 suit une loi de probabilité dite loi du χ^2 , à v degrés de liberté avec :

$$v = K - p - 1$$

K = nombre de classes ;

p = nombre de paramètres estimés d'après l'échantillon.

Les tables données en annexes permettent de connaître la valeur numérique du χ^2 qui a $\alpha\%$ de chance d'être dépassé par le seul fait du hasard, en fonction des valeurs de v.

Si par exemple on ajuste à une loi de Gauss (1 paramètre de tendance centrale, un paramètre de dispersion) un échantillon découpé en 5 classes et que le χ^2_c calculé est égal à 3,7, est-ce que cette loi peut caractériser la population totale ?

Nous avons : $v = 5 - 2 - 1 = 2$.

Si nous nous fixons un seuil α de 5 %, nous trouvons dans les tables qu'il y a moins de 5 % de chance d'obtenir par hasard un χ^2 supérieur à 5,99. C'est-à-dire que même si la concordance était parfaite, il y aurait 5 % de chance que le χ^2 dépasse 5,99. Il n'y a donc pas lieu de remettre en cause cet ajustement.

VIII.3.2.2 - Test W_n^2 d'Anderson

Ce test, un peu plus fastidieux à mettre en oeuvre (tout au moins manuellement), est plus efficace que le test du χ^2 . Analogue dans son esprit, il favorise les valeurs extrêmes et considère individuellement chaque élément de l'échantillon.

Soit un échantillon de taille n où x_i est la $i^{\text{ème}}$ valeur dans l'échantillon classé par ordre croissant ; on peut estimer pour chaque x_i , sa fréquence théorique au non-dépassement $F(x_i)$ à partir de l'ajustement que l'on désire tester. On construit alors ainsi W_n^2 :

$$W_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((2i - 1) \text{Ln}[F(x_i)] + (2n - 2i + 1) \text{Ln}[F(x_i)])$$

La variable u définie comme suit à partir de W_n^2 permet de caractériser la qualité de l'ajustement :

$$u = \frac{\text{Ln}[W_n^2 - 0,18/n^{1/4}] + 0,8 + 1/\sqrt{n}}{0,65} \quad (n \geq 10)$$

L'ajustement est d'autant satisfaisant que u est faible et on pourra utiliser les seuils de rejets suivants :

Seuil	20 %	10 %	5 %	1 %
u_{seuil}	0,84	1,28	1,64	2,32

VIII.3.2.3 - Autres tests

D'autres tests sont susceptibles d'être utilisés en particulier le test des suites et le test de Kolmogorov. Leur emploi est moins fréquent en hydrologie et nous renvoyons pour leur description aux ouvrages classiques de statistiques.

Il faut également citer la publication d'un test par M. BRUNET-MORET dans les cahiers ORSTOM en 1978. Ce test paraît séduisant car construit pour des données hydrologiques, mais les applications en sont encore peu répandues.

VIII.3.3. - Moments déduits d'un échantillon de taille connue

On utilisera les estimations suivantes :

- de la moyenne m_1 par : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

- des moments d'ordre r par : $m'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r$

ou les estimations absolument correctes (moments centrés):

- d'ordre 2 (variance) μ_2 par : $V = \frac{1}{(n-1)} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \right]$

- d'ordre 3 par : $\mu_3 = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \left[n \sum_{i=1}^n x_i^3 - 3 \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^3 \right]$

VIII.3.4 - Méthodes d'ajustement

Le problème consiste à déterminer les paramètres d'une loi (dont la formulation a déjà été choisie) en fonction de l'échantillon observé.

VIII.3.3.1 - Méthode des moments

Cette méthode consiste à estimer d'après l'échantillon autant de moments que la loi a de paramètres et à évaluer ces estimations aux valeurs théoriques qui ne sont fonctions que des paramètres à estimer. On obtient alors un système de n équations à n inconnues.

Les estimations ainsi obtenues sont généralement consistantes mais non efficaces.

VIII.3.3.2 - Méthode du maximum de vraisemblance

Dans le cas d'une loi discontinue où on a observé un échantillon (x_1, x_2, \dots, x_n) , chaque valeur ayant une probabilité (P_1, P_2, \dots, P_n) , la probabilité P de voir apparaître cet échantillon est :

$$P = P_1 * P_2 * \dots * P_n$$

Dans le cas de lois continues, P_1, P_2, \dots, P_n sont infiniment petits. On admet alors que la vraisemblance de l'échantillon est égale au produit des densités de probabilité :

$$P = K f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n)$$

$$L = \frac{P}{K} \quad L = f(x_1, a, b, \dots, k) f(x_2, a, b, \dots, k) \dots f(x_n, a, b, \dots, k)$$

a, b, \dots, k sont les k paramètres de la loi.

On se propose de choisir ces paramètres de façon à ce que la vraisemblance de l'échantillon soit maximale. Pour cela, on écrit que la dérivée partielle de L par rapport aux k paramètres successifs est nulle :

$$\frac{\partial L}{\partial l} = 0 \quad \text{avec } l = a, b, \dots, k.$$

On obtient ainsi un système de k équations à k inconnues.

Il est bien souvent plus simple d'effectuer les transformations suivantes :

$$\text{Log } L = \sum_{i=1}^n \log f(x_i); \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{1}{f(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{f(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial k} = 0 \end{cases}$$

La méthode du maximum de vraisemblance donne des estimations correctes et efficaces et souvent absolument correctes.

Cependant, on se gardera d'utiliser cette méthode dans le cas où l'intervalle de variation de la variée correspond à des bornes finies pour lesquelles la densité de probabilité n'est pas nulle (dans ce cas, on peut rencontrer non pas un maximum mais un minimum de probabilités).

VIII.3.3.3 - Ajustement graphique

Cette méthode consiste à porter dans un graphique les valeurs x de l'échantillon en fonction de leur fréquence expérimentale, les axes de ce graphique étant gradués de façon à ce que les points soient alignés si le choix de la loi est correct.

Graphiquement, on fait passer une droite dans le nuage de points et on détermine ainsi deux paramètres. Des lois à trois paramètres pourront aussi être ajustées, le troisième paramètre servant à provoquer l'alignement mais par tâtonnements.

VIII.4. - STATISTIQUE DE RANG

VIII.4.1. - Probabilité des valeurs d'un échantillon observé

1) La loi de distribution de la population mère est connue (par son expression mathématique et les valeurs numériques des paramètres). On démontre alors que la loi de distribution des fréquences au non-dépassement F_i , associées aux valeurs de rang i , est une loi Béta incomplète de moyenne $F_i = \frac{i}{n+1}$. Cette formule est parfois employée pour calculer une fréquence expérimentale mais il serait alors plus judicieux d'utiliser non pas la valeur moyenne de F_i mais sa valeur médiane. Une valeur bien approchée de la médiane est donnée par la formule :

$$F_i = \frac{i - 0,3}{n + 0,4}$$

2) La loi de distribution est adaptée à l'échantillon. (On choisit *a priori* le type de formulation, mais un au moins des paramètres est déterminé à partir de l'échantillon.) On démontre dans ce cas, qu'une solution approchée est donnée par la formule :

$$F_i = \frac{i - \frac{1}{2}}{n}$$

En hydrologie, les observations des pluies-débits relèvent toujours de cette seconde hypothèse.

3) Cas mixte :

On a observé des crues durant 20 ans et on connaît les trois plus fortes crues enregistrées durant les 50 ans précédents. Comment voir si ces trois valeurs sont compatibles avec ce que l'on a pu constater sur les 20 dernières années ?

On choisit le type de loi et on ajuste les paramètres à partir de l'échantillon de 20 ans. On portera donc les valeurs des crues en fonction des fréquences calculées par $F_i = \frac{i - 0,5}{n}$.

On est ensuite ramené au cas 1 et on calculera pour les trois autres valeurs, les fréquences par :

$$F_i = \frac{i - 0,3}{n + 0,4}$$

VIII.4.2. - Danger d'apparition

VIII.4.2.1 - Période de retour

Par définition la probabilité est le rapport du nombre d'événement favorable au nombre total d'événement. Souvent à un événement est associé une durée (il y a par exemple une crue maximale annuelle chaque année). La fréquence peut alors se définir également comme étant le nombre d'événement favorable sur le nombre total de durées. On définit alors la période de retour T (au temps de récurrence) comme l'inverse de la fréquence au non-dépassement F (ou de la fréquence au dépassement F_1 si F_1 est inférieur à 0,5).

$$T = \frac{1}{F_1} \quad (\text{si } F_1 < 0,5)$$
$$F = 1 - F_1$$
$$T = \frac{1}{F} \quad (\text{si } F < 0,5)$$

Les fréquences ont pour unité $(T)^{-1}$, puisque l'on associe généralement une durée à chaque événement. La période de retour a donc la dimension d'un temps.

Exemple :

Si on a établi la statistique des crues maximales annuelles (un débit par an), la crue de fréquence au non-dépassement 0,9 a une période de retour de :

$$T = \frac{1}{1 - 0,9} = 10 \text{ ans}$$

En moyenne, cette crue est dépassée une fois tous les dix ans.

Cependant, la crue de fréquence au non-dépassement 0,1 a, elle aussi, une période de retour de 10 ans, mais on dira que cette crue est non-dépassée en moyenne une fois tous les dix ans.

VIII.4.2.2 - Fréquence d'apparition d'une valeur connue "a priori"

Quelle est la probabilité P de rencontrer au moins une fois, une valeur supérieure au quantile x_F sur n observations ?

Soit P_1 la probabilité de ne jamais rencontrer $x > x_F$ sur ces n observations ; on a alors : $P_1 + P = 1$.

Pour ne jamais rencontrer $x > x_F$, on doit avoir $x < x_F$ à la première observation, $x < x_F$ à la seconde... Or, chaque hypothèse est vérifiée avec une probabilité F (F : fréquence au non-dépassement) ; donc :

$$P_1 = (F)^n \quad \text{d'où} \quad P = 1 - (F)^n$$

VIII.4.2.3 - Problème inverse

Bien souvent, le problème inverse se pose à l'hydrologue et connaissant la probabilité P, on cherche la valeur x_F qui a la probabilité P d'être atteinte au moins une fois en n années.

On désire protéger un chantier qui doit durer n années. Quel débit de crue doit-on pouvoir évacuer dans le canal latéral pour qu'il n'y ait qu'une probabilité P pour que le chantier soit noyé ?

$$P = 1 - (F)^n \quad \text{soit} \quad F = (1 - P)^{1/n}$$

Le canal doit pouvoir évacuer la crue de fréquence au non-dépassement F.

VIII.5. - DIFFERENTS TYPES DE LOIS UTILISES EN HYDROLOGIE

Nous nous contenterons de signaler les lois les plus fréquemment utilisées. Ces lois n'ont que trois paramètres au plus, et bien souvent, que deux.

VIII.5.1. - Loi de Gauss ou loi normale

VIII.5.1.1 - Fonction de répartition

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-u^2/2} du \quad \text{avec} \quad u = \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}$$

u est appelée variable réduite de Gauss. L'intervalle de définition est donc : $x \in]-\infty, +\infty[$

Cette loi est symétrique ($\beta_1 = 0$) et présente, par définition, l'aplatissement moyen ($\beta_2 = 0$).

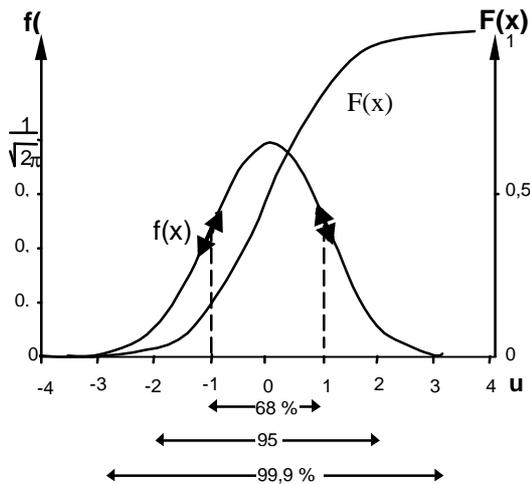
Le tableau ci-dessous donne la fréquence au non-dépassement de u :

$$F(u) = \text{Prob}(U \leq u)$$

u	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0.6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8483	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9013
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9662	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2.1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2.2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2.3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2.4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2.5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2.6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2.7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2.8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2.9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3.1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3.2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3.3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3.4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

La table correspond aux valeurs de u positive, si u est négatif, la probabilité au non-dépassement est le complément à 1 de $F(|u|)$.

Le paramètre de tendance centrale \bar{x} et à la fois la moyenne, le mode et la médiane. Le paramètre de dispersion σ_x est l'écart-type (racine carrée de la variance).



Le paramètre de tendance centrale \bar{x} et à la fois la moyenne, le mode et la médiane. Le paramètre de dispersion σ_x est l'écart-type (racine carrée de la variance).

La densité de probabilité a pour expression :

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

La dérivée première s'annule pour $u = 0$ (valeur modale) et la dérivée seconde pour $u \pm 1$.

La fonction de densité est représentée par la courbe "en cloche" symétrique par rapport au mode $u = 0$ et avec des points d'inflexion pour $u \pm 1$.

VIII.5.1.2 - Estimation des paramètres

a) Méthode des moments :

On obtient immédiatement les estimations suivantes :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ et } \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$$

b) Méthode du maximum de vraisemblance :

Cette méthode conduit à une autre estimation de l'écart-type :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Elle est consistante mais moins correcte que la précédente que l'on préférera donc.

c) Ajustement graphique :

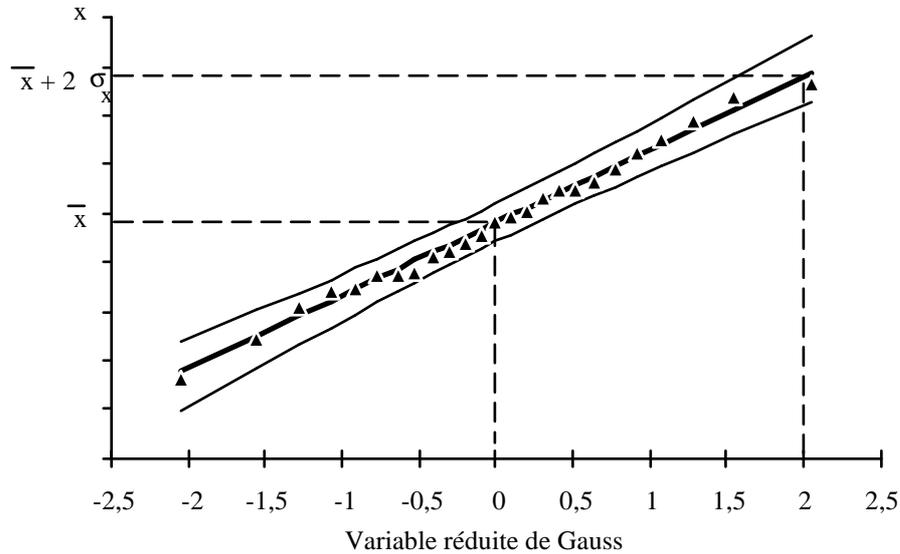
A chaque élément de l'échantillon, on associe une fréquence expérimentale au non-dépassement :

$$F(x_i) = \frac{i - 0,5}{n}$$

A chaque valeur de $F(x_i)$ correspond une valeur de u . Pour chaque élément de l'échantillon, on peut porter dans un graphique gradué en abscisse selon les valeurs de u et en ordonnée selon la variable x , un point de coordonnées $(\frac{i-0,5}{n}, x_i)$.

Si les valeurs de x_i sont distribuées normalement, les points s'alignent sur une droite d'équation : $x_i = \bar{x} + u_i \sigma_x$, appelée droite de Henry.

D'après cette droite, on détermine la moyenne \bar{x} puisque pour $u = 0$, on a $x = \bar{x}$, et l'écart-type en faisant par exemple $u = 2$, donc $x = \bar{x} + 2\sigma_x$.



Ajustement graphique à une loi de Gauss.

Pour ce faire, on peut utiliser les tables de la fonction de Gauss ou approcher la fonction de Gauss par la formule polynomiale suivante :

• Pour $F \leq 0,5$:

$$-u = x - \frac{2.515517 + .802853 x^1 + 0.010328 x^2}{1 + 1.432788 x^1 + 0.189269 x^2 + 0.001308 x^3} \quad \text{avec} \quad x = \sqrt{\text{Ln} \frac{1}{F^2}}$$

Cette approximation permet une programmation facile et provoque des erreurs sur W toujours inférieures à 0.00045 !

• Pour $F > 0,5$:

On fera $F = 1 - F$ et $u = -u$

Parfois, on est amené au contraire à calculer F pour u donnée.

On pourra utiliser la formule suivante pour le calcul automatique :

- Pour $u \geq 0$:

$$F(u) = 1 - \frac{0,5}{(1 + 0,196854x^1 + 0,115194x^2 + 0,000344x^3 + 0,019527x^4)^4}$$

L'erreur sur F est toujours inférieure à $2,5 \cdot 10^{-4}$.

- Pour $u < 0$ on fera $u = -u$ et $F = 1 - F$

VIII.5.1.3 - Erreurs-types sur les estimations

a) Estimation de la moyenne :

Soit x_m la moyenne de la population mère et \bar{x} et σ_x la moyenne et l'écart-type estimés d'après un échantillon de taille n , la valeur t définie par...

$$t = \frac{x_m - \bar{x}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \quad (v = n - 1)$$

... suit une loi de Student à v degré de liberté. Cette loi symétrique est plus "pointue" que la loi de Gauss. Dès que n atteint 30, on peut confondre la loi de Student et la loi de Gauss.

b) Estimation de l'écart-type :

Soit V la variance de la population-mère et σ^2 la variance estimée d'après un échantillon de taille n , la valeur χ^2 ...

$$\chi^2 = \frac{nV}{\sigma^2}$$

... suit une loi du χ^2 à $v = n - 1$ degré de liberté. Dès que n atteint 50, on peut admettre que la valeur...

$$t = \frac{V - \sigma^2}{\frac{\sigma^2}{2n}}$$

... suit une loi de Gauss centrée réduite.

c) Estimation d'un quantile :

Dans le cas où l'échantillon est grand ($n > 30$), on peut admettre en première approximation que la moyenne \bar{x} et l'écart-type σ_x sont distribués normalement avec des variances $\frac{\sigma^2}{n}$ et $\frac{\sigma^2}{2n}$.

Le quantile x_F est estimé par l'expression :

$$\hat{x}_F = \bar{x} + u_F \sigma_x$$

On admet alors que si x_F est le véritable quantile et \hat{x}_F son estimation à partir d'un échantillon de taille n , \hat{x}_F suit une loi de Gauss de moyenne x_F et d'écart-type σ_{x_F} avec :

$$\sigma_{x_F} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2n}} \sqrt{u_F^2 + 2}$$

On admet que la variance sur \hat{x}_F est égale à la somme de la variance sur \bar{x} et de la variance sur $u_F \sigma_x$.

$$\text{Var}(\hat{x}_F) = \text{Var}(\bar{x}) + \text{Var}(u_F \sigma_x) = \text{Var}(\bar{x}) + u_F^2 \text{Var}(\sigma_x) = \frac{\sigma^2}{n} + u_F^2 \frac{\sigma^2}{2n}$$

$$\text{Var}(\hat{x}_F) = \frac{\sigma^2}{2n} (u_F^2 + 2)$$

$$\sigma_{x_F} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} \sqrt{u_F^2 + 2}$$

VIII.5.1.4 - Intervalles de confiance

On appelle intervalle de confiance à α % sur l'estimation \hat{p} d'un paramètre p , l'intervalle limité par deux bornes p_1 et p_2 telles que l'on ait $\alpha/2$ % de chance d'avoir $p < p_1$ ou $p > p_2$ du seul fait des erreurs d'échantillonnage. On a donc α % de chance pour que la véritable valeur p (du paramètre que l'on estime par \hat{p}) soit comprise entre p_1 et p_2 . Compte tenu des réflexions sur les distributions des estimations, on obtient :

Intervalle de confiance à α % sur la moyenne :

Les bornes de l'intervalle sont :

$$\bar{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- si $n < 30$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est la valeur du t de Student de fréquence au non-dépassement

$$F = 1 - \frac{1-\alpha}{2} \text{ pour } v = n - 1 ;$$

- si $n > 30$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ la variable réduite de Gauss de fréquence au non-dépassement

$$F = 1 - \frac{1-\alpha}{2} \text{ pour } v = n - 1.$$

Intervalle de confiance à α % sur l'écart-type :

- si $n < 50$, les bornes de l'intervalle de confiance à α % sont :

$$\frac{n\sigma_x^2}{\chi_1^2} < V < \frac{n\sigma_x^2}{\chi_2^2}$$

χ_1^2 : valeur ayant pour fréquence au non-dépassement $F = \frac{1-\alpha}{2}$.

χ_2^2 : valeur ayant pour fréquence au non-dépassement $F = 1 - \frac{1-\alpha}{2}$.

- si $n > 50$, les bornes sont :

$$\sigma_x \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{2n}}$$

avec $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$: variable réduite de Gauss de fréquence au non-dépassement :

$$F = 1 - \frac{1-\alpha}{2}$$

• Intervalle de confiance à α % sur le quantile x_F :

Les bornes de l'intervalle de confiance sont alors :

$$x_F \pm \frac{\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{t_F^2}{2}} \pm \frac{t_F t_\alpha^2}{2n}}{1 - \frac{t_\alpha^2}{2n}} \sigma$$

(2 fois plus pour la borne supérieure et 2 fois moins pour la borne inférieure)
 t_F : variable réduite de Gauss ayant la fréquence au non-dépassement F

t_α : variable réduite de Gauss ayant la fréquence au non-dépassement $1 - \frac{1 - \alpha}{2}$.

VIII.5.1.5 - Comparaison de deux échantillons

Il arrive fréquemment que l'on ait à comparer deux séries de mesures. Par exemple, une série de débits sur une vingtaine d'années, donne des résultats différents. On se pose le problème de savoir si cette différence est attribuable au seul fait du hasard (erreur d'échantillonnage) ou, au contraire, si le milieu s'est modifié, ce qui a changé le comportement hydrologique du bassin.

En appliquant les résultats concernant les lois de distribution des paramètres ajustés, on obtient les résultats suivants.

Supposons que l'on tire une population normalement distribuée de moyenne m et d'écart-type σ , deux échantillons de taille n_1 et n_2 à partir desquels on estime les moyennes \bar{x}_1 et \bar{x}_2 et les écarts-types σ_1 et σ_2 .

a) Comparaison des moyennes :

- si n_1 et $n_2 > 50$:

La différence $d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ est distribuée selon une loi de Gauss de moyenne \bar{d} nulle et d'écart-type σ_d :

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sigma_{x1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{x2}^2}{n_2}}$$

Par conséquent, si on trouve $|d| > u_F \sigma_d$, il n'y a qu'une probabilité $p = 2(1 - F)$ pour que cette différence d ne soit due qu'au hasard. [$|d| > 2 \sigma_d \Rightarrow$ moins de 5 % de chance que ce soit dû au hasard, donc au seuil de 5 %, on peut dire que cela n'est pas dû au hasard, donc l'hypothèse du tirage dans une même population est à rejeter ; les deux moyennes \bar{x}_1 et \bar{x}_2 sont significativement différentes au seuil de 5 %].

- Si n_1 et $n_2 < 50$:

On peut estimer à partir des deux échantillons, la variance $\hat{\sigma}^2$ de la population-mère par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)s_{x1}^2 + (n_2 - 1)s_{x2}^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

La variable $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ suit une loi de Student à : $v = n_1 + n_2 - 2$ degré de liberté.

On reprend alors le même raisonnement qu'au paragraphe précédent.

- Si on conclut que les deux échantillons sont tirés d'une même population-mère, on estimera la moyenne m par :

$$\hat{m} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

b) Comparaison des écarts-types :

- Si n_1 et $n_2 > 50$:

On estime que la différence d des variances ($d = \sigma_{x1}^2 - \sigma_{x2}^2$) est distribuée selon une loi de Gauss de moyenne $\bar{d} = 0$ et d'écart-type σ_d :

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{2 \sigma_{x1}^4}{n_1} + \frac{2 \sigma_{x2}^4}{n_2}}$$

Par conséquent, si on constate que $|\sigma_{x1}^2 - \sigma_{x2}^2| > 2 \sigma_d$, on dira qu'il y a moins de 5 % de chance pour qu'un tel écart soit dû uniquement au hasard, et par conséquent, les deux variances sont significativement différentes au seuil de 5 %.

Si les deux échantillons ne sont pas significativement différents, on estimera la variance $\hat{\sigma}^2$ de la population mère par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n_1 \sigma_{x1}^2 + n_2 \sigma_{x2}^2}{n_1 + n_2}$$

- Si n_1 et $n_2 < 50$:

La variable $F = \frac{\sigma_{x1}^2}{\sigma_{x2}^2}$ (si $\sigma_{x1}^2 > \sigma_{x2}^2$) est distribuée selon une loi de Fischer-Snedecor de $v_1 = n_1 - 1$ et $v_2 = n_2 - 1$ degrés de liberté.

En comparant comme précédemment la valeur réelle de F à celle correspondant à une certaine fréquence, on déterminera si les variances sont significativement différentes et à quel seuil.

La variance de la population $\hat{\sigma}^2$ pourra être estimée par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1) \sigma_{x1}^2 + (n_2 - 1) \sigma_{x2}^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

VIII.5.2. - Loi de Galton (ou log-normale ou de Gibrat-Gauss)

VIII.5.2.1 - Fonction de répartition

Parmi les nombreuses formulations possibles, nous retiendrons la suivante, qui fait le mieux le parallèle avec la loi de Gauss :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$u = a \log(x - x_0) + b$$

Intervalle de définition : $x \in] x_0, + \infty[$

On remarque que l'on passe de la loi de Gauss à la loi de Galton en faisant le changement de variable de x en $\log(x - x_0)$. Cette loi fait intervenir trois paramètres dont x_0 est le paramètre de position.

Une autre formulation qui fait mieux ressentir le rôle des paramètres est:

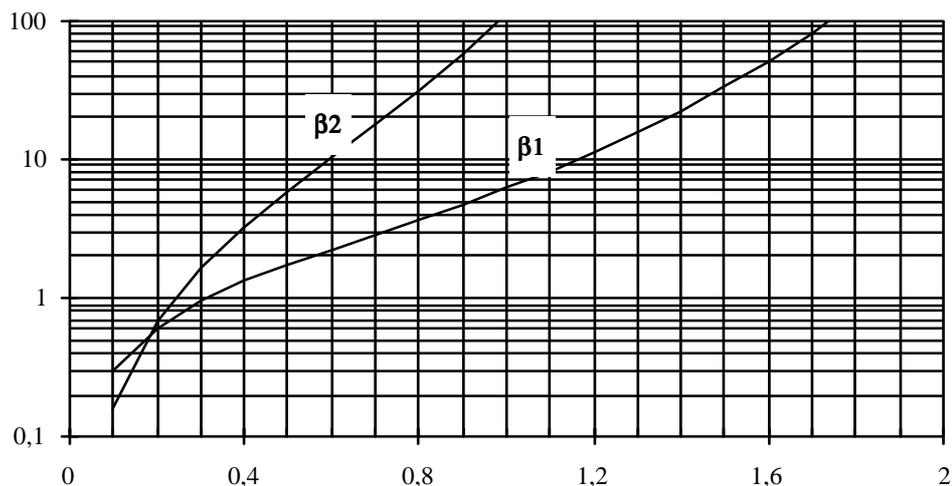
$$F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^u \frac{1}{u} e^{-\frac{\ln^2(u)}{2\sigma^2}} du$$

$$u = \frac{x - x_0}{s}$$

x_0 : paramètre de position (identique au précédent)

s : paramètre d'échelle positif différent de zéro

σ : paramètre de forme positif différent de zéro



Variations de β_1 et β_2 avec σ .

Le coefficient d'aplatissement β_2 est toujours positif ; la loi de Galton est plus "pointue" que la loi de Gauss.

Le coefficient d'asymétrie β_1 est toujours positif ; la loi de Galton est dissymétrique, étendue vers la droite.

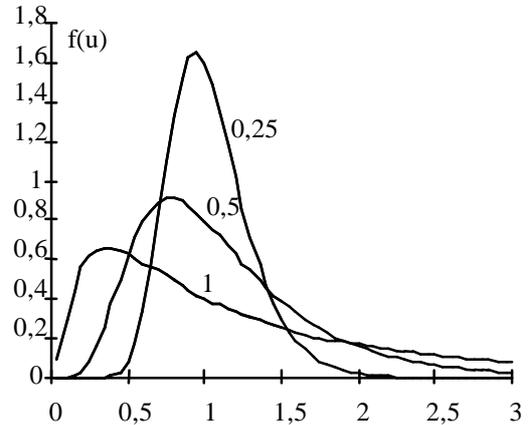
Ces deux coefficients ne dépendent que de σ comme le montre la figure ci-contre.

La fonction de densité est alors :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{u} \exp\left(-\frac{(\ln u)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Elle s'annule pour : $u = \frac{x-x_0}{s} e^{-\sigma^2}$, ce qui correspond au mode. Par ailleurs, la fonction de densité a deux points d'inflexion pour :

$$u = e^{-\frac{\sigma^2}{2}(3 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\sigma^2}})}$$



VIII.5.2.2 - Estimation des paramètres

a) Méthode des moments

En utilisant la première formulation, les trois paramètres à déterminer sont x_0 , a et b. En posant :

\bar{x} : moyenne des x,

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \text{écart-type des x,}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 \quad \text{moment centré d'ordre 3}$$

... on obtient trois équations à trois inconnues :

$$\frac{\sigma^4}{\mu_3} = \frac{(\bar{x} - x_0)^3}{\sigma^2 + 3(\bar{x} - x_0)^2} \quad (1)$$

$$a = \frac{1,517}{\sqrt{\log \left[1 + \frac{s^2}{(\bar{x} - x_0)^2} \right]}} \quad (2)$$

$$b = \frac{1,1513}{a} - a \log(\bar{x} - x_0) \quad (3)$$

L'équation (1) ne dépend que de x_0 et des valeurs prises dans l'échantillon. Malheureusement, il n'est pas possible d'expliciter x_0 et on devra résoudre l'équation (1) par approximations successives. Connaissant x_0 , on résout l'équation (2) qui donne a ; puis connaissant a et x_0 l'équation (3) qui donne b.

La méthode des moments présente le double inconvénient de nécessiter un calcul itératif et de donner parfois des valeurs de x_0 supérieures à la plus petite des valeurs rencontrées dans l'échantillon.

b) Méthode du maximum de vraisemblance

On obtient trois équations à trois inconnues x_0 , a et b :

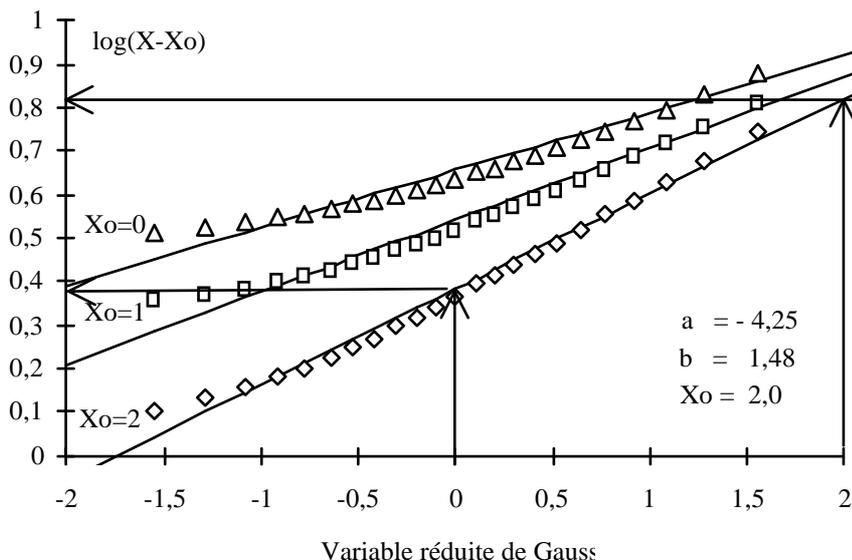
$$2.3026 \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - x_0} \right] \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log^2(x_i - x_0) - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \log(x_i - x_0) \right)^2 \right] = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \log(x_i - x_0) \right] \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - x_0} \right] - \sum_{i=1}^n \frac{\log(x_i - x_0)}{x_i - x_0} \quad (1)$$

$$a^2 = \frac{1}{\frac{1}{n} S \log^2(x - x_0) - \frac{1}{n^2} [S \log(x - x_0)]^2} \quad (2)$$

$$b = -\frac{a S \log(x - x_0)}{n} \quad (3)$$

Comme dans la méthode des moments, l'équation (1) ne dépend que de x_0 mais on doit la résoudre par approximations successives. Connaissant x_0 , la formule (2) permet d'évaluer a ; enfin, avec x_0 et a, on détermine b par la formule (3). Cette méthode est préférable lorsque l'on dispose de moyens de calcul.

c) Méthode graphique



Ajustement graphique à une loi de Galton.

On passe de la loi de Gauss à la loi de Galton par le changement de variable x en $\log(x - x_0)$. Par conséquent, si on connaît x_0 , on pourra tracer l'équivalent de la droite de Henry en portant $\log(x_i - x_0)$ en fonction de $F = \frac{i - 0,5}{n}$ sur un papier à probabilité graduée suivant les valeurs de la variable réduite de Gauss. Pour déterminer x_0 , on procédera par tâtonnements en se fixant différentes valeurs de x_0 jusqu'à obtenir l'alignement des points expérimentaux comme le montre la figure ci-dessous.

Pour déterminer a et b , on prendra deux points, par exemple :

$$u = 0 \Rightarrow a \log(x - x_0) + b = 0$$

$$u = -2 \Rightarrow a \log(x - x_0) + b = -2$$

VIII.5.2.3 - Intervalles de confiance

L'étude théorique de la distribution des erreurs sur l'estimation des trois paramètres n'a pas donné de résultats facilement exploitables.

La seule méthode utilisable pour déterminer un intervalle de confiance sur un quantile x_p est de faire une simulation.

On suppose que les trois paramètres calculés sont exacts et on tire au hasard dans la population-mère ainsi définie m échantillons de taille n . On obtient ainsi m estimations du quantile x_p . On admet, après avoir rangé ces m valeurs, que celles de rang $i = 10$ et de rang $m - 9$ représentent, avec une bonne approximation, les bornes de l'intervalle de confiance à $\frac{m - 19}{m}$.

Nombre de tirages à effectuer	38	76	190	1900
Intervalle de confiance à	50 %	75 %	90 %	99 %

Exemple :

Soit une série de 30 valeurs de débits qui ont permis de déterminer x_0 , a et b . Pour obtenir l'intervalle de confiance à 75 % sur le débit de fréquence 0,9, on procédera au tirage au hasard de 76 échantillons de taille 30 dans une population-mère (x_0 , a , b). Parmi les 76 estimations de $Q_{0,9}$, la 10^{ème} et la 67^{ème} représentent les bornes de l'intervalle de confiance à 75 % sur le quantile $Q_{0,9}$.

VIII.5.2.4 - Cas particulier fréquent et simple où x_0 n'est plus un paramètre à ajuster

Bien souvent, on peut se fixer *a priori*, la valeur de x_0 qui est une borne de l'intervalle de variation de x . Dans ce cas, on peut se ramener à la loi de Gauss en procédant au changement de variable : $X = \log(x - x_0)$.

La fonction de distribution est alors définie d'après les deux seuls paramètres à estimer par les relations suivantes :

$$X = \log(x - x_0) = \frac{\sum \log(x - x_0)}{n}$$

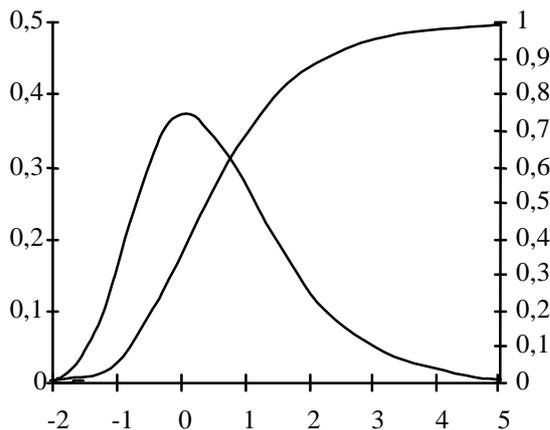
$$\sigma_X = \sigma_{\log(x - x_0)} = \sqrt{\frac{\sum \log(x - x_0)^2 - n \overline{\log(x - x_0)}^2}{n - 1}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \text{avec} \quad u = \frac{\log(x - x_0) - \overline{\log(x - x_0)}}{\sigma_{\log(x - x_0)}}$$

Tout ce qui a été dit sur la variable x distribuée selon une loi de Gauss devient valable pour la variable $\log(x - x_0)$. En particulier, ceci permet une évaluation rapide des intervalles de confiance et évite l'utilisation d'un calculateur. La simplification théorique due au choix arbitraire de x_0 explique que ce procédé soit le plus souvent adopté.

VIII.5.3. - Loi de Gumbel

VIII.5.3.1 - Fonction de distribution



Sous sa forme simple et généralement utilisée on a :

$$F(x) = e^{-e^{-u}}$$

$$\text{avec } u = \frac{x - x_0}{s}$$

Le terme u est la variable réduite de Gumbel. L'intervalle de variation de x est donc :

$$x \in] - \infty , + \infty [$$

- x_0 est le paramètre de position (mode)

- s est le paramètre d'échelle différent de zéro et positif.

Le coefficient d'asymétrie β_1 est constant et égal à 1,139 ; ce qui correspond à une dissymétrie étendue vers la droite.

Le coefficient d'aplatissement β_2 est constant et égal à 2,4 ; la loi de Gumbel est donc plus pointue que la loi de Gauss.

La densité de probabilité a pour expression :

$$f(u) = e^{-u} e^{-e^{-u}}$$

Elle a un maximum pour $u = 0$ et deux points d'inflexion pour $u = \text{Ln} \left[\frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{5}) \right]$.

On peut noter dès à présent le comportement asymptotique de la distribution de Gumbel : si F tend vers 1, en posant $T = \frac{1}{1 - F}$, la variable réduite de Gumbel u tend vers $\text{Ln } T$.

VIII.5.3.2 - Estimation des paramètres

a) Méthode des moments

La méthode des moments conduit à des estimations de calcul particulièrement simple et d'emploi très fréquent :

$$s = 0,78 \sigma_x$$

$$x_0 = \bar{x} - 0,577 s$$

$$\left[\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad \text{et} \quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n} \right]$$

b) Méthode du maximum de vraisemblance

On aboutit au système résolutif suivant :

$$s + \frac{\sum x e^{-x/s}}{\sum e^{-x/s}} = \bar{x}$$

$$x_0 = -s \text{Ln} \left[\frac{\sum e^{-x/s}}{n} \right]$$

La première équation est implicite en s ; elle ne peut donc se résoudre que par itération. Ayant déterminé s , la deuxième équation permet la détermination de x_0 .

La méthode du maximum de vraisemblance ne s'utilise que lorsque l'on dispose de moyens de calcul automatique.

c) Méthode graphique

Cette loi à deux paramètres se prête très facilement à des ajustements graphiques.

La variable réduite de Gumbel $u = \frac{x - x_0}{s}$ s'exprime très facilement en fonction de la fréquence puisque l'on a

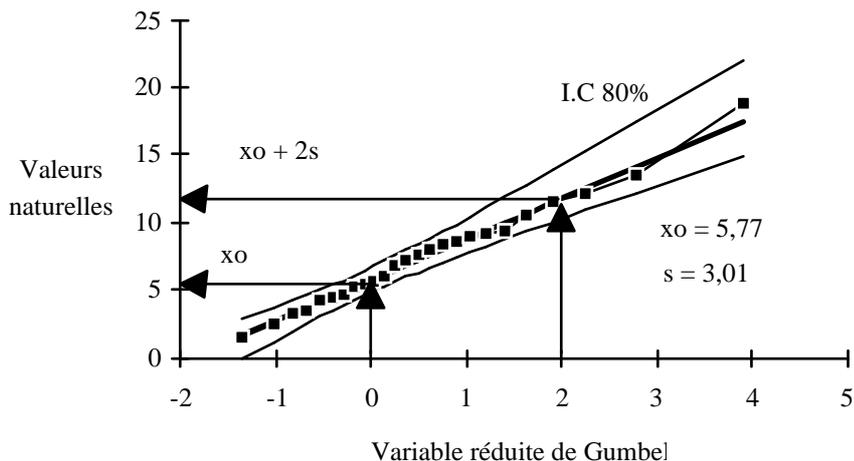
$$F(x) = e^{-e^{-u}} \quad \text{d'où} \quad u = -L n \left[L n \frac{1}{F} \right]$$

Ainsi, en portant arithmétiquement les valeurs de x en fonction de leur fréquence expérimentale au non-dépassement selon un axe gradué arithmétiquement en u, on doit obtenir une droite passant par exemple :

paru = 0 pour $x = x_0$
 et $u = \pm 1$ pour $x = x_0 \pm s$

...d'où la détermination immédiate de x_0 et s.

s représente la pente de cette droite ; aussi appelle-t-on souvent s le "gradex" (gradient exponentiel).



VIII.5.3.3 - Intervalle de confiance

BERNIER et VERON ont étudié les intervalles de confiance de la loi de Gumbel. L'intervalle de confiance à α % sur un quantile x_F s'exprime en fonction de l'écart-type σ_x par :

$$\hat{x}_F - h_1 \sigma_x \leq x_F < \hat{x}_F + h_2 \sigma_x$$

où h_1 et h_2 sont des paramètres dépendant de la taille n de l'échantillon de la fréquence F et de la valeur de α .

• h_1 et h_2 seront évalués par la formule suivante (avec le signe + pour h_2 et le signe - pour h_1) :

$$h_{1,2} = \frac{\frac{t\alpha}{n} \sqrt{1 + 1,13 t_F + 1,1 t_F^2} \pm \frac{t^2\alpha}{n} (1,1 t_F + 0,57)}{1 - 1,1 \frac{t^2\alpha}{n}}$$

• $t\alpha$ est la variable réduite de Gauss correspondant à la fréquence au non-dépassement $1 - \frac{1-\alpha}{2}$

• t_F est la variable réduite de Gumbel correspondant à la fréquence au non-dépassement F, ramenée à sa moyenne et à son écart-type :

$$t_F = \frac{-Ln(-Ln F) - 0,577}{1,28}$$

VIII.5.4 - Loi des extrêmes généralisée (GEV ou loi de Jenkinson)

La loi de Gumbel est très universellement utilisée pour caractériser la distribution de valeurs extrêmes. En fait elle n'est qu'un des types de lois utilisables. Jenkinson (1955) a montré que les lois de distribution des extrêmes pouvait se mettre sous une forme unique :

$$F(x) = e^{-\left[1 - \frac{k(x-x_0)}{s}\right]^{1/k}}$$

Trois paramètres interviennent : x_0 le paramètre de position, s le paramètre d'échelle et k le paramètre de forme. Sous cette formulation unique on retrouve en fait les trois types de distribution selon les valeurs prise par k :

- Si k est positif on retrouve une loi proposée par Weibull (GEV de type III) où x est défini sur l'intervalle $]-\infty, x_0[$. Cette borne supérieure de l'intervalle de définition se déduit des paramètres s , k et x_0 par la relation : $x_0' = \frac{s}{k} + x_0$. En fait ce type de distribution se rencontre rarement en hydrologie où l'on travaille le plus souvent sur des valeurs maximales (pluies ou crue extrêmes).

- Si k est égal à zéro on constate que $\left[1 - \frac{k(x-x_0)}{s}\right]^{-1/k} \rightarrow e^{-\frac{(x-x_0)}{s}}$. On retrouve donc la loi de Gumbel (GEV de type I) vue précédemment et x est défini sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$

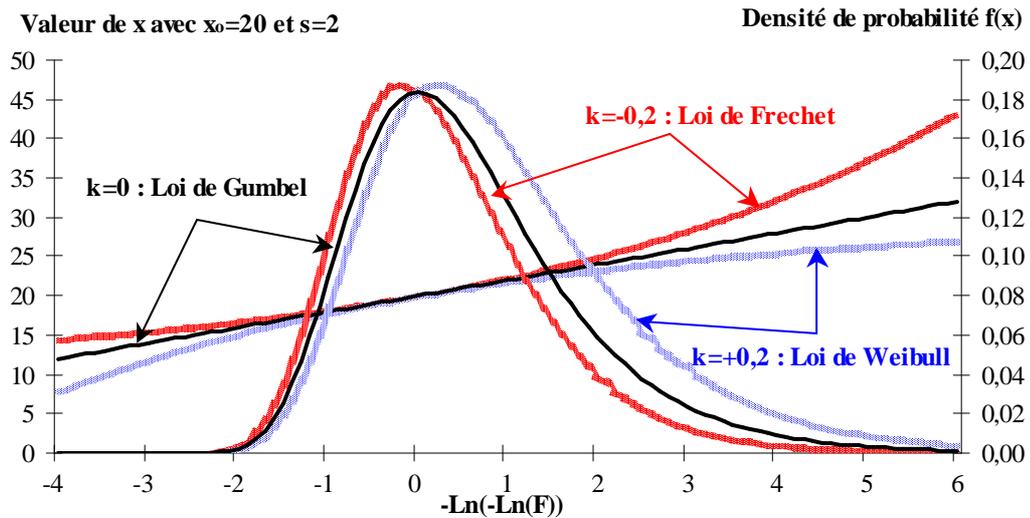
- Enfin, si k est négatif on trouve une loi proposée par Fréchet (GEV de type II) où x est défini sur l'intervalle $]x_0', +\infty[$. Cette borne inférieure de l'intervalle de définition se déduit des paramètres s , k et x_0 par la relation : $x_0' = \frac{s}{k} + x_0$. Ce type de loi peut se rencontrer en hydrologie, mais la difficulté va résider dans l'estimation du paramètre de forme qui est très soumise aux aléas de l'échantillonnage.

On notera que suivant les auteurs, le signe de k est parfois inversé et k est donc remplacé par $-k$!!!

VIII.5.4.1 - Fonction de répartition et densité de probabilité

La fonction de distribution étant : $F(x) = e^{-\left[1 - \frac{k(x-x_0)}{s}\right]^{1/k}}$, on en déduit la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{k(x-x_0)}{s}\right]^{\frac{1}{k}-1} e^{-\left[1 - \frac{k(x-x_0)}{s}\right]^{1/k}}$$



Comme l'illustre la figure ci-dessus, les points expérimentaux peuvent être reportés dans un graphique de Gumbel ($x, -\ln(-\ln(F))$) mais les points ne seront alignés que si $k=0$. La courbe rouge indique bien que si k est négatif (loi de Fréchet), les valeurs les plus fortes sont plus fréquentes que dans une loi de Gumbel.

VIII.5.4.2 – Méthode d'ajustement

Dans le cas général, il est préconisé d'utiliser la méthode des moments pondérés (Voir LUBES & MASSON, Hydrologie Continentale, vol.6 n°1, 1991). On estimera tout d'abord les trois premiers moments pondérés b_0 , b_1 et b_2 :

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad b_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n-1} x_i \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)} x_i$$

(n étant la taille de l'échantillon et i le rang dans l'échantillon classé par ordre croissant)

VIII.5.4.3 - Cas particulier où x_0 est fixé à l'avance

Dans ce cas, on est directement ramené à la loi de Gumbel par la transformation x en $\log(x - x_0)$ et par conséquent, on estimera s et δ par :

$$\delta = 0,78 \sigma_{\log(x - x_0)} \quad \text{et} \quad s = \overline{\log(x - x_0)} - 0,577 \delta$$

De la même façon, ce qui a été dit pour les intervalles de confiance sur x sera appliqué sur $\log(x - x_0)$.

VIII.5.5. - Loi de Pearson III ou loi Gamma incomplète

Parmi les différentes lois de Pearson, la loi de type III est la plus utilisée en hydrologie.

VIII.5.5.1 - Fonction de distribution

Sous sa forme générale, elle s'écrit :

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^u u^{\gamma-1} e^{-u} du \quad \text{avec } u = \frac{x - x_0}{s}$$

$\Gamma(\gamma)$: fonction gamma complète :

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^{\infty} u^{\gamma-1} e^{-u} du$$

L'intervalle de variation de x est $[x_0, \infty[$ et les trois paramètres d'ajustement sont :

- x_0 : paramètre de position (borne inférieure)
- x : paramètre d'échelle (de même dimension que x)
- γ : paramètre de forme (positif différent de zéro)

Le coefficient d'asymétrie est toujours positif et il diminue lorsque γ augmente. Il est égal à

$$\beta_1 = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$$

Le coefficient d'aplatissement est positif et égal à $\beta_2 = \frac{6}{\sqrt{\gamma}}$

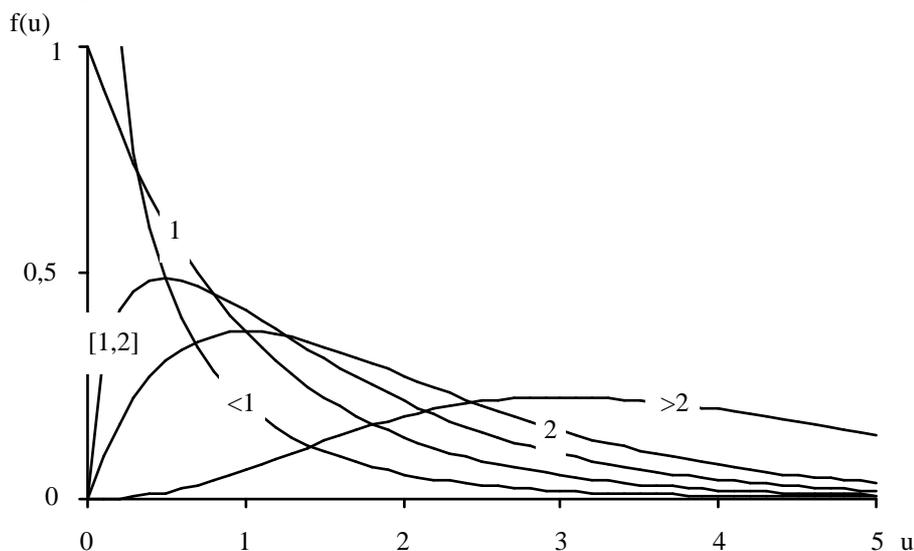
Si γ croît indéfiniment, la loi gamma incomplète tend vers une loi de Gauss ($\beta_1 \rightarrow 0, \beta_2 \rightarrow 0$).

La densité de probabilité a pour expression :

$$f(u) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} u^{\gamma-1} e^{-u}$$

Selon les valeurs de γ , les formes de distribution changent d'allure ; on peut distinguer différents cas.

- $0 < \gamma < 1$ La densité de probabilité décroît continuellement lorsque u augmente ; loi dite en J. Cette loi n'a pas de mode réel.
- $\gamma = 1$ Loi exponentielle sans mode réel.
- $1 < \gamma < 2$ Loi modale à $u = \gamma - 1$, densité nulle à $u = 0$ avec tangente verticale.
- $\gamma = 2$ Idem mais : tangente égale à 1 en $u = 0$.
- $\gamma > 2$ Courbe en cloche (2 points d'inflexion à $u = \gamma - 1 \pm \sqrt{\gamma - 1}$), mode à $u = \gamma - 1$ et densité de probabilité nulle à $u = 0$ avec tangente horizontale.



Exemple de loi de Pearson III

La moyenne et l'écart-type s'expriment simplement à partir de x_0 , γ et S :

$$\bar{x} = x_0 + \gamma s \quad \text{et} \quad \sigma = s \sqrt{\gamma}$$

VIII.5.5.2 - Estimation des paramètres

a) Méthode des moments

Dans le cas général, on a trois paramètres à déterminer : x_0 , γ et S .

L'égalité des trois premiers moments à leurs estimations d'après l'échantillon aboutit aux équations suivantes :

$$s = \frac{n}{2(n-2)} \frac{(X_3 - 3 X_2 X_1 + 2 X_1^3)}{X_2 - X_1^2}$$

$$\gamma = \frac{4(n-2)^2}{n(n-1)} \frac{(X_2 - X_1^2)}{(X_3 - 3 X_2 X_1 + 2 X_1^3)^2}$$

$$x_0 = \frac{n-2}{n-1} \frac{(X_2 - X_1^2)^2}{X_3 - 3 X_2 X_1 + 2 X_1^3} - X_1$$

$$\text{avec : } X_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} ; X_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} ; X_3 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3}{n}$$

Dans le cas particulier assez fréquent où x_0 est fixé a priori, on pourra retenir aisément γ et s à partir de \bar{x} et σ .

$$s = \frac{\sigma^2}{(x - x_0)} \quad \gamma = \frac{\sigma^2}{(x - x_0)^2}$$

Une amélioration peut être obtenue en faisant intervenir le moment d'ordre 3 :

$$s = R_2 - R_1 - \frac{2(R_1 + R_3 - 2R_2)}{3 + \frac{R_1}{(R_2 - R_1) + 1}} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{R_1}{s}$$

$$R_1 = \frac{\sum(x_i - x_0)}{n} \quad R_2 = \frac{\sum(x_i - x_0)^2}{\sum(x_i - x_0)} \quad R_3 = \frac{\sum(x_i - x_0)^3}{\sum(x_i - x_0)^2}$$

b) Méthode du maximum de vraisemblance

Il convient de distinguer deux cas selon la valeur γ par rapport à 1. Tout calcul fait, les équations obtenues sont les suivantes :

- Si $\gamma > 1$

$$\left[\begin{array}{l} s = (\bar{x} - x_0) \gamma \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} = S_n (\bar{x} - x_0) = z \\ \text{Ln } \gamma - \psi(\gamma) = \text{Ln } (\bar{x} - x_0) - S_1 = y \end{array} \right.$$

$$S_n = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{x - x_0} \quad S_1 = \frac{1}{n} \sum \text{Ln } (x_i - x_0) \quad \psi(\gamma) = \frac{d \Gamma(\gamma)}{d \gamma}$$

Pour résoudre ce système, on se donne a priori un x_0 puis on calcule $\gamma_z = \frac{z}{z-1}$ à partir de la seconde équation. La troisième équation se résout ainsi d'une façon approchée :

$$\gamma_y = \frac{0,5000876}{y} + 0,1648852 - 0,0544274 y$$

Si x_0 est bien choisi, on doit avoir $\gamma_z = \gamma_y$

- si $\gamma_z > \gamma_y$ x_0 était trop petit
- si $\gamma_z < \gamma_y$ x_0 était trop grand

On se fixe un nouveau x_0 et on recommence jusqu'à ce qu'on ait par exemple :

$$\frac{\gamma_z}{\gamma_y} = 1 \pm 0,01 \%$$

• Si $\gamma \leq 1$

Dans ce cas, la moyenne harmonique S_H n'a plus de sens et on remplace l'équation en S_H par l'équation exprimant l'égalité des moments centrés d'ordre 2 :

$$\gamma s^2 = \sigma^2 = \frac{n}{n-1} (S_2 - \bar{x}^2) \quad \text{avec } S_2 = \frac{\sum x_i^2}{n}$$

et comme précédemment :

$$s = \frac{\bar{x} - x_0}{y} \quad \text{et } \text{Ln } \gamma - \psi(\gamma) = \text{Ln}(\bar{x} - x_0) - S_1 = y$$

En combinant les deux premières équations, on obtient...

$$\gamma_z = \frac{n-1}{n} \frac{(x - x_0)^2}{(S_2 - \bar{x}^2)}$$

et on résout la dernière équation par la relation suivante valable pour $\gamma \leq 1$:

$$\gamma_y = \frac{\frac{8,898919}{y} + 9,059950 + 0,9775373 y}{17,79728 + 11,968477 y + y^2}$$

Contrairement au cas précédent, si $\gamma_z > \gamma_y$, x_0 était trop grand et réciproquement.

VIII.5.5.3 - Intervalle de confiance

Il n'existe pas de façon simple d'obtenir l'intervalle de confiance sur un quantile. La solution est de procéder à une simulation comme il a été indiqué par exemple au paragraphe V.2.3.

VIII.5.5.4 - Estimations de F(x)

Pour évaluer F connaissant x, il n'existe guère de procédés simples

a) Utilisation des tables de Pearson

Les tables permettent de travailler manuellement mais leur emploi est peu commun ("Tables of the incomplete Γ function". University Press, Cambridge).

b) Calcul à l'ordinateur

On trouvera dans les Cahiers ORSTOM (série Hydrologie, vol. VI, n° 3, 1969), une description par M. BRUNET-MORET des techniques d'approximation, suffisamment complexe pour ne pas avoir leur place ici.

c) Approximation

Pour $\gamma \geq 8$, on pourra se ramener à une loi de Gauss en considérant que $\sqrt[3]{\frac{x_i - x_0}{x - x_0}}$ est distribuée selon une loi de Gauss de moyenne $1 - \frac{1}{9\gamma}$ et de variance $\frac{1}{9\gamma}$

VIII.5.6. - Autres lois

Il existe un assez grand nombre d'autres lois que l'on utilise particulièrement en hydrologie : lois de Pearson, loi Beta incomplète, loi gamma complète, lois de Fuller, Goodrick, Jenkinson, etc

Nous pensons inutile ici de développer leur étude et nous renvoyons aux ouvrages cités en références.

VIII.5.6.1 - Loi de Student

La table annexée donne la valeur de t qui a la probabilité P d'être dépassée en valeur absolue en fonction du nombre de degrés de liberté ν .

v/P	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,365	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,373	1,812	2,228	2,764	3,163
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,483	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Pour le cas où on travaille à l'ordinateur, on pourra utiliser les approximations suivantes :

$$\theta = \arctan \frac{t}{\sqrt{v}}$$

• si v impair

$$P = 1 - \frac{2}{\pi} \left[\theta + \sin \theta \cos \theta + \frac{2}{3} \cos^2 \theta + \dots + \frac{2,4 \dots (v-3)}{1,3 \dots (v-2)} (\cos \theta)^{v-3} \right]$$

• v pair

$$P = 1 - \sin \theta \left[1 + \frac{1}{2} \cos^2 \theta + \dots + \frac{1,3 \dots (v-3)}{2,4 \dots (v-2)} (\cos \theta)^{v-3} \right]$$

VIII.5.6.2 - Loi du χ^2

La table annexée donne la valeur du χ^2 qui a la probabilité P d'être non dépassée en fonction du nombre de degrés de liberté v.

Pour les calculs à l'ordinateur on utilisera, avec $u = \frac{\chi^2}{2}$

• si v est pair

$$P = e^{-u} \left[1 + \sum_{r=1}^{\frac{v-2}{2}} \frac{u^r}{r!} \right]$$

• si v est impair $P = 1 - \text{ERF}(\sqrt{u}) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u} \sum_{r=1}^{\frac{v-2}{2}} \frac{u^{r-1}}{1 \cdot 3 \dots 2r-1}$

[ERF (u)] est la fonction erreur, implantée sur tous les ordinateurs :

$$\text{ERF}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t} dt$$

v/P	0,010	0,025	0,050	0,100	0,250	0,500	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3
4	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3
5	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1
6	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8
7	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5
8	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1
9	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7
10	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2
11	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7
12	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2
13	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7
14	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1
15	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6
16	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0
17	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4
18	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8
19	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2
20	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6
21	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9
22	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3
23	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6
24	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0
25	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3
26	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6
27	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0
28	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3
29	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6
30	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9
40	22,2	24,4	26,5	29,1	33,7	39,3	45,6	51,8	55,8	59,3	63,7
50	29,7	32,4	34,8	37,7	42,9	49,3	56,3	63,2	67,5	71,4	76,2
60	37,5	40,5	43,2	46,5	52,3	59,3	67,0	74,4	79,1	83,3	88,4
70	45,4	48,8	51,7	55,3	61,7	69,3	77,6	85,5	90,5	95	100
80	53,5	57,2	60,4	64,3	71,1	79,3	88,1	96,6	102	107	112
90	61,8	65,6	69,1	73,3	80,6	89,3	98,6	108	113	118	124
100	70,1	74,2	77,9	82,4	90,1	99,3	109	118	124	130	136

VIII.5.6.3 - Distribution binomiale (ou loi de Bernoulli)

Soit p la probabilité pour qu'un événement se produise lors d'une expérience et q la probabilité pour qu'il ne se produise pas ; on a bien évidemment :

$$p + q = 1$$

Supposons maintenant que l'on effectue N expériences ; on cherche alors quelle est la probabilité P (x) pour que l'événement se produise x fois dans les n expériences. On a alors :

$$P(x) = C_n^x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

(par définition, m! = m * (m - 1) * (m - 2) * ... * 2 * 1 et 0! = 1).

Parmi les différentes caractéristiques de cette distribution, on retiendra les résultats suivants :

. moyenne : $\mu = n p$

. variance : $\sigma^2 = n p q$

Dans la mesure où p et q ne sont pas proches de 0, la loi binomiale tend, lorsque n augmente, vers une loi de Gauss de moyenne $n p$ et d'écart-type $\sqrt{n p q}$ (si $n p$ et $n q > 5$). Si la probabilité p est faible la loi de Bernoulli tend vers une loi de Poisson.

VIII.5.6.4 - Distribution de Poisson

Cette loi de probabilité discrète appelée aussi loi des événements rares, a pour expression :

$$\text{Prob}(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

C'est une variable entière (égale par exemple, au nombre de jours de pluie, de gel, etc.) et x le seul paramètre d'ajustement : moyenne : $\mu = \lambda$. écart-type : $\sigma = \sqrt{\lambda}$

De même que la loi binomiale, la loi de Poisson tend vers une loi de Gauss de moyenne λ et d'écart-type $\sqrt{\lambda}$ lorsque λ croît indéfiniment.

VIII.5.6.5 - Distribution de Fischer-Snedecor

La table jointe donne la valeur de $F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ qui a la probabilité $P=5\%$ d'être dépassée du seul fait du hasard, en

fonction de v_1 et v_2 (v_1 degré de liberté de la plus grande variance).

v_1/v_2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234	238,9	234,9	249	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,83	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
60	1,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,01	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

VIII.6 - Choix d'une loi de Probabilité

Nous avons vu qu'il existait plusieurs méthodes pour déterminer les paramètres d'une loi en fonction de l'échantillon disponible. Mais comment choisir le type de loi de distribution ?

VIII.6.1 - Connaissance *a priori*

Certains phénomènes dans des régions données ont été étudiés de longue date. L'étude bibliographique peut montrer que généralement les valeurs qui mesurent l'intensité d'un phénomène s'ajuste à un type de loi de distribution. Dans ces cas, on pourra se contenter de vérifier la bonne adéquation de la loi retenue.

VIII.6.2. - Utilisation des paramètres de forme

On peut théoriquement étudier les relations entre paramètre de forme β_1 et β_2 de Pearson. Les valeurs de β_1 et β_2 pour chaque type de loi permettent d'établir des graphiques tels que ceux proposés par M. BRUNET-MORET (*).

Pour choisir la loi la plus adéquate, on calculera β_1 et β_2 d'après l'échantillon disponible puis on portera ce point dans le graphique, là où les courbes les plus proches permettront de choisir la loi. Il faut cependant noter l'imprécision de cette méthode due à l'absence d'intervalle de confiance sur les courbes $f(\beta_1, \beta_2) = 0$.

Par ailleurs, la longueur du calcul des β_1 et β_2 est suffisante pour que cette méthode soit peu utilisée tout du moins à la main.

VIII.6.3. - Choix graphique

Une méthode graphique assez rapide permet de choisir une loi plutôt qu'une autre. Elle consiste à porter dans un graphique les valeurs de l'échantillon en fonction de leur fréquence expérimentale puis d'y superposer les lois

* Cahiers O.R.S.T.O.M., Série Hydrologie, vol. VI, n° 3, 1969.

théoriques envisagées. Il faut néanmoins se méfier du caractère subjectif de ce choix qui peut, par ailleurs, être influencé par les échelles choisies.

VIII.6.4 - Utilisation de tests

Comme on l'a vu plus haut, les tests statistiques sont bien souvent peu puissants ; or, on désire ici choisir une loi plutôt qu'une autre : la puissance du test est donc primordiale.

En prenant un test suffisamment puissant, on pourra choisir une loi comme le suggère le tableau suivant utilisant le test d'Anderson.

Type de Loi	GAUSS	GALTON	GUMBEL	FRECHET
Paramètre 1	0,5479	-0,5371	0,2629	-0,7989
Paramètre 2	0,6334	0,5151	0,4991	0,4018
Paramètre 3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Fréquence				
0,01	-0,9259	0,0184	-0,4917	0,0414
0,02	-0,7533	0,0254	-0,4111	0,0432
0,05	-0,4932	0,0413	-0,2792	0,0617
0,10	-0,2640	0,0635	-0,1492	0,0787
0,20	0,0146	0,1070	0,0277	0,1096
0,50	0,5479	0,2904	0,4439	0,2398
0,80	1,0810	0,7878	1,0079	0,6828
0,90	1,3598	1,3288	1,3747	1,3655
0,95	1,5901	2,0437	1,7304	2,6578
0,98	1,8491	3,3197	2,1907	6,2934
0,99	2,0218	4,5869	2,5357	12,0065

U_w

2.8779

1.2575

2.1838

2.133

- Valeur de la variable U_{Wn^2} pour différents ajustements.

Les résultats obtenus à partir du même échantillon que précédemment confirment bien que la loi de Galton est la mieux adaptée (U_{Wn^2} minimum).

VIII.6. - ASSOCIATION ENTRE VARIABLES

VIII.6.1. - Notion de corrélation

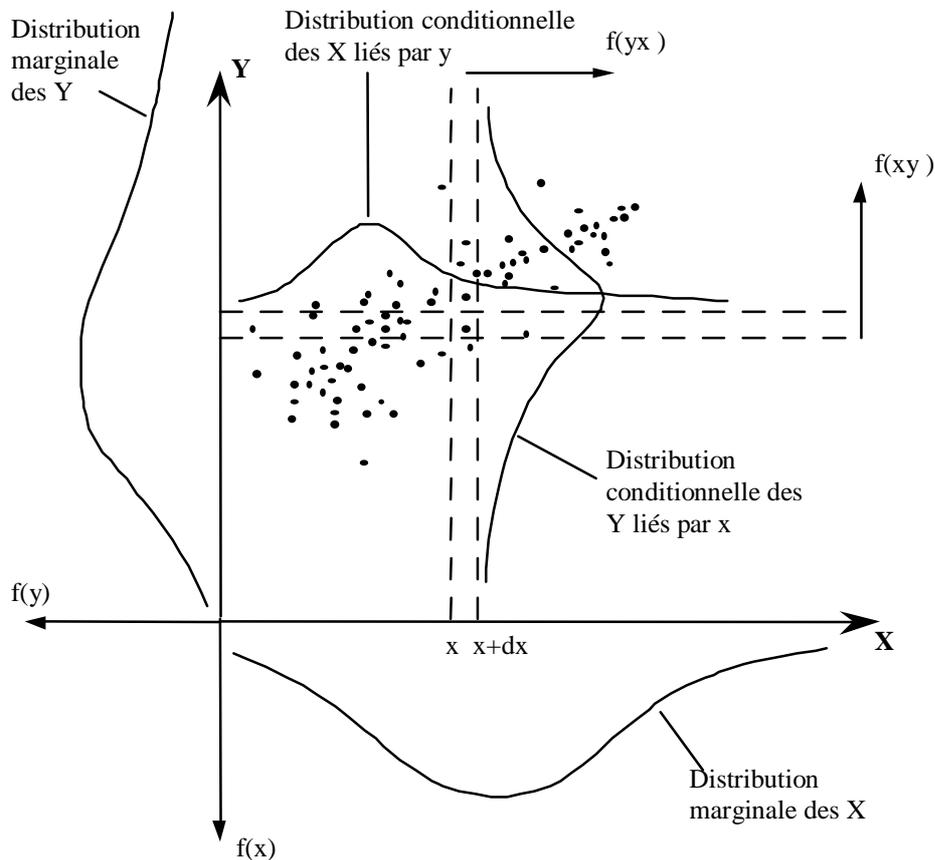
Soit deux phénomènes sur lesquels on a pu faire une série de mesures X et Y. On dispose alors de n couples (x_i, y_i) . Ces points peuvent être représentés dans un graphique gradué en x et en y. Sur le schéma précédent, nous avons porté également les lois de distribution marginales de X et de Y (distribution de l'ensemble des X quel que soit Y et réciproquement).

Par ailleurs, pour un intervalle sur X limité par les bornes x et $x + dx$, on peut définir la loi de distribution conditionnelle des valeurs de Y liées par x, de même pour les distributions conditionnelles des X liées par y.

Trois cas peuvent se présenter :

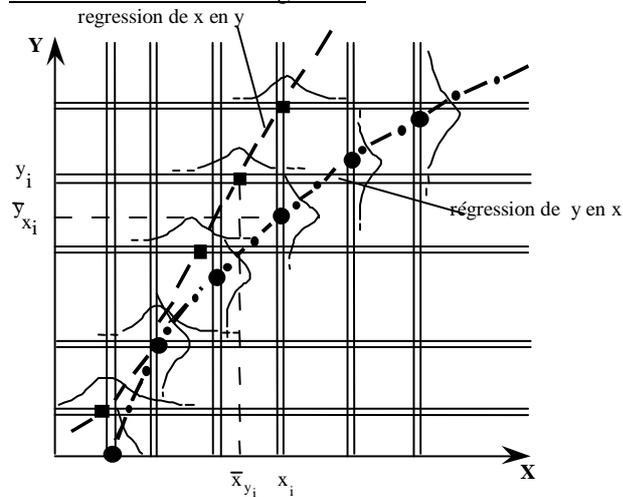
- les valeurs de Y lié à x sont toutes les mêmes ; on dit alors qu'il y a liaison fonctionnelle entre X et Y ;
- la distribution conditionnelle des Y liés par x est identique à la distribution marginale des Y (et ceci pour tout x) ; on dit alors qu'il y a indépendance entre X et Y ;
- le troisième cas est celui où la distribution conditionnelle est différente de la distribution marginale : les

moyennes conditionnelles des y liés par les x, \bar{y}_x sont des fonctions de x, et les dispersions sont inférieures à la dispersion de la distribution marginale. On dit alors qu'il y a corrélation entre X et Y.



VIII.6.2. - Courbes et droites de régression

VIII.6.2.1 - Courbe de régression



Par définition, on appellera courbe de régression de y en x, le lieu des moyennes conditionnelles des y liés par x (de même pour la régression de x en y).

Comme le suggère la figure ci-après, il n'y a pas de raison *a priori*, pour que la courbe de régression de y en x soit confondue avec celle de x en y, ni pour que ces courbes de régression aient une formulation prédéterminée

VIII.6.2.2 - Cas de la distribution de Gauss à deux dimensions

Si à présent nous faisons l'hypothèse que les couples (x,y) sont distribués selon une loi de Gauss à deux dimensions, la densité de probabilité du couple (x,y) est définie par :

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-z}$$

$$\text{avec } z = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2} \right]$$

Dans ces conditions, on constate que les distributions marginales de x et de y sont des lois de Gauss de formulation :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma_x^2}$$

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(y - \bar{y})^2}{2\sigma_y^2}$$

Quelle est, dans ce cas, la loi de distribution conditionnelle des y liés par x ? On a donc :

$$f(y_x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$$

$$f(y_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y(1-\rho^2)} \exp - \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(y - \bar{y})}{\sigma_y} - \rho \frac{(x - \bar{x})}{\sigma_x} \right]^2$$

La formulation obtenue pour $f(y_x)$ n'est autre que celle d'une loi de Gauss de moyenne

$$\bar{y}_x = \bar{y} + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) \text{ et d'écart-type } \sigma_{y_x} = \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2} .$$

Dans le cas particulier où les couples (x,y) sont tirés d'une loi de Gauss à deux dimensions, on démontre les résultats simples suivants :

- les distributions conditionnelles sont des lois de Gauss ;
- les variations des distributions conditionnelles ne dépendent pas de x (ou de y) (cette propriété s'appelle l'homoscédasticité) ;
- les courbes de régression sont des droites d'équation :

$$\bar{y}_x = \bar{y} + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) \quad \text{et} \quad \bar{x}_y = \bar{x} + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y})$$

La figure ci-après illustre le tracé des droites de régression dans le cas d'une distribution de Gauss à deux dimensions avec un coefficient de corrélation ρ égal à 0,5. Sur ce schéma sont figurés également les ellipses d'isodensité de probabilité.

L'allure de ces ellipses dépend de ρ : pour $\rho = 0$, les ellipses deviennent des cercles (dans un système d'axe gradué en σ_x et en σ_y) ; il y a alors indépendance entre x et y. Pour $\rho = 1$, les ellipses se transforment en segments de droite ; il y a relation fonctionnelle linéaire entre x et y.

L'estimation à partir d'un échantillon des paramètres de la loi à deux dimensions se fera comme indiqué précédemment :

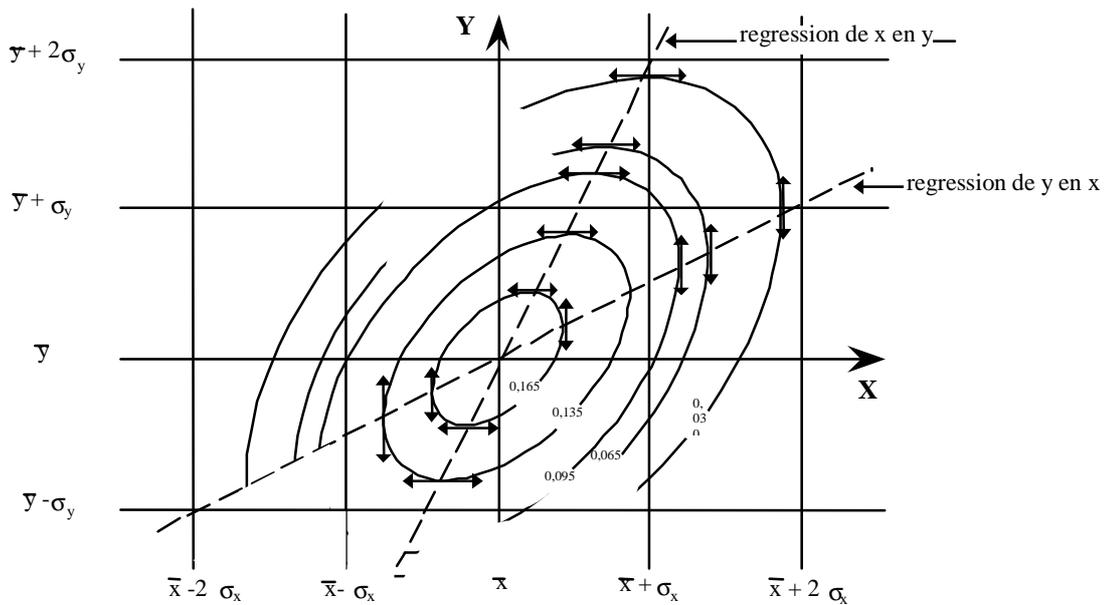
$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}{n-1}} \quad (\text{de même pour } y)$$

Le coefficient de corrélation ρ sera lui, estimé par :

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{(n-1) \sigma_x \sigma_y}$$

Evidemment, cette estimation de $\hat{\rho}$ est entachée d'une erreur d'échantillonnage et diffère donc de la valeur réelle de ρ .



Ellipses d'isodensité de probabilité

Dans la pratique, on peut estimer l'intervalle de confiance sur ρ en utilisant la transformation de Fischer

$$z = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+r}{1-r}$$

La variable z suit une loi de Gauss telle que:

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+\rho}{1-\rho}$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

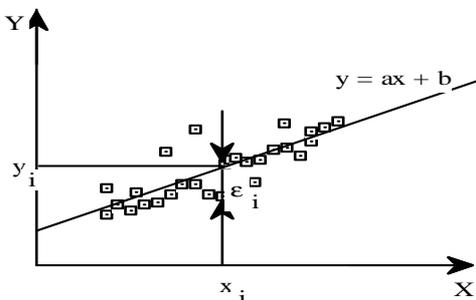
Pour obtenir l'intervalle de confiance à α % sur ρ , il suffit d'étudier celui sur z puis de passer des z au ρ .

Une autre façon de procéder est d'utiliser les tables de Fischer (données en hors-texte) qui donnent en fonction du nombre de degrés de liberté $\nu = n - 2$, la probabilité P de rencontrer par le fait du hasard, une valeur de $\hat{\rho}$ supérieur à ρ_p alors que X et Y sont en fait indépendants.

VIII.6.3. - Régression simple

VIII.6.3.1 - Choix du modèle linéaire - droite des moindres carrés

Soit deux séries d'observation X et Y telles qu'à chaque valeur x_i , on puisse associer une valeur de y_i . Les couples (x_i, y_i) peuvent être représentés dans un graphique comme ci-dessous. Cependant, en l'absence d'hypothèse sur les distributions de X et de Y , il n'est pas possible de prévoir la forme des courbes de régression. Rien n'empêche cependant de chercher l'équation d'une droite $y = ax + b$ telle que la somme des carrés des écarts $\varepsilon_i = y_i - ax_i - b$, soit minimale.



Les coefficients a et b que l'on cherche à déterminer seront obtenus en annulant les dérivées

partielles de $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ par rapport à a et b :

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{\partial a} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2}{\partial a} = -2 \sum x_i \varepsilon_i = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{\partial b} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2}{\partial b} = -2 \sum \varepsilon_i = 0$$

Soit le système suivant qui s'interprète ainsi :

$$\sum_1^n \varepsilon_i^2 = 0 : \text{les écarts sont nuls en moyenne}$$

$$\sum_1^n x_i \varepsilon_i = 0 : \text{il y a orthogonalité entre } \varepsilon \text{ et } x \text{ (les écarts sont indépendants de } x)$$

Le système à résoudre en a et b est le suivant :

$$\begin{cases} \sum y_i - a \sum x_i - nb = 0 \\ \sum x_i y_i - a \sum x_i^2 - b \sum x_i = 0 \end{cases}$$

Tout calcul fait et en posant...

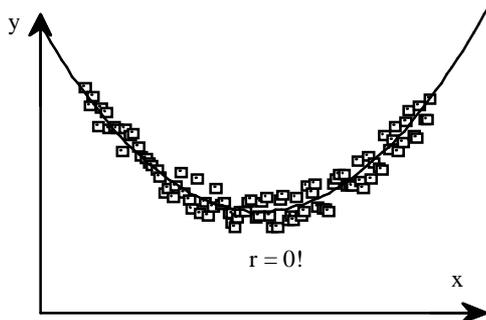
$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad \sigma_x = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad r = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{(n-1) \sigma_x \sigma_y}$$

... on trouve :

$$a = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad b = \bar{y} - r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \bar{x}$$

Par la même occasion, on peut calculer l'écart-type des ε et là encore, on trouve une formule qui rappelle quelque chose :

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n-1}} = \sigma_y \sqrt{1-r^2}$$



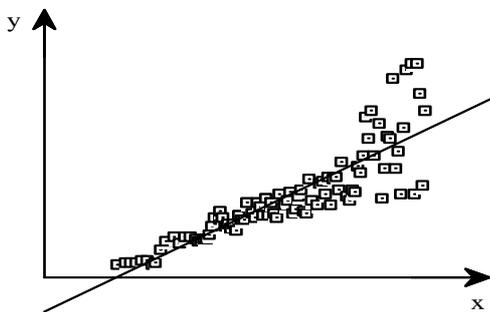
On ne manquera pas de remarquer que la droite des moindres carrés n'est autre que la droite de régression si X et Y sont tirés d'une loi de Gauss à deux dimensions.

Dès à présent, il faut se méfier d'une interprétation abusive de cette analogie : si le coefficient r calculé est mauvais (voisin de 0), il faut conclure que la régression n'est pas linéaire ; il peut y avoir pourtant une bonne corrélation, comme le suggère la figure ci-contre.

VIII.6.3.2 - Précautions à prendre

Pour utiliser les résultats d'une régression linéaire, on effectuera certaines vérifications préalables :

- vérifier l'hypothèse de la distribution de Gauss à deux dimensions ou tout au moins que les distributions marginales sont normales (si ce n'est pas le cas, on opérera un changement de variable de façon à rendre les distributions gaussiennes) ;



- si cela n'est pas le cas, vérifier sur le graphique que le coefficient de corrélation n'est pas voisin de 1 par suite d'une erreur (par exemple, un couple (x,y) a été multiplié par 10) ;

- vérifier également sur le graphique que l'hypothèse d'homoscédasticité est acceptable (ce qui n'est pas le cas sur la figure ci-contre) ;

- vérifier que si p n'est pas significatif, la régression ne soit pas courbe. Si c'est le cas, on opérera un changement de variable (une anamorphose) sur x, ou y, ou les deux.

VIII.6.3.3 - Utilisation pratique de la régression simple

Une des utilisations les plus fréquentes est l'extension de séries de données.

Soit deux variables X et Y ; X a été observée n fois et Y k fois. Soit k le nombre de couples (x,y) dont on dispose ; on se propose d'établir, à partir de ces k couples, la courbe de régression de y en x, puis à partir des valeurs de x, de reconstituer les (n - k) valeurs de y non observées.

Soit $\bar{x}_k, \bar{y}_k, k\sigma_x$ et $k\sigma_y$ les moyennes et écarts-types déterminés d'après les k couples ainsi que le coefficient de corrélation ρ_k correspondant. La régression de y en x s'écrit :

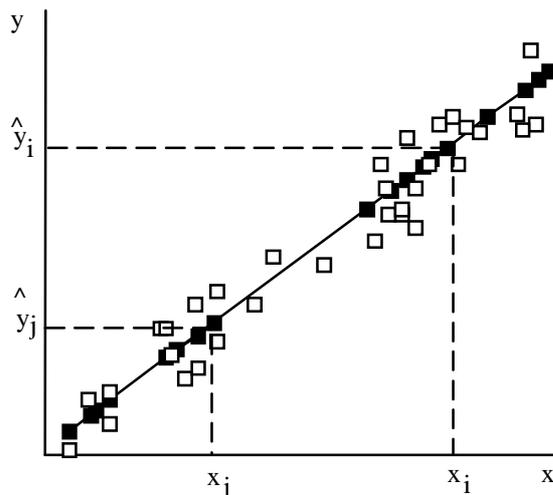
$$\bar{y}_{x_j} = \rho_k \frac{k\sigma_y}{k\sigma_x} (x_j - \bar{x}_k) + \bar{y}_k$$

\bar{y}_{x_j} représentant évidemment la moyenne conditionnelle des y liés par x_j et si les hypothèses de normalité sont admissibles, \bar{y}_{x_j} est la valeur la plus proche de y pour x_j donné.

Ainsi seront restituées les $(n - k)$ valeurs de y manquantes. Ces estimations \bar{y}_{x_j} sont les valeurs "les plus probables" de Y pour les observés, et il n'est pas possible de mieux évaluer \bar{y}_{x_j} à partir de la seule connaissance de x .

L'estimation de la moyenne des y sur l'échantillon étendu peut s'obtenir directement à partir de \bar{x}_n :

$$\text{moy}(\bar{y}_k) = \rho_k \frac{k\sigma_y}{k\sigma_x} (x_n - \bar{x}_k) + \bar{y}_k$$



Si au lieu de chercher pour chaque x le y le plus probable, on cherche au contraire à reconstituer un échantillon global de y le plus probable, cette méthode n'est plus adaptée.

En effet, comme l'indique la figure ci-contre, l'extension des données par régression linéaire simple donne $(n - k)$ \bar{y}_{x_j} qui sont évidemment disposés sur la droite de régression. Or, si on avait réellement observé les y , les points auraient certainement été dispersés autour de cette droite. On peut même évaluer cette dispersion par :

$$\sigma_\varepsilon = \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}$$

Dans le cas de petits échantillons, il est préférable d'utiliser sans biais

$$\hat{\sigma}_\varepsilon = \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \sigma_\varepsilon$$

La régression linéaire simple conduit donc à une sous-estimation de la variance de l'échantillon étendu.

Pour tenir compte de cette remarque, on peut procéder de la façon sommaire suivante. On estime l'écart-type de l'échantillon étendu ${}_n\hat{\sigma}_y$ par la formule :

$${}_n\hat{\sigma}_y^2 = k\sigma_y^2 + \rho^2 k \frac{k\sigma_y^2}{k\sigma_x^2} [n\sigma_x^2 - k\sigma_x^2]$$

On compare cette valeur ${}_n\hat{\sigma}_y$ à $k\hat{\sigma}_y$ et on retient la plus forte de ces deux valeurs.

Une deuxième façon de procéder consiste à générer d'une façon aléatoire des écarts à la droite de régression : si on admet les résultats acquis pour une loi de Gauss à deux dimensions, la moyenne conditionnelle des y liés par x est :

$$\bar{y}_{x_j} = \rho_k \frac{k\sigma_y}{k\sigma_x} (x_j - \bar{x}_k) + \bar{y}_k$$

L'écart ε_j entre la véritable valeur y_j et son estimation \bar{y}_{x_j} est :

$$\varepsilon_i = y_j - \bar{y}_{x_j}$$

ε_i est distribué selon une loi de Gauss de moyenne nulle et d'écart-type :

$$\sigma_\varepsilon = k\sigma_y \sqrt{1 - r^2} \text{ (où } \hat{\sigma}_\varepsilon = \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \sigma_\varepsilon \text{)}$$

Par conséquent, pour reconstituer la variance de l'échantillon étendu, il suffit d'ajouter à \bar{y}_{x_j} une valeur de ε_j aléatoire.

Pratiquement, pour chaque valeur de j , on calcule comme indiqué précédemment \bar{y}_{x_j} . On tire au hasard un nombre F_j compris entre 0 et 1. Ce nombre F_j peut être considéré comme une fréquence à laquelle on peut associer la variable réduite de Gauss u_{F_j} . On "corrige" alors \bar{y}_{x_j} pour obtenir l'estimation définitive \hat{y}_{x_j} :

$$y = \bar{y}_{x_j} + u_{F_j} \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}$$

Il faut faire attention à ne se servir de l'échantillon ainsi obtenu que dans son ensemble puisque chaque élément pris isolément ne correspond plus "au mieux" aux x_j observés.

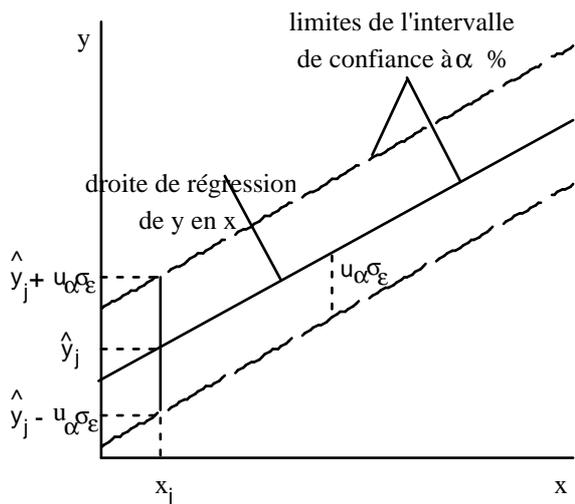
- Confiance à accorder à l'échantillon étendu

La méthode décrite ci-dessus permet donc d'obtenir un échantillon étendu des Y, constitué de K valeurs réellement observées et (n - k) valeurs reconstituées à partir des observations de X.

On ne peut évidemment pas accorder à cet échantillon la même confiance qu'en un échantillon réellement observé. M. VERON a montré qu'en première approximation, on pouvait attribuer la même confiance à cet échantillon étendu de taille n qu'à un échantillon réellement observé de taille n'. Le calcul de n' dépend de l'efficacité E de la régression calculée ainsi :

$$E = 1 + \left[1 - \frac{k}{n} \right] \frac{1 - (k - 2) \rho^2}{(k - 3)}$$

On a alors la relation $n' = \frac{k}{E}$.



Ce nombre n' est par exemple celui qu'il faudrait prendre en compte dans l'estimation de l'intervalle de confiance sur la moyenne \bar{y}_n .

Enfin, si on s'intéresse individuellement à chaque estimation d'un y_j , l'estimation \bar{y}_{x_j} est sensiblement la moyenne conditionnelle des y liés par x_j . On peut admettre bien souvent que l'écart ϵ_i de variance $\sigma_y^2 (1 - \rho^2)$ est tiré d'une loi de Gauss. On pourra alors tracer des lignes d'isoprobabilités de rencontrer une valeur y pour un x donné.

En première approximation, ces lignes sont des droites parallèles à la droite de régression.

Sur la figure ci-contre, u_α représente la variable réduite de Gauss correspondant à la fréquence $1 - \frac{1 - \alpha}{2}$.

VIII.6.4. - Régression double

Comme pour la régression simple, on pourrait mettre en parallèle une représentation probabiliste et une représentation "méthode des moindres carrés".

Afin de simplifier le texte, nous ne présenterons que la deuxième, tout en admettant une partie des résultats qu'établirait la première.

VIII.6.4.1 - Equation de la régression double linéaire

Soit une variable z que l'on désire expliquer à partir de deux variables x et y. On se propose de trouver une relation linéaire de la forme :

$$z = ax + by + c + \epsilon$$

Les paramètres a, b et c étant déterminés de façon à minimiser la somme des carrés des écarts ϵ :

$$\epsilon_i^2 = (z_i - ax_i - by_i - c)^2$$

Ecrire que $\sum \epsilon_i^2$ est minimum revient à écrire que les dérivées partielles de $\sum \epsilon_i^2$ par rapport à a, b et c que l'on veut déterminer sont nulles :

$$\sum \epsilon_i^2 \text{ minimum équivaut à : } \begin{cases} \frac{\partial \sum \epsilon_i^2}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \sum \epsilon_i^2}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial \sum \epsilon_i^2}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

Ce système de trois équations à trois inconnues se transforme ainsi :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial a} = 2 \sum x_i (z_i - ax_i - by_i - c) = 2 \sum x_i \varepsilon_i = 0 \\ \frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial b} = 2 \sum y_i (z_i - ax_i - by_i - c) = 2 \sum y_i \varepsilon_i = 0 \\ \frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial c} = 2 \sum (z_i - ax_i - by_i - c) = 2 \sum \varepsilon_i = 0 \end{cases}$$

On remarque comme pour la régression simple, que la méthode des moindres carrés donne pour solution des paramètres a, b et c tels que les erreurs soient indépendantes de x et de y (orthogonalité établie par les deux premières équations) et nulles en moyenne (troisième équation).

La résolution de ce système de trois équations à trois inconnues ne présente pas de difficultés. Les paramètres a, b et c peuvent s'exprimer en fonction des moyennes, écarts-types et coefficients de corrélation de x, y et z :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} ; \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} ; \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n - 1}}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum z}{n} ; \sigma_z = \sqrt{\frac{\sum (z - \bar{z})^2}{n - 1}}$$

$$\rho = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{(n - 1) \sigma_x \sigma_y}$$

$$r_1 = \frac{\sum (z - \bar{z})(x - \bar{x})}{(n - 1) \sigma_z \sigma_x}$$

$$r_2 = \frac{\sum (z - \bar{z})(y - \bar{y})}{(n - 1) \sigma_z \sigma_y}$$

Ces trois coefficients de corrélation seront appelés par la suite coefficients de corrélation totale entre x et y, z et x, et z et y.

On a alors, tout calcul fait :

$$a = \frac{r_1 - r_2 \rho}{1 - \rho^2} \frac{\sigma_z}{\sigma_x}$$

$$b = \frac{r_2 - r_1 \rho}{1 - \rho^2} \frac{\sigma_z}{\sigma_y}$$

$$c = \bar{z} - a\bar{x} - b\bar{y}$$

VIII.6.4.2 - Coefficient de corrélation multiple et variance résiduelle

Pour la corrélation simple, on a vu que le coefficient de corrélation totale mesurait la dispersion des écarts ε_i . On peut donc construire de même un coefficient de corrélation multiple R qui mesurera la dispersion des ε_i :

$$\varepsilon_i = z_i - ax_i - by_i - c$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \varepsilon_i^2}{\sigma_z^2}$$

On montre alors que R peut se déduire de r_1 , r_2 et ρ par l'expression :

$$R^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2\rho r_1 r_2}{1 - \rho^2}$$

Si x et y sont des variables indépendantes, le coefficient ρ est nul et l'expression précédente se simplifie en :

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2$$

Par définition même de R, on montre que l'écart-type σ_{ε_i} que l'on peut également noter $\sigma_{z_{xy}}$ est :

$$\sigma_{z_{xy}} = \sigma_{\varepsilon_i} = \sigma_z \sqrt{1 - R^2}$$

VIII.7.4.3 - Notion de coefficient de corrélation partielle

Nous avons admis que z dépendait à la fois de x et y. Les coefficients de corrélation totale r_1 et r_2 entre z, x et y rendent donc mal compte de la liaison entre 2 variables puisque l'on ne tient pas compte de l'influence de la troisième. L'idée est donc de mesurer non pas la corrélation totale entre z et x mais entre z corrigé des variations de y, et x.

On définit donc un coefficient de corrélation partielle entre x et z corrigé des variations de y (noté r_{zx_y}), comme étant la part de la variance inexpliquée par y et expliquée par x. On peut définir de même r_{zy_x} .

Tous calculs faits, les expressions des coefficients de corrélation partielle sont :

$$r_{zx_y}^2 = \frac{R^2 - r_2^2}{1 - r_2^2}$$

$$r_{zy_x}^2 = \frac{R^2 - r_1^2}{1 - r_1^2}$$

Il faut noter dès à présent qu'il n'y a pas de raison *a priori* pour que les coefficients de corrélation partielle et de corrélation totale soient meilleurs les uns que les autres.

Pour évaluer si les coefficients de corrélation totale étaient significativement différents de 0, on a utilisé les tables de Fischer. Pour les coefficients de corrélation partielle, le raisonnement est le même mais le nombre de degrés de liberté est égal à :

$$v = n - 3$$

Par exemple, un coefficient de corrélation partiel égal à 0,5034 établi à partir de 22 observations de (x,y,z) a moins de 2 % de chance d'être dû au hasard alors que la vraie valeur serait nulle.

VIII.6.5. - Régressions linéaires multiples

VIII.6.5.1 - Mise en équation

Supposons que l'on cherche à expliquer une variable y à partir de k variables x. Si y et les x sont tirés d'une loi de Gauss à k+1 dimensions, les paramètres de cette loi de distribution sont :

Les moyennes marginales : $\bar{y}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_k$

Les écarts-types marginaux : $\sigma_y, \sigma_{x1}, \sigma_{x2}, \dots, \sigma_{xi}, \dots, \sigma_{xk}$

Les coefficients de corrélation totale, soit la matrice [r] :

1	r_{yx1}	r_{yx2}	...	r_{yxj}	...	r_{yjk}
r_{x1y}	1	r_{x1x2}	...	r_{x1xj}	...	r_{x1xk}
r_{x2y}	r_{x2x1}	1	...	r_{x2xj}	...	r_{x2xk}
...
r_{xiy}	r_{xix1}	r_{xix2}	...	r_{xixj}	...	r_{xixk}
...
r_{xky}	r_{kx1}	r_{kx2}	...	r_{kxj}	...	1

On peut montrer alors que la distribution conditionnelle des y liés par les k x_i est gaussienne de moyenne \bar{y}_{x_i} et d'écart-type $\sigma_{y_{x_i}}$ avec :

$$\bar{y}_{x_i} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_j x_j + \dots + a_k x_k$$

$$\text{et } \sigma_{y_{x_i}} = \sigma_y \sqrt{1 - R^2}$$

Il reste alors à évaluer les k+1 coefficients de régression a_i , le coefficient de corrélation multiple R, et les k coefficients de corrélation partielle $r^{y_{x_1, x_2, \dots, x_k}}$.

On pourrait également montrer que \bar{y}_{x_i} correspond à l'hyper plan des moindres carrés :

$$\bar{y}_{x_i} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \dots + a_j x_j \dots + a_k x_k$$

On détermine alors les a_j de façon à minimiser la somme des carrés des écarts entre y et ses estimations \hat{y} :

Les dérivées partielles par rapport aux k+1 paramètres devront donc être nulles :

1 équation :

$$\frac{\partial \sum \epsilon^2}{\partial a_0} = -2 \sum (y - a_0 - a_1 x_1 \dots - a_k x_k) = 0$$

(erreur nulle en moyenne et par conséquent $a_0 = 0$)

k équations du type :

$$\frac{\partial \sum e^2}{\partial a_i} = -2 \sum x_i (y - a_0 - a_1 x_1 \dots - a_k x_k) = 0 \text{ (orthogonalité)}$$

VIII.6.5.2 - Coefficients de régression, de corrélation multiple et de corrélation partielle

Si dans la matrice [r], on note les lignes et colonnes de 0 à k, les différents paramètres s'expriment en fonction du déterminant de [r] noté Δ et des déterminants Δ_{ij} des mineurs de [r] obtenus en supprimant la i^{ème} ligne et la j^{ème} colonne de [r].

$$\Delta_{ij} = + / - \text{DET} \begin{vmatrix} 1 & r_{yx1} & \dots & r_{yxj-1} & r_{yxj+1} & \dots & r_{yxk} \\ r_{x1y} & 1 & \dots & r_{x1xj-1} & r_{x1xj+1} & \dots & r_{x1xk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{xi-1y} & r_{xi-1x1} & \dots & r_{xi-1xj-1} & r_{xi-1xj+1} & \dots & r_{xi-1xk} \\ r_{xi+1y} & r_{xi+1x1} & \dots & r_{xi+1xj-1} & r_{xi+1xj+1} & \dots & r_{xi+1xk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{xky} & r_{xkx1} & \dots & r_{xkxj-1} & r_{xkxj+1} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

(On utilisera le signe + si i+j est pair et le signe - si i+j est impair)

Les coefficients de régression sont donnés alors par :

$$a_i = -\frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}} \frac{\Delta_{oi}}{\Delta_{ooi}} \text{ (k fois) et } a_o = \bar{y} - \sum_{i=1}^k \bar{x}_i$$

Pour les coefficients de corrélation partielle on aura :

$$r_{yx_i \ x_1, x_2, \dots, x_k} = -\frac{\Delta_{oi}}{\sqrt{\Delta_{00}} \sqrt{\Delta_{ii}}}$$

Enfin le coefficient de corrélation multiple R est donné par :

$$R^2 = 1 - \frac{\Delta}{\Delta_{00}}$$

A titre d'exemple on peut retrouver ainsi les résultats de la régression double :

Moyennes	\bar{z}	\bar{x}	\bar{y}
Ecart-types	σ_z	σ_x	σ_y
[r]	1	r_1	r_2
	r_1	1	ρ
	r_2	ρ	1

$$\Delta = 1(1 - \rho^2) + r_1(\rho r_2 - r_1) + r_2(\rho r_1 - r_2) = 1 - r_1^2 - r_2^2 - \rho^2 + 2\rho r_1 r_2$$

$$\Delta_{00} = + [1 - \rho^2], \Delta_{11} = + [1 - r_2^2], \Delta_{22} = + [1 - r_1^2], \Delta_{01} = - [r_1 - \rho r_2], \Delta_{02} = + [\rho r_1 - r_2]$$

$$R^2 = 1 - \frac{\Delta}{\Delta_{00}} = 1 - (1 - r_1^2 - r_2^2 - \rho^2 + 2\rho r_1 r_2) / (1 - \rho^2) = (r_1^2 + r_2^2 - 2\rho r_1 r_2) / (1 - \rho^2)$$

$$a = a_1 = -\frac{\sigma_z}{\sigma_x} \frac{\Delta_{01}}{\Delta_{00}} = -\frac{\sigma_z}{\sigma_x} \frac{-(r_1 - \rho r_2)}{(1 - \rho^2)} = \frac{r_1 - \rho r_2}{1 - \rho^2} \frac{\sigma_z}{\sigma_x}$$

$$b = a_2 = -\frac{\sigma_z}{\sigma_y} \frac{\Delta_{02}}{\Delta_{00}} = -\frac{\sigma_z}{\sigma_y} \frac{(\rho r_1 - r_2)}{(1 - \rho^2)} = \frac{r_2 - \rho r_1}{1 - \rho^2} \frac{\sigma_z}{\sigma_y}$$

$$r_{zx_y}^2 = \frac{\Delta_{01}^2}{\Delta_{00}\Delta_{11}} = \frac{(r_1 - \rho r_2)^2}{(1 - \rho^2)(1 - r_2^2)} = \frac{r_1^2 - 2\rho r_1 r_2 + \rho^2 r_2^2}{(1 - \rho^2)(1 - r_2^2)}$$

$$r_{zx_y}^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2\rho r_1 r_2 + \rho^2 r_2^2 - r_2^2}{(1 - \rho^2)(1 - r_2^2)} = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2\rho r_1 r_2 + r_2^2(1 - \rho^2)}{(1 - \rho^2)(1 - r_2^2)} = \frac{R^2 - r_2^2}{1 - r_2^2}$$

VIII.6.5.3 - Seuils de signification

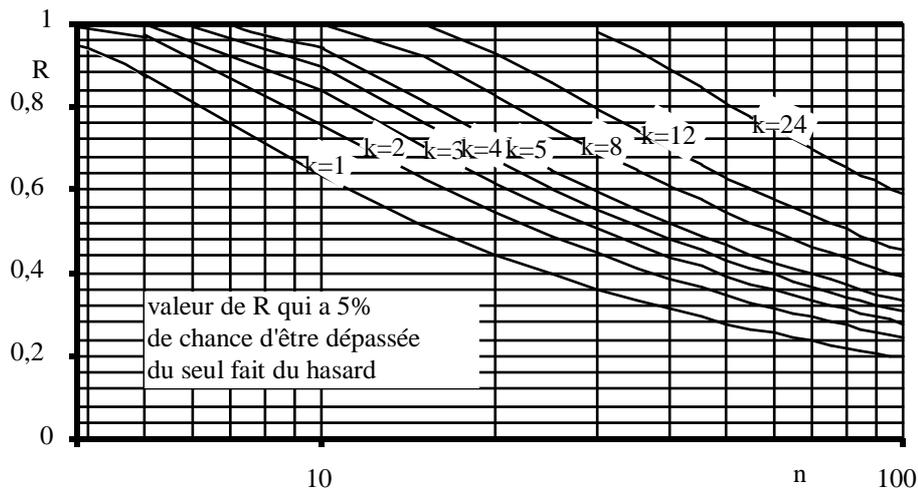
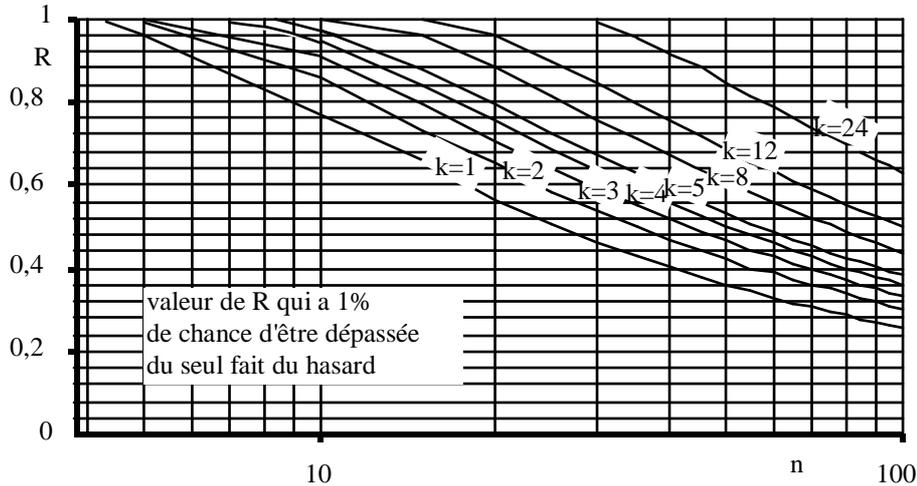
Pour le coefficient de corrélation multiple, on considère que R est significatif si la variance expliquée est significativement supérieure à la variance résiduelle. L'analyse de ces variances montre que la quantité...

$$F = \frac{n - (k + 1)}{k} \times \frac{R^2}{1 - R^2}$$

doit être significativement supérieure à 1.

Les valeurs de F ayant une probabilité P d'être dépassée du seul fait du hasard sont données par les tables de Snedecor avec les degrés de liberté $v_1 = k$ et $v_2 = n - (k + 1)$.

Les abaques jointes donnent directement les valeurs du coefficient R aux seuils de 1 % et 5 % en fonction du nombre d'observations.



Pour les seuils de signification des coefficients de corrélation partielle, on utilisera comme précédemment, les tables de Student. Le nombre de degré de liberté v est alors égal à $v = n - k - 1$

VIII.6.5.4 - Mise en oeuvre

Ayant une variable Y que l'on désire expliquer à partir d'autres variables X : on fait l'inventaire des Xi susceptibles d'avoir une influence sur Y. Deux méthodes sont alors envisageables :

a) Méthode régressive (backward élimination)

On effectue la régression multiple avec toutes les variables Xi ; on calcule alors les différents coefficients de corrélation partielle et on élimine éventuellement la variable dont le coefficient est le moins significatif et on recommence jusqu'à ce que tous les coefficients de corrélation soient significatifs à un seuil fixé à l'avance.

b) Méthode progressive (Stepwise Regression)

On commence par faire une régression simple entre Y et la variable Xi qui lui est le mieux corrélé ; on vérifie que le coefficient de corrélation est significatif. On cherche alors la variable Xj qui se corrèle le mieux avec le résidu de la régression de Xi et Y. On effectue alors une régression double, on vérifie les coefficients de corrélation

partielles. Si la dernière variable introduite n'est pas significative, on s'arrête, si une des variables précédemment entrées n'est plus significative, on la sort. Si le coefficient de corrélation multiple n'est plus significatif, on s'arrête. Enfin, dans les cas contraires, on introduit un nouveau X_k qui explique le mieux la variance résiduelle précédente.

Bien que la première méthode paraisse séduisante, c'est la seconde qui est la plus utilisée car elle conduit plus rapidement à un résultat (qui n'est pas nécessairement le même qu'avec l'autre méthode).

VIII.6.6. - Régressions multiples quelconques

ANNEES	Y : lame d'eau écoulée en juillet	X ₁ : lame d'eau écoulée en juin	X ₂ : Pluie du mois de juillet	X ₃ Evapotranspiration potentielle de juillet
1962	3	8	29	50
1963	87	93	185	99
1964	11	15	112	89
1965	40	72	114	100
1966	91	62	215	92
1967	70	52	229	115
1968	48	56	121	86
1969	22	25	71	77
1970	56	45	180	95
1971	55	61	203	122

Il n'est pas question d'aborder ici l'aspect théorique des régressions multiples non-linéaires mais de présenter une méthode graphique simple qui permet, moyennant certaines précautions, d'obtenir des résultats satisfaisants.

Soit Y la lame d'eau écoulée par un cours d'eau en juillet ; elle s'explique certainement en grande partie par la lame d'eau X₁ écoulée en juin (période de tarissement), mais aussi par les pluies de juillet X₂ et éventuellement par le pouvoir évaporant de juillet. Sur dix ans, on a observé les résultats rapportés de le tableau précédent (unités en mm).

Supposons que l'on essaie d'expliquer une variable Y à partir de n variables X_i. On supposera d'abord que l'on peut séparer les variables de la façon suivante :

$$Y = f(X_1) + f'(X_2) + f''(X_3) \dots + f^{IN}(X_n) + \varepsilon$$

les variables X₁, X₂ ... X_n étant rangées dans l'ordre décroissant de leurs influences présumées sur Y.

Le processus purement graphique est le suivant :

D'abord, on porte dans un graphique Y, X₁ les points d'observations et on trace une approximation de

f(X₁) :

$$Y = f_1(X_1) + \varepsilon_1 \text{ (dans l'exemple, on a pris une fonction linéaire)}$$

L'écart ε_1 peut s'expliquer par la variable X₂. Dans le graphique ε_1 , X₂, les points expérimentaux permettent de tracer une première estimation de f'(X₂) :

$$Y - f_1(X_1) = \varepsilon_1 = f'_1(X_2) + \varepsilon_2$$

De même, ε_2 peut s'expliquer en fonction de X₃ :

$$Y - f_1(X_1) - f'_1(X_2) = \varepsilon_2 = f''_1(X_3) + \varepsilon$$

Ces écarts ε résiduels peuvent s'expliquer du seul fait du hasard, mais aussi parce que la première estimation f₁(X₁) était peu précise car on ne tenait pas compte de X₂ et X₃. Pour améliorer la première estimation f₁(X₁), on portera dans le premier graphique non plus Y mais Y - f'₁(X₂) - f''₁(X₃) en fonction de X₁. Or, on constate que d'après (1) :

$$Y = f'_1(X_2) - f''_1(X_3) = f_1(X_1) + \varepsilon$$

Il suffit donc de porter dans le graphique 1 une deuxième série de points en ajoutant ε à la première estimation f₁(X₁). On obtient alors une deuxième f₂(X₁). Soit à présent e l'écart :

$$Y - f'_1(X_2) - f''_1(X_3) - f_2(X_1) = \varepsilon$$

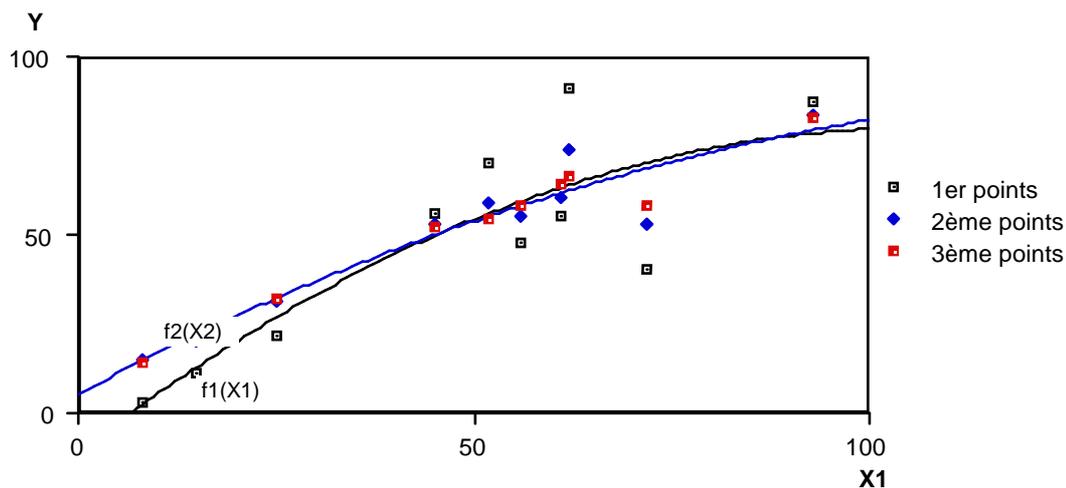
Cet écart ε est dû :

- au hasard ;
- aux erreurs commises sur la première estimation de f₁(X₁) ;
- à la non prise en compte de l'influence X₃ lors de l'évaluation de f'₁(X₂).

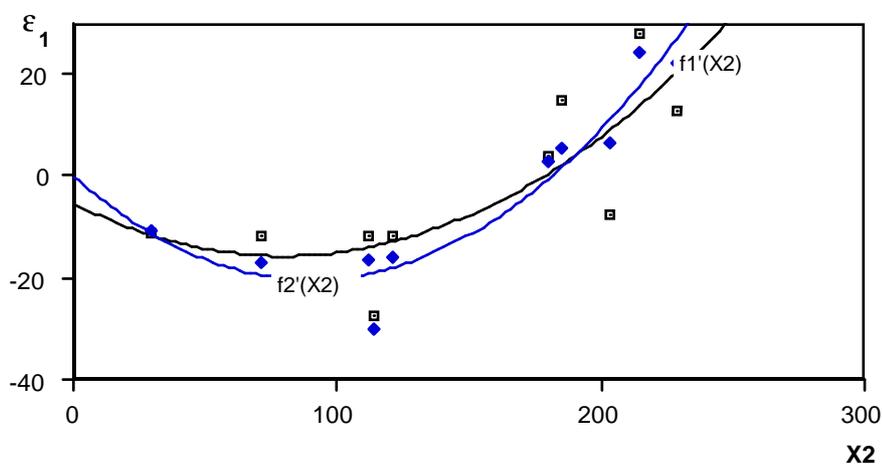
f'₁(X₂) peut donc être amélioré en portant dans le graphique 2

$$Y - f_2(X_1) - f''_1(X_3) = f'_1(X_2) + \varepsilon \text{ en fonction de } X_2.$$

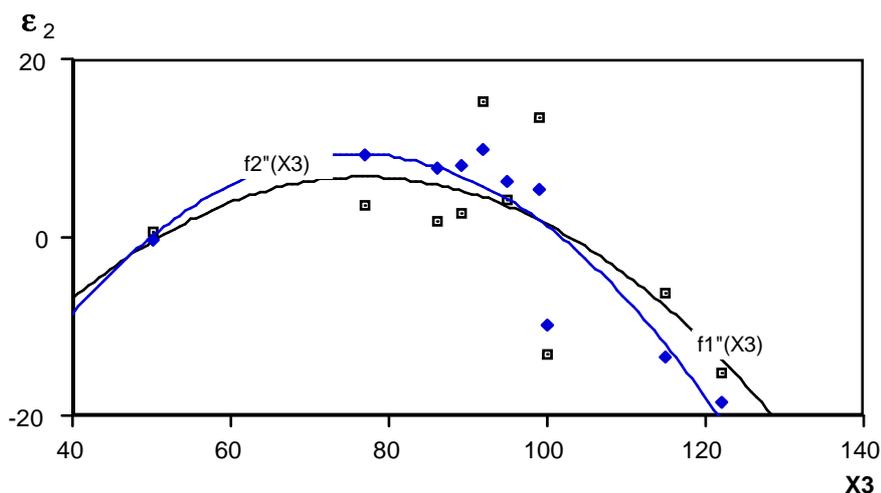
Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3



On obtient alors une deuxième estimation $f_2'(X_2)$. Le nouvel écart résiduel est porté dans le graphique 3 où on trace :

$$Y = f_2(X_1) - f_2'(X_2) = f_1''(X_3) + \epsilon \text{ en fonction de } X_3.$$

On revient alors au graphique 1 où on constate que la troisième série de points n'entraînerait pas de modification importante de $f_3(X_1)$ par rapport à $f_2(X_1)$.

On considère alors la régression retenue à la fin du deuxième tour comme définitive. Si cela n'avait pas été le cas, il conviendrait de procéder à une troisième série de modifications.

Si pour un mois de juillet on n'a pas observé les débits, on pourra estimer Y à partir des valeurs de X observées :

Par exemple :

$$\begin{aligned} X_1 &= 80 \text{ mm} & f_2(X_1) &= 63 \text{ mm} \\ X_2 &= 60 \text{ mm} & f_2'(X_2) &= -20 \text{ mm} \\ X_3 &= 20 \text{ mm} & f_2''(X_3) &= 5 \text{ mm} \\ Y &= f_2(X_1) + f_2'(X_2) + f_2''(X_3) & &= 48 \text{ mm} \end{aligned}$$

Comme on vient de le voir, cette méthode graphique est de mise en oeuvre simple et elle peut s'appliquer à n'importe quel nombre de variable. Cependant, il convient d'être prudent sur le choix des courbes de régression ; en effet, dans l'exercice traité, on a utilisé par exemple des courbes qui sont au moins du deuxième degré ; on a donc ainsi ajusté implicitement 7 paramètres à partir de 10 points. Il est alors évident que le nombre de degrés de liberté est très faible et que la précision obtenue sur le graphique est assez illusoire. Il faudra donc toujours prendre soin de ne retenir que des courbes de régression dont la complexité se justifie par un nombre suffisant de points expérimentaux.

VIII.6.7. - Analyses en composantes principales

VIII.6.7.1 - Notions de base

On présentera ici l'analyse en composante principale (A.C.P.) sous une forme simplifiée mais adaptée aux utilisations en hydrologie de surface.

Soit une série de NECH observations sur NVAR variables. Ces variables peuvent être plus ou moins liées entre elles, et selon l'intensité de leur liaison, on peut réduire la taille de cet ensemble d'informations en se contentant d'un nombre inférieur à NVAR de variables qui permettent cependant de conserver la quasi-totalité de la variance de l'ensemble.

Soit X la matrice de départ :

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1 \text{ NECH}} \\ x_{21} & & & x_{ij} \\ \dots & & & \\ x_{\text{NVAR } 1} & & & x_{\text{NVAR NECH}} \end{bmatrix}$$

On construit la matrice \dot{X} des variables centrées réduites. Chaque élément x_{ij} se déduit de x_{ij} par :

$$x_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_i}{\sigma_{xi}} \quad \text{avec} \quad \bar{x}_i = \frac{1}{\text{NECH}} \cdot \sum x_{ij} \quad \text{et} \quad \sigma_{xi}^2 = \frac{1}{\text{NECH}} \cdot \sum (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

On cherche alors s'il existe un changement de base M qui transforme la matrice \dot{X} en une matrice Y dont les composantes soient indépendantes. Ceci se traduit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} Y Y^t &= M \dot{X} (M \dot{X})^t = M \dot{X} \dot{X}^t M^t = D \\ \left[\begin{array}{l} Y = M \dot{X} \text{ (Changement de base)} \\ Y Y^t = D \text{ (matrice diagonale, Indépendance des composantes)} \end{array} \right. \end{aligned}$$

On peut montrer que la matrice de changement de base M existe et est la matrice "modale" de $\dot{X} \dot{X}^t$. Chaque ligne de cette matrice représente les vecteurs propres normés de $\dot{X} \dot{X}^t$; $\dot{X} \dot{X}^t$ est la matrice des covariances qui représente à $\frac{1}{\text{NECH}}$ près la matrice des coefficients de corrélation totale.

Quant à D, c'est la matrice "spectrale" de $\dot{X} \dot{X}^t$, c'est-à-dire la matrice diagonale dont les termes sont les valeurs propres de $\dot{X} \dot{X}^t$.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{2,1} & \dots & \dots & a_{1 \text{ NVAR}} \\ a_{12} & \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\text{NVAR } 1} & \dots & \dots & \dots & a_{\text{NVAR NVAR}} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{\text{NVAR NVAR}} \end{bmatrix}$$

$$Y = M \dot{X}$$

$$M^{-1} Y = \dot{X} = M^t Y \quad \text{car } M^{-1} = M^t$$

$$\dot{X} \dot{X}^t = M^t Y (M^{-1} Y)^t = M^t Y Y^t M = M^t D M$$

Cette dernière formule permet d'évaluer d'une autre façon la variance des \dot{x}_i égale à 1 dans notre cas où les variables sont centrées réduites)

$$1 = \sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{NECH} \sum_{j=1}^{NVAR} a_{ij}^t \lambda_j a_{ji} = \frac{1}{NECH} \sum_{j=1}^{NVAR} a_{ji}^2 \lambda_j$$

La somme des variances des NVAR variables est égale à NVAR :

$$NVAR = \sum_{i=1}^{NVAR} \frac{1}{NECH} \sum_{j=1}^{NVAR} a_{ji}^2 \lambda_j = \frac{1}{NECH} \sum_{j=1}^{NVAR} \lambda_j \sum_{i=1}^{NVAR} a_{ji}^2$$

Or, les vecteurs propres étant normés, on doit avoir :

$$\sum_{i=1}^{NVAR} a_{ji}^2 = 1 \quad \text{et donc} \quad NVAR = \frac{1}{NECH} \sum_{j=1}^{NVAR} \lambda_j$$

Dans le cas particulier fréquent où au lieu de travailler sur la matrice des covariances $\dot{X} \dot{X}^t$ on travaille sur la matrice R des coefficients de corrélation, on a :

$$\dot{X} \dot{X}^t = NECH \cdot R \quad \text{d'où} \quad NECH = \sum_{j=1}^{NVAR} \lambda_j$$

Comme on vient de le constater, la somme des valeurs propres est proportionnelle à la variance totale des observations. Si on range les valeurs propres par ordre décroissant : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \geq \lambda_{NVAR}$, on constate que les valeurs propres deviennent très vite très petites. Il paraît donc justifié de ne retenir qu'un nombre n' inférieur à NVAR, de vecteur propre qui expliqueront un pourcentage p de la variance totale :

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{NVAR} \lambda_i} \lambda_1 * 100 \quad (\text{en } \%)$$

Nous pourrions donc condenser l'information contenue dans le tableau \dot{X} de dimension NVAR * NECH, par l'information contenue dans le tableau Y' de dimension n' * NECH. Y est le tableau correspondant aux n' premières lignes de Y.

Dans le cas où on travaille sur la matrice des coefficients de corrélation :

- chaque ligne i de Y correspond aux valeurs prises par une des composantes ; ces valeurs ont une moyenne nulle et une variance égale à 1 ;

- chaque terme a_{ij} de la matrice M de changement de base est tel que :

$$\rho_{C_j x_i} = \sqrt{\lambda_j} a_{ji}$$

$\rho_{C_j x_i}$ étant le coefficient de corrélation totale entre les valeurs prises pour la j^{ème} composante et la i^{ème} variable.

En conclusion, on pourra retenir que l'analyse en composante principale permet de réduire les observations sur NVAR variables liées entre elles en une série d'observations sur n' < NVAR variables indépendantes, chacune d'entre elles expliquant une part décroissante de la variance totale initiale.

L'A.C.P. est utilisée en hydrologie essentiellement dans les problèmes nécessitant un regroupement de variables (prévision, reconstitution de données manquantes, cartographie, etc.).

VIII.6.7.2 - Exemple pratique d'utilisation

Généralement, l'A.C.P. s'utilise pour un nombre important de variables. Dans le souci de rendre les calculs plus clairs et vérifiables "à la main", nous retiendrons le cas où les observations sont faites sur trois variables.

Mois	Seille à Metz	Veuzouze à Lunéville	Madon à Mirecourt
1	11,2	47,0	52,5
2	22,9	46,0	46,8
3	6,85	13,9	13,5
4	4,46	9,75	9,85
5	4,05	7,50	8,20
6	2,90	5,40	6,55
7	2,37	4,26	5,10
8	1,24	3,08	3,46
9	1,81	3,12	4,54
10	2,49	6,05	4,72
11	3,38	7,50	7,95
12	9,10	24,70	31,90
Moyenne	6,06	14,86	16,25
Ecart-type	5,85	15,25	16,65

Des lames d'eau, exprimées en mm, écoulées mensuellement en 1976 sont, représentées au tableau précédent. Les trois séries de 12 données permettent de construire la matrice des coefficients de corrélation :

$$R = \begin{bmatrix} (S) & (V) & (M) \\ 1 & 0,904 & 0,871 \\ 0,904 & 1 & 0,993 \\ 0,871 & 0,993 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (S) \\ (V) \\ (M) \end{matrix}$$

Pour calculer les valeurs propres de cette matrice, on résout l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0,904 & 0,871 \\ 0,904 & 1 - \lambda & 0,993 \\ 0,871 & 0,993 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

soit :

$$(1 - \lambda)^3 + 2(0,904 * 0,993 * 0,871) - (1 - \lambda)(0,904)^2 + 0,871^2 + 0,993^2 = 0$$

$$(1 - \lambda)^3 - 2,57(1 - \lambda) + 1,57 = 0$$

$$\lambda_1 = 2,85 \text{ avec } \lambda_2 = 0,149 \text{ et } \lambda_3 = 0,00434$$

On vérifie bien que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3$

On peut affirmer que la première composante expliquera $\frac{2,85}{3} * 100 = 95 \%$ de la variance totale.

Les deux premières en expliqueront $\frac{2,85 + 0,149}{3} * 100 = 99,86 \%$.

*** Calcul des vecteurs propres normés :**

Ces vecteurs seront obtenus en résolvant les systèmes suivants :

$$R \times \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} \text{ et } \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1$$

En posant ...

$$R = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \alpha_i + a\beta_i + b\gamma_i = \lambda_i \alpha_i \\ a\alpha_i + \beta_i + c\gamma_i = \lambda_i \beta_i \\ b\alpha_i + c\beta_i + \gamma_i = \lambda_i \gamma_i \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} * \frac{\alpha_i}{\lambda_i - 1} = \frac{a\beta_i + b\gamma_i}{\lambda_i - 1} \\ * \frac{\gamma_i}{\beta_i} = \frac{\lambda_i - 1 - \frac{a^2}{\lambda_i - 1}}{c + \frac{ab}{\lambda_i - 1}} \\ * \beta_i = \frac{1}{1 + k_i^2 + \frac{(a + bk_i)^2}{-1}} \end{matrix}$$

D'où l'on tire :

$$M = \begin{bmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \lambda^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \lambda^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \lambda^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,56 & 0,59 & 0,58 \\ -0,81 & 0,30 & 0,49 \\ -0,11 & 0,75 & -0,65 \end{bmatrix}$$

On peut vérifier que chaque ligne de M correspond bien à un vecteur unité et que ces trois vecteurs sont orthogonaux.

*** Calculs des valeurs des n' premières composantes :**

En faisant le calcul de Y de la façon suivante : $Y = M \dot{X}$

Et on obtient des valeurs de Y qui ont pour variance $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$. Généralement, on préfère que les composantes Y' soient centrées réduites ; on effectuera donc le calcul des valeurs prises par les composantes par la formule :

$$M' = \begin{bmatrix} \alpha^1/\sqrt{\lambda^1} & \beta^1/\sqrt{\lambda^1} & \gamma^1/\sqrt{\lambda^1} \\ \alpha^2/\sqrt{\lambda^2} & \beta^2/\sqrt{\lambda^2} & \gamma^2/\sqrt{\lambda^2} \\ \alpha^3/\sqrt{\lambda^3} & \beta^3/\sqrt{\lambda^3} & \gamma^3/\sqrt{\lambda^3} \end{bmatrix}$$

$$Y' = M' \dot{X}$$

Tout calcul fait, on a :

$$Y' = \begin{bmatrix} 1,70 & 2,20 & -0,03 & -0,32 & -0,43 & -0,57 & -0,65 & -0,77 & -0,72 & -0,61 & -0,47 & -0,69 \\ 2,42 & -2,10 & -0,52 & -0,16 & -0,25 & -0,07 & -0,05 & 0,17 & 0,05 & -0,03 & 0,03 & 0,58 \\ 1,00 & 0,24 & 0,66 & 0,43 & -0,13 & -0,37 & -0,22 & 0,19 & 0,56 & 1,25 & 0,20 & 2,68 \end{bmatrix}$$

On vérifie bien que chaque ligne de Y' correspond à une variable centrée réduite et que ces variables sont indépendantes.

La première ligne de Y' suffit à elle-seule pour expliquer 95 % de la variance totale ; on aurait donc pu se contenter de calculer cette seule ligne.

*** Relation entre variables initiales et composantes :**

Pour trouver les coefficients de corrélation totale entre composantes et variables, il suffit de repartir de la matrice M :

$$M = \begin{bmatrix} 0,56 & 0,59 & 0,58 \\ -0,81 & 0,30 & 0,49 \\ -0,11 & 0,75 & -0,65 \end{bmatrix}$$

En multipliant chaque ligne de M par $\sqrt{\lambda}$

$$R' = \begin{bmatrix} \sqrt{2,850} \times 0,56 & \sqrt{2,850} \times 0,59 & \sqrt{2,850} \times 0,58 \\ \sqrt{0,149} \times -0,81 & \sqrt{0,149} \times 0,30 & \sqrt{0,149} \times 0,49 \\ \sqrt{0,004} \times -0,12 & \sqrt{0,004} \times 0,75 & \sqrt{0,0045} \times -0,65 \end{bmatrix}$$

$$R' = \begin{bmatrix} 0,90 & 0,94 & 0,93 \\ -0,32 & 0,12 & 0,19 \\ -0,001 & 0,05 & -0,004 \end{bmatrix} \begin{matrix} (C1) \\ (C2) \\ (C3) \end{matrix}$$

On constate bien que seuls les coefficients de corrélation avec la première composante (1ère ligne) sont significatifs puisqu'elle explique à elle-seule 95 % de la variance totale.

Si on ne retient que les deux premières composantes, on pourra représenter dans le plan l'ensemble des résultats.

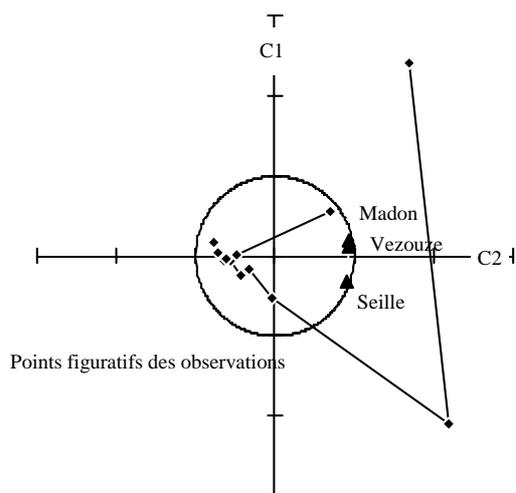
Comme l'indique la figure jointe, on peut porter dans un graphe orthonormé, suivant les deux premières composantes, chacune des observations (points notés 1 à 12 d'après la matrice Y').

Les valeurs prises par la première composante permettent de trancher entre les mois à fort et à faible écoulements. L'interprétation sur C2 est plus hasardeuse puisque la variance expliquée par C2 est suffisamment faible pour pouvoir être due au seul fait du hasard.

Par ailleurs, la matrice R' nous permet également de faire figurer dans ce graphique les points représentatifs des variables :

- l'abscisse mesure la variance expliquée par C1 ;

- l'ordonnée mesure la variance expliquée par C2 ;
- la distance à l'origine des axes mesure la variance expliquée par C1 et C2.



On constate bien que ces points sont voisins du cercle de rayon unité (100 % de la variance expliquée) puisque C3 non pris en compte n'explique que moins de 1 % de la variance.

Dans ce graphique, on constate que les régimes de la Vezouze et du Madon sont quasiment identiques alors que le régime de la Seille en diffère légèrement (la deuxième composante permet cette distinction).

On retiendra de cet exemple que les lames d'eau écoulées sur ces trois bassins peuvent se retrouver à partir de la seule première ligne de la matrice :

$$R' = \begin{bmatrix} Y' = y_1 & y_2 & \dots & y_{12} \end{bmatrix}$$

Les lames x_{ij} seront à la station i au mois j estimées par \hat{x}_{ij} :

$$\frac{x_{ij} - \bar{x}_i}{\sigma_{xi}} = \sigma_{c1} x_i y_j$$

VIII.7. - TECHNIQUES DE CRITIQUE DES DONNEES

Quelle que soit la façon dont les données sont obtenues, il y aura toujours le risque de rencontrer des valeurs erronées. Ces erreurs peuvent être systématiques (mauvais appareillage par exemple) ou accidentelles (mauvaise lecture, erreur lors d'un report, etc.).

Toute étude hydrologique devra donc commencer par une critique des données disponibles de façon à éliminer si possible les données les plus suspectes.

Ces techniques ne permettent pas de déceler les erreurs ; elles permettent seulement de mettre en évidence une valeur ou des séries de valeurs "anormales" compte tenu des hypothèses que l'on a pu faire sur le comportement de la série des variables étudiées.

Les anomalies dans les séries de données ayant été mises en évidence par ces techniques, c'est à l'hydrologue de "décider" si une donnée est "bonne" au "mauvaise". Ce choix s'appuie sur des arguments statistiques plus ou moins objectifs et sur la connaissance plus ou moins subjective que l'on a du phénomène.

Les techniques peuvent se diviser en deux grands groupes selon que l'on a affaire à des séries unidimensionnelles ou multidimensionnelles (le plus fréquent en hydrologie).

VIII.7.1. - Données unidimensionnelles

Supposons que l'on ait fait n observations sur une variable X ...par exemple $x_1, x_2 \dots, x_i \dots, x_n$... et que ces observations aient été échelonnées dans le temps ; on pourrait essayer de mettre en évidence soit des erreurs accidentelles, sous réserve qu'elles soient suffisamment fortes, soit des erreurs systématiques, sous réserve qu'elles soient suffisamment fortes ou persistantes.

VIII.7.1.1 - Fréquence des chiffres utilisés

Il est possible d'évaluer la "précision" avec laquelle un opérateur travaille en étudiant la fréquence d'apparition de chacun des dix chiffres de 0 à 9 sur le dernier chiffre significatif reproduit. Normalement, ces chiffres sont équiprobables. Par exemple, les chiffres 0 et 5, beaucoup plus fréquents, dénoteraient une fâcheuse tendance de l'observateur à arrondir les valeurs lues.

VIII.7.1.2 - Probabilité de chaque observation

A l'échantillon de n valeurs observées, on peut ajuster une loi de distribution statistique et calculer ainsi la fréquence théorique d'apparition de chaque élément de l'échantillon.

Les valeurs ayant été déterminées alors que leur fréquence théorique est rare, seront ainsi mises en évidence. Il faudra alors trancher sur d'autres critères entre les observations "exactes" mais qui étaient *a priori* peu probables (il est toujours possible d'observer en dix ans une crue millénaire) et les observations vraisemblablement erronées.

Il faut noter que sur des échantillons de faibles tailles, une valeur même fortement erronée peut passer inaperçue puisque la loi statistique est ajustée d'après l'échantillon entaché de cette erreur.

Prenons l'exemple d'une série de dix années d'observations de pluies journalières maximales annuelles :

63,7 52,7 76,6 60,3* 85,4 57,1 85,9 71,2 62,2 65,3

Généralement, on constate que ces pluies s'ajustent assez bien à des lois de Gumbel. Dans ce cas particulier, les paramètres d'une telle loi seraient :

$$x_0 = 62,9 \quad a = 8,9$$

Supposons que dans la septième année (*) une pluie journalière de 13 mm ait été décalée d'une colonne et donc lue 130 mm (ce qui, *a priori* n'est pas forcément absurde). Cette valeur deviendrait alors la hauteur journalière maximale annuelle au lieu de 60,3 mm.

Une telle hauteur a une fréquence au non-dépassement de :

$$F = 130 \text{ mm} = e^{-e^{-\frac{130-62,9}{8,9}}} = 0,9995 = 1 - \frac{1}{2000}$$

Une telle valeur de période de retour 2.000 ans

mériterait d'être vérifiée. En fait, cette erreur risque de ne pas apparaître, car en calculant les paramètres de la loi de Gumbel avec 130 au lieu de 60,3 mm, on obtient :

$$x'_0 = 65,0 \quad a' = 17,4$$

La fréquence théorique que l'on attribuera à 130 mm sera :

$$F'_{130 \text{ mm}} = e^{-e^{-\frac{130-65}{17,4}}} = 0,977 = 1 - \frac{1}{43}$$

... ce qui ne paraît plus du tout si exceptionnel que cela ! Et l'erreur de transcription signalée risque de ne pas être décelée.

VIII.7.1.3 - Analyse des séries non-autocorrélées

Dans ce cas, chaque observation est indépendante de celles qui la précèdent. On peut alors procéder au découpage de l'échantillon de taille n en deux sous-populations de taille n_1 et n_2 . On testera alors q_i les différences sont statistiquement significatives.

Comme on l'a vu précédemment pour la loi de Gauss, il est possible de tester les différences sur les moyennes et sur les variances.

Cependant, les tests sont peu puissants et ne peuvent donc signaler que des erreurs relativement grandes et systématiques sur une longue période.

Le choix du découpage de l'échantillon sera guidé par l'analyse du graphique donnant les valeurs cumulées en fonction du temps (comparaison des moyennes) ou du graphique donnant le cumul des carrés des écarts à la moyenne en fonction du temps (comparaison des variances).

VIII.7.1.4 - Autocorrélation

Certaines séries chronologiques sont autocorrélées comme par exemple les débits en période d'étiage. Chaque observation x_i à la date i dépend en partie des observations aux dates $i - 1$, $i - 2$, *etc.* Un schéma autorégressif simple permet d'associer à l'observation x_i la moyenne conditionnelle des x_i :

$$\bar{x}_i = f(x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-3}) + \varepsilon_i$$

la fonction f étant par exemple déterminée de façon à ce que $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ soit minimum.

On se retrouve alors dans le cas de données chronologiques multidimensionnelles (une série d'observations x_i et une série d'estimations \bar{x}_i). On pourra utiliser les techniques d'analyses des résidus décrits au paragraphe suivant.

VIII.7.2. - SERIES CHRONOLOGIQUES MULTIDIMENSIONNELLES

Les observations portent sur plusieurs variables de même nature (débits à différentes stations par exemple) ou de nature différente (pluie, débit, température, *etc.*) et sur une même période.

On supposera que les variables sont corrélées et que les distributions sont quasi-normales (un changement de variable sera fait éventuellement).

VIII.7.2.1 - Méthode des "doubles masses" (doubles cumuls)

Cette méthode a été longtemps utilisée car sa mise en œuvre est simple et ne nécessite pas de moyen de calcul particulier.

Elle permet de mettre en évidence des erreurs systématiques dans une série de données. Soit deux séries d'observations (x_i, y_i) sur des variables corrélées entre elles. Il existe alors une relation du type :

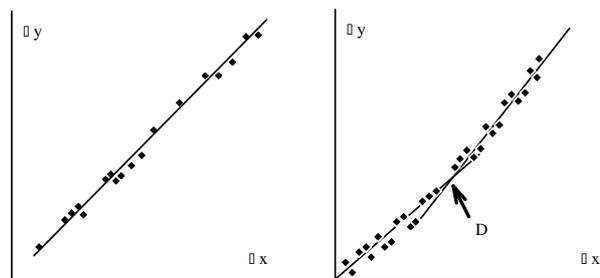
$$\hat{y}_i = ax_i + b$$

Si à partir d'une certaine date, on commet une erreur systématique sur x par exemple, les variables x et y seront encore corrélées mais avec des coefficients a' et b' .

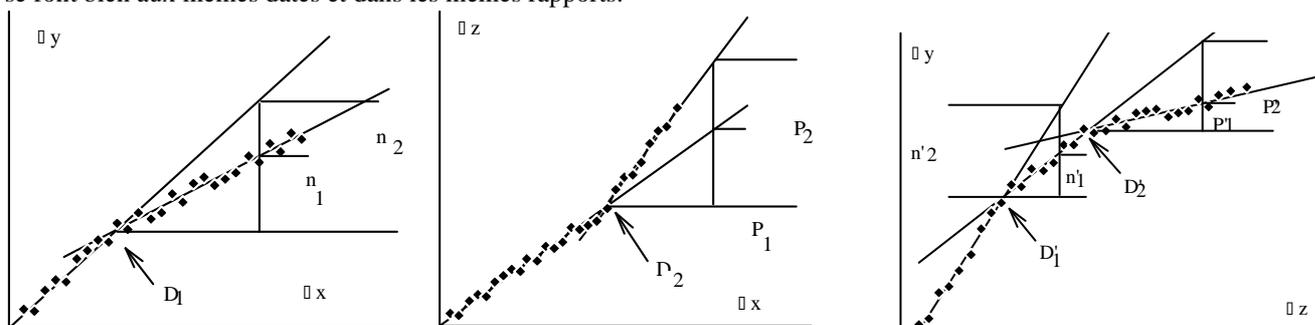
Si on porte dans un graphique x_i en fonction de y_i , il ne sera généralement pas possible de constater cet écart. Par contre, si on porte non plus x_i et y_i mais Y_i et X_i définis ainsi...

$$Y_i = \sum_{j=1}^i y_j \quad ; \quad X_i = \sum_{j=1}^i x_j$$

... on aura alors une fonction monotone croissante en fonction du temps. Si x et y sont stables, les points s'aligneront sur une droite de pente $\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$, mais si une des séries subit à partir d'une certaine date, une erreur systématique, on verra les points s'aligner selon deux droites :



Sur la figure de gauche, x et y sont stables alors que sur la figure de droite, on constate qu'à partir du point correspondant à la date D , on a commis une sous-estimation systématique de x ou une surestimation systématique de y . Pour lever cette ambiguïté, on effectuera les doubles masses sur plusieurs postes ou on vérifiera que les cassures se font bien aux mêmes dates et dans les mêmes rapports.



Sur les schémas suivants, on vérifierait les points suivants :

$$\left. \begin{array}{l} D_1 \cong D'_1 \\ D_2 \cong D'_2 \end{array} \right\} \text{les dates des cassures sont sensiblement les mêmes}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{n_2}{n_1} \cong \frac{n'_2}{n'_1} \\ \frac{P_2}{P_1} \cong \frac{P'_2}{P'_1} \end{array} \right\} \text{les erreurs systématiques sont sensiblement les mêmes}$$

Après ces vérifications, on peut alors reconstituer des séries homogènes en considérant que les mesures actuelles sont les bonnes :

- x est la variable stable ;
- les valeurs de y seront multipliées par le rapport $\frac{n_1}{n_2} \cong \frac{n'_1}{n'_2}$ pour la période antérieure à la date $D_1 \cong D'_1$;
- les valeurs de z seront multipliées par le rapport $\frac{P_1}{P_2} \cong \frac{P'_1}{P'_2}$ pour la période antérieure à la date $D_2 \cong D'_2$.

VIII.7.2.2 - Probabilité des résidus

Si comme précédemment, les variables x et y sont corrélées et que les hypothèses d'une distribution de Gauss à deux dimensions sont acceptables, on aura les relations suivantes :

$$\bar{y}_x = a x_i + b \quad \text{et} \quad y_i - \bar{y}_x = \varepsilon_i$$

ε_i est une variable gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type $\sigma_y \sqrt{1 - \sigma^2}$. Pour chaque valeur y_i , on calculera le ε_i correspondant et sa fréquence théorique. Les valeurs de ε_i ayant des fréquences très rares correspondent à des y_i douteux.

On peut, par cette méthode, détecter des erreurs accidentelles qui n'apparaissent pas à l'étude des distributions marginales.

VIII.7.2.3 - Cumul des résidus

Cette méthode beaucoup plus puissante que la méthode des doubles masses, nécessite cependant des calculs un peu plus longs exigeant pour le moins une calculatrice capable de stocker l'ensemble de l'information.

Comme on vient de le dire au paragraphe suivant, le résidu ε_i est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type $\sigma_y \sqrt{1 - \sigma^2}$.

On définit alors la variable Z_i , cumul des i premiers résidus :

$$Z_i = \sum_{j=1}^i \varepsilon_j$$

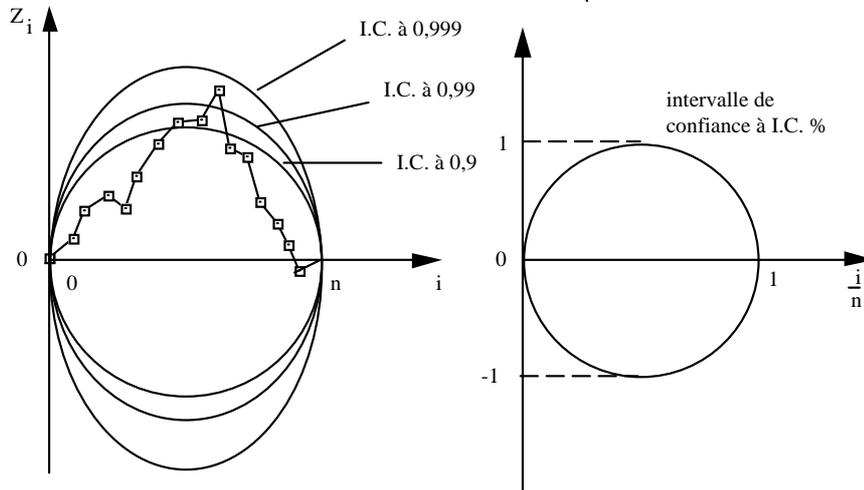
Cette variable Z_i est une v.a. de moyenne nulle et d'écart-type :

$$\sigma_{Z_i} = \sigma\varepsilon \sqrt{\frac{i(n-i)}{n-1}}$$

Si on se fixe par exemple un intervalle de confiance à 99 %, il y a une chance sur cent pour que Z_i soit extérieur au segment :

$$[-u_{0,995} \sigma_{Z_i}, +u_{0,995} \sigma_{Z_i}]$$

$$u_{0,995} = 2,573 \quad , \quad Z_i = \sigma\varepsilon \sqrt{\frac{j(n-j)}{n-1}}$$



Lorsque j varie, le lieu des limites des segments ayant la même probabilité de contenir Z_i sont des ellipses passant par $Z = 0$ pour $i = 0$ et $Z = 0$ pour $i = n$.

Sur les graphiques ci-dessus, on a porté les cumuls des résidus en fonction de i . Plusieurs ellipses ont été tracées en fonction des intervalles de confiance envisagés. L'écart cumulé sort, on le voit, de l'ellipse correspondant à I.C. = 99 %. Il est donc vraisemblable que cela ne soit pas dû au hasard. Pour des commodités de tracé, on préfère souvent porter Z_i en fonction de $\frac{i}{n}$.

On pose $Z'_i = \frac{2\sqrt{n-1}}{u_{IC} \sigma\varepsilon n} Z_i$ où u_{IC} est la variable réduite de Gauss correspondant à l'intervalle de confiance à IC %.

Dans un système d'axe orthonormé, l'ellipse correspondante est le cercle de diamètre 0 - 1 :

VIII.7.2.4 - Utilisation des composantes principales

L'A.C.P. peut permettre de mettre en évidence une variable aux observations douteuses. Supposons en effet que l'on dispose d'une série d'observations sur n variables dont on peut supposer qu'elles sont plus ou moins liées entre elles. L'A.C.P. permet de réduire l'information en deux ou trois premières composantes qui expliquent la plus grande partie de la variance. Cependant, si une des variables initiales est entachée d'erreurs, on verra apparaître une composante supplémentaire expliquant très peu de la variance totale mais fort bien corrélée avec la station entachée d'erreurs. Il suffit donc, pour détecter des variables suspectes, de chercher celles qui ont de forts coefficients de corrélation avec des composantes correspondant à de faibles valeurs propres.

Pour des données où on peut supposer une variation continue en fonction de la position géographique, on pourra tracer des courbes d'isocoefficient de corrélation avec la première composante, la seconde, etc.

Les singularités dans le tracé mettront en évidence les séries douteuses.

IX - TRAITEMENT DES DONNEES PLUVIOMETRIQUES

Dans un chapitre précédent, nous avons vu les problèmes liés à la mesure des pluies. On peut présenter les observations sous deux formes :

- des annuaires où sont récapitulés jour par jour (de 6 h à 6 h), les hauteurs de pluie, puis les totaux décennaires, mensuels et annuels. Cette présentation est celle rencontrée le plus fréquemment. Elle s'obtient à partir de relevés de pluviomètre ou de pluviographe ;

- des hyétoigrammes où figure la hauteur de pluie cumulée en fonction du temps. Un hyétoigramme représente donc un enregistrement pseudo-continu en fonction du temps. La vitesse de rotation entraîne un pas de temps minimum pour la lecture et pseudo-continu pour les hauteurs (connues à un basculement près, en général 1/10ème mm). Bien évidemment, ce type d'observation ne peut se faire qu'à partir d'un pluviographe ; il est donc beaucoup plus rare.

Quelles que soient les données de départ, on constate bien souvent des anomalies dans les séries pluviométriques. Il est pratiquement toujours nécessaire d'en faire une étude critique avant toute utilisation. La plupart des techniques de critique de données citées plus haut sont adaptables aux hauteurs de pluies.

Supposons terminées les phases d'acquisition et de critique des données. Quel traitement peut-on être amené à leur faire subir ?

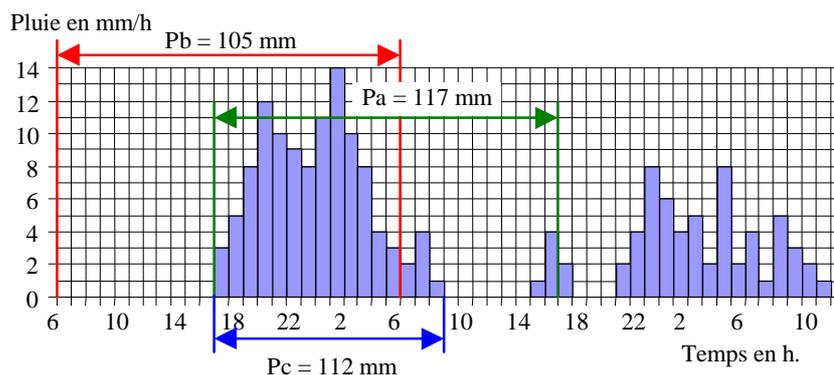
IX.1 - CHOIX DES VARIABLES

Ce choix dépend essentiellement du problème que l'on se pose depuis, par exemple, la conception d'un déversoir d'orage où le paramètre est la hauteur de pluie en quelques minutes jusqu'à l'alimentation d'une nappe où intervient essentiellement la hauteur de pluie annuelle. Mais, avant de rentrer dans ces considérations, on peut déjà définir différentes notions d'épisodes pluvieux.

IX.1.1 - Définition des épisodes pluvieux

On rencontre généralement trois définitions principales :

- Episode de durée constante fixée à l'avance, d'origines variables et que la pluie soit continue ou discontinue.
- Episode de durée constante fixée à l'avance, d'origines fixes et que la pluie soit continue ou discontinue.
- Episode de durée constante fixée à l'avance, d'origines variables et pour des pluies continues.



Par exemple, et comme le montre la figure ci-dessus, l'épisode pluvieux de 24 h, le plus fort de la période décrite, est :

- . 117 mm pour la définition a ;
- . 105 mm pour la définition b ;
- . 112 mm pour la définition c.

La définition c est peu usitée par les hydrologues. Elle sert surtout dans des études climatologiques où on s'intéresse à la statistique des averses en fonction de leur durée.

La définition a est la plus utile pour l'hydrologue car, en général, on s'intéresse au volume de pluie sur un temps déterminé ; malheureusement, c'est la définition b qui est la plus fréquemment utilisée puisque c'est la seule à s'adapter aux observations faites à des pluviomètres, les autres nécessitant des pluviogrammes.

IX.1.2 - Passage d'une définition à l'autre

Dans la pratique, on aura à passer de la définition b à la définition a. Nous ferons intervenir un coefficient correcteur dont la valeur (supérieure à 1 puisque b ne peut que sous-estimer les hauteurs de pluie), dépendra de la durée de la fréquence et des origines imposées. Ce coefficient correctif doit donc être étudié dans chaque région par comparaison des hauteurs lues sur un hyétoigramme avec celles lues au pluviomètre.

En première approximation, on pourra procéder à la correction dite "de Weiss". Soit $P_{t\Delta}$ la pluie sur une durée t déterminée à partir de plusieurs intervalles de durée Δ mais à origine fixe (définition b) et P_t la pluie sur la même durée t mais d'origine variable (définition a) ; on aura :

$$P_t = k_W P_{t\Delta}$$

avec coefficient correctif de Weiss :

$$k_W = \frac{t}{t - \frac{\Delta}{8}}$$

Prenons l'exemple des pluies sur 48 h déterminées à partir d'un pluviomètre : $t = 48 \text{ h}$; $\Delta = 24 \text{ h}$

$$k_W = \frac{48}{48 - \frac{24}{8}} = 1,07$$

Pour les pluies de 24 h, la correction de Weiss à apporter à la pluie sur un jour P_j est :

$$P_{24h} = 1,14 P_{1j}$$

Dans la pratique, le coefficient correcteur exact pour 24 h varie de 1,10 à 1,16 selon les cas et les circonstances .

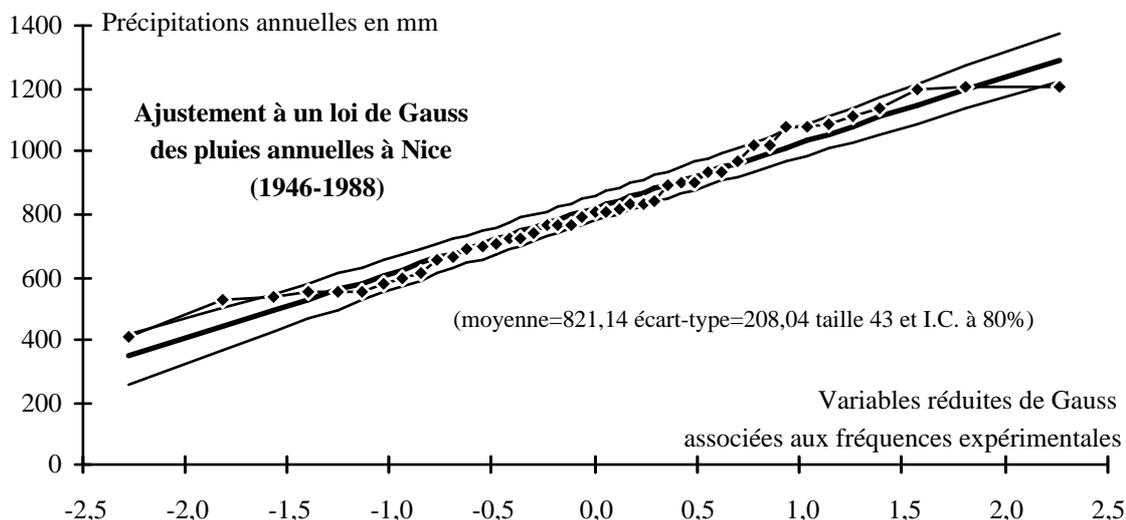
IX.2 - ETUDE STATISTIQUE DES PLUIES PONCTUELLES

Nous nous intéresserons ici uniquement aux pluies ponctuelles, c'est-à-dire à celles enregistrées en un poste d'observation, sans tenir compte de leur extension spatiale.

IX.2.1 - Hauteurs de pluies annuelles

Cette variable est la somme de 365 hauteurs journalières qui peuvent être considérées comme des variables aléatoires indépendantes. On se trouve donc dans les conditions d'application du théorème central limite (en fait il vaudrait mieux dire que la pluie annuelle est la somme d'une cinquantaine d'épisode pluvieux).

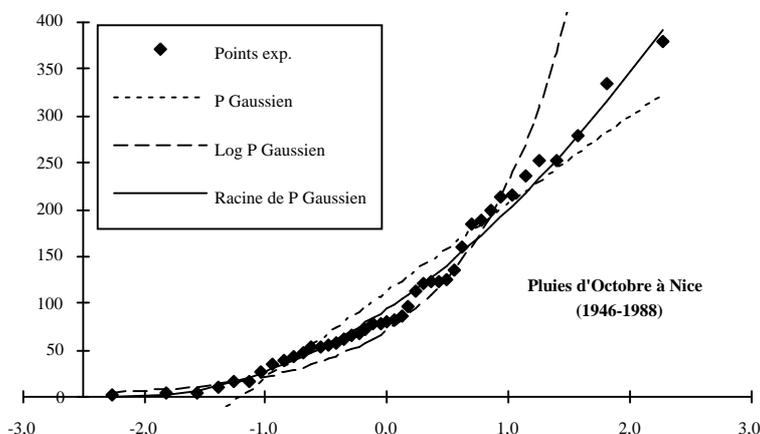
En effet, on constate bien, sous nos climats, que les hauteurs de pluies annuelles s'ajustent à des lois de Gauss. L'ajustement est d'autant meilleur que la hauteur est plus grande et les jours de pluies plus nombreux dans l'année. Sous des climats plus secs, les pluies annuelles sont distribuées selon des lois à dissymétrie positive.



IX.2.2 - Hauteurs de pluies mensuelles

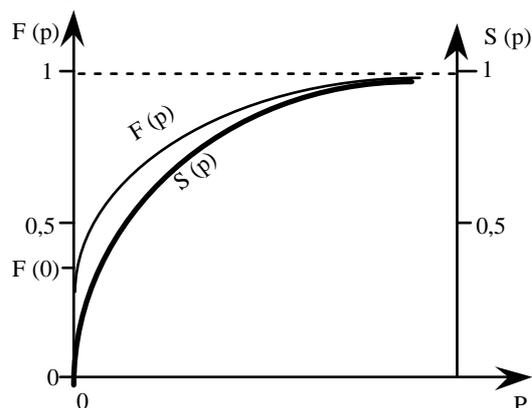
Les hauteurs de pluies mensuelles se distribuent généralement selon des lois à dissymétrie positive. Si parfois les distributions sont à peu près gaussiennes, le plus souvent c'est la variable $\log P$ ou \sqrt{P} qui est distribuée selon une loi de Gauss.

Dans certains cas, et durant les mois secs, la borne inférieure $P = 0$ de l'intervalle de variation de P est atteint avec une fréquence non nulle. On se reportera alors à ce qui sera dit plus loin pour les hauteurs de pluies journalières.



IX.2.3 - Hauteurs de pluies journalières

Considérons les relevés journaliers d'un poste pluviométrique durant n années. On dispose donc de n * 365 hauteurs de pluies dont certaines sont nulles. En fait, cet échantillon n'est pas homogène et un premier découpage assez grossier nous permettrait de considérer d'une part, les jours de pluies nulles et d'autre part, les jours de pluies non nulles.



Sur le graphique ci-contre, nous avons schématisé la fonction de répartition des hauteurs de pluies journalières F (P). On constate que le domaine de variation de P est (0, + 8t) mais que l'on a P = 0 avec une fréquence F₀ non nulle.

Parmi les lois de distribution citées précédemment, il n'en existe pas qui permettent cet ajustement direct. Une solution à ce problème est d'utiliser une loi de distribution tronquée : en effet, si on ne s'intéresse qu'à la population des pluies non nulles, la fréquence au non-dépassement s'écrit ainsi :

$$S(P) = \frac{F(P) - F_0}{1 - F_0}$$

S (P) décrit bien l'intervalle (0 - 1) lorsque P varie de 0 à l'infini. S (P) peut donc être figurée par une loi classique comme par exemple la loi de Galton.

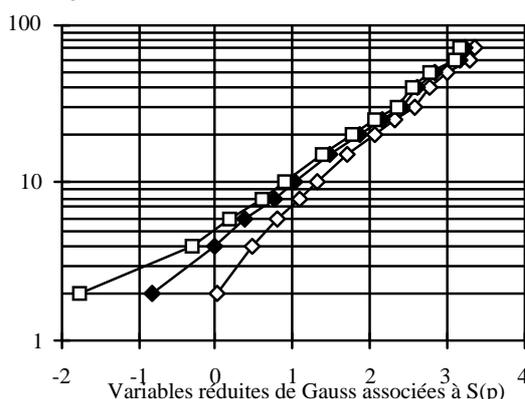
Contrairement à ce que l'on pourrait penser, F₀ n'est pas simple à déterminer. En effet, F₀ représente la fréquence des pluies nulles. Or, dans les relevés pluviométriques, on trouve fréquemment des hauteurs d'eau non nulles mais très faibles de l'ordre du 1/10ème de mm. Ces "précipitations" ne sont souvent que de la condensation des brouillards matinaux ou de la rosée et de toute façon d'une autre nature que les pluies. Il n'est donc pas normal de compter ces jours comme des jours de pluies car on sous-estimerait F₀. D'autres raisons justifient également que l'on considère F₀ plutôt comme un paramètre d'ajustement, ce que l'on fait dans la pratique.

La figure ci-contre illustre comment on peut ajuster les pluies journalières à Nancy-Tomblaine à une loi de Galton tronquée.

F₀ est déterminé par tâtonnements jusqu'à ce que l'alignement des points soit correct :

- les points les plus à droite correspondent à un F₀= 0,49 ;
- ceux de droite à F₀ = 0,75 ;
- enfin les points noirs les mieux alignés correspondent à F₀ = 0,49.

Pluies journalières en mm



Depuis les années 1983-1984, l'E.D.F. préconise d'ajuster la distribution des pluies journalières à une somme de deux exponentielles :

$$F(x) = 1 - \alpha e^{-x/a} - \beta e^{-x/b} \quad x \in] 0, 8 [$$

dont la densité de probabilité est $f(x) = \frac{\alpha}{a} e^{-x/a} + \frac{\beta}{b} e^{-x/b}$ [f (0) ≠ 0]

Cette loi a donc quatre paramètres ; si on remarque que F (0) = 1 - α - β, on voit que ces quatre paramètres liés par une relation pourront par exemple être ajustés par la méthode des moments :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 - F_0 = \theta & \alpha a^2 + \beta b^2 &= \frac{(\bar{x}^2 + \sigma^2)}{2} = K \\ \alpha a + \beta b &= \bar{x} & \alpha a^3 + \beta b^3 &= \frac{(3\bar{x} \sigma^2 + \bar{x}^3 + \mu_3)}{6} = Q \end{aligned}$$

Ce système peut se résoudre assez aisément mais il semble que l'on se heurte assez fréquemment à des instabilités de calcul dues à l'emploi de μ³ (fortes incertitudes d'échantillonnage). DUBAND de l'E.D.F. préconise, pour les pluies journalières, d'imposer en plus $\alpha = \frac{\bar{x}^2}{\sigma^2}$. En effet, il constate expérimentalement que cette condition permet de retrouver correctement la distribution statistique des pluies extrêmes. Si l'on fait croître indéfiniment x et que l'on ait choisi a > b (la formule est significative en a, b, α et β), on remarque :

$$F(x) = 1 - \alpha e^{-x/a} \left[1 + \frac{\beta e^{-x/b}}{\alpha e^{-x/a}} \right] = 1 - \alpha e^{-x/a} \left[1 + \frac{\beta}{\alpha} e^{-x/a-x/b} \right]$$

$$F(x) = 1 - \alpha e^{-x/a} \left[1 + \frac{\beta}{\alpha} e^{-x(b-a)/ab} \right]$$

Le terme $b - a$ étant négatif ($a > b$) lorsque x tend vers l'infini, on aura donc :

$$F(x) \cong 1 - \alpha e^{-x/a}$$

La somme de deux exponentielles tend donc asymptotiquement vers une loi exponentielle dont le gradex est le plus fort des deux paramètres (a ou b).

L'ajustement par la méthode des moments se ramène alors au seul calcul des deux premiers paramètres et l'on obtient les équations suivantes :

$$b = n \frac{\sigma^2 + am}{\sigma^2 \theta - m^2} \quad a = \frac{m^2 \sqrt{2} + \sqrt{\theta^2 \sigma^4 + (2 - \theta)m^4 - \theta(3 - \theta)m^2 \sigma^2}}{m\theta \sqrt{2}}$$

et bien sûr : $\alpha = \frac{m^2}{\sigma^2}$; $\beta = 1 - F_0 - \alpha$.

Il faut insister sur le fait que cette méthodologie proposée par DUBAND est conçue pour déterminer le gradex des pluies journalières extrêmes et que cette méthode n'est pas universellement admise. Il faut l'employer avec précaution, surtout si on travaille sur des pluies de moins de 24 h.

IX.2.4 - Hauteurs des pluies extrêmes

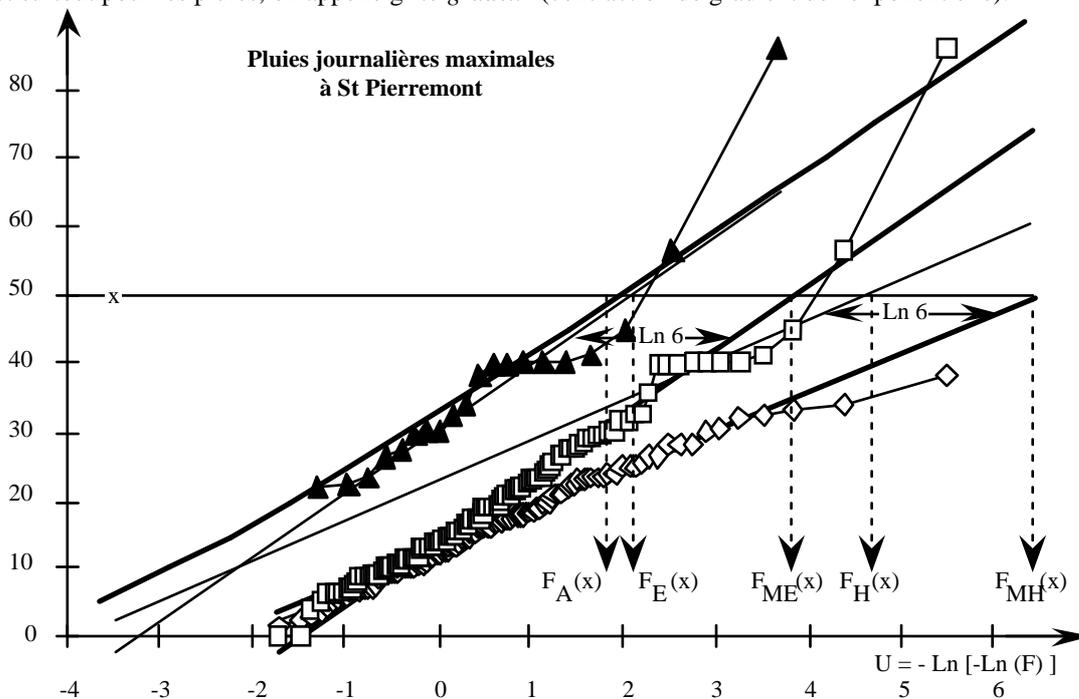
La protection contre les dégâts des eaux nécessite de s'intéresser aux pluies extrêmes. Ce peut être les pluies journalières maximales annuelles, les pluies en une heure maximales mensuelles ou décadaires, etc.

Parmi les lois de distribution qui peuvent rendre compte de la statistique des phénomènes extrêmes, c'est la loi de Gumbel qui s'adapte le mieux aux variables pluviométriques.

Comme nous l'avons vu précédemment, la loi de Gumbel a pour expression :

$$F(x) e^{-e^{-u}} \quad \text{avec } u = \frac{x - x_0}{g}$$

Dans un graphique de Gumbel [$x, -\text{Ln}(-\text{Ln} F)$], le terme g représente la pente de la droite d'ajustement. Bien souvent et surtout pour les pluies, on appelle g "le gradex" (contraction de gradient de l'exponentielle).



Ce gradex présente une constance quelle que soit la période sur laquelle on prend la pluie maximale. Prenons l'exemple des pluies journalières maximales mensuelles à St Pierremont. On peut découper l'année en deux saisons : un "été" de mai à octobre et un "hiver" de novembre à avril. A l'intérieur d'une saison, on pourra supposer que les pluies journalières maximales mensuelles sont équiprobables. Soit $F_{ME}(x)$ la fréquence au non-dépassement de la valeur x

pour un mois d'été ; la probabilité pour que x soit non-dépassé durant les six mois de l'été est bien évidemment $F_{ME}(x)^6$; or, c'est la définition de la fréquence au non-dépassement $F_E(x)$ de la valeur x pour l'été :

$$F_E(x) = F_{ME}(x)^6 \quad \text{or } u = -\text{Ln}\{-\text{Ln}(F)\}$$

$$\text{Ln}\{F_E(x)\} = 6 \text{Ln}\{F_{ME}(x)\}$$

$$\text{Ln}[-\text{Ln}\{F_E(x)\}] = \text{Ln} 6 + \text{Ln}[-\text{Ln}\{F_{ME}(x)\}]$$

$$-\text{Ln}[-\text{Ln}\{F_E(x)\}] = -\text{Ln}\{F_{ME}(x)\} - \text{Ln}(6)$$

$$u_{F_E} = u_{F_{ME}} - \text{Ln}(6)$$

On constate que si les pluies maximales mensuelles d'été sont distribuées selon une loi de Gumbel, les pluies maximales saisonnières d'été le sont aussi. Les lois de distribution sont représentées dans un graphique de Gumbel par des droites parallèles distantes de $\text{Ln} 6$ et présentant donc le même gradex.

Par contre, si les pluies d'été et les pluies d'hiver ont des distributions gumbéliennes différentes $F_E(x)$ et $F_H(x)$, il n'y a pas de raison *a priori* pour que les pluies maximales annuelles soient gumbéliennes :

$$F_A(x) = F_H(x) \cdot F_E(x)$$

IX.2.5 - Comblement des lacunes dans des séries pluviométriques

Bien des études de synthèse sur les hauteurs de pluie annuelles, nécessitent de connaître les précipitations sur différentes stations mais sur une même période. C'est le cas par exemple pour l'établissement de cartes pluviométriques moyennes interannuelles, où il est vivement recommandé de travailler sur une période commune trentenaire. Malheureusement les nv postes pluviométriques n'ont pas tous été observés durant les no années de la période de référence et la matrice des données se présente donc généralement ainsi :

$$[x] = \begin{array}{c|cccccc} & x(1,1) & \text{inconnu} & \dots & x(1,j) & \dots & x(1,nv) \\ & x(2,1) & x(2,2) & \dots & x(2,j) & \dots & \text{inconnu} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & x(i,1) & x(i,2) & \dots & x(i,j) & \dots & x(i,nv) \\ & \text{inconnu} & \dots & \dots & \text{inconnu} & \dots & \dots \\ & \dots & \text{inconnu} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & x(no,1) & x(no,2) & \dots & x(no,j) & \dots & x(no,nv) \end{array}$$

Si le nombre de poste nv est grand, il est quasiment impossible de "boucher" les trous un par un par des techniques de régression. Le choix des variables explicatives est vite inextricable et de plus les erreurs accidentelles ou systématiques qui ne manquent pas d'affecter certaines observations, sont ainsi répétées. Nous proposons donc une méthode qui permet de combler rapidement et simplement les lacunes avec la partie la plus fiable de ce tableau de données.

Nous calculerons tout d'abord les moyennes expérimentales $M_{xo}(j)$ et les écart-types expérimentaux $\sigma_{xo}(j)$ des précipitations pour chaque station j et sur les seules années réellement observées :

$$[M_{xo}] = \begin{array}{c|cccccc} & M_{xo}(1) & M_{xo}(2) & \dots & M_{xo}(j) & \dots & M_{xo}(nv) \\ [\sigma_{xo}] = & \sigma_{xo}(1) & \sigma_{xo}(2) & \dots & \sigma_{xo}(j) & \dots & \sigma_{xo}(nv) \end{array}$$

$$\text{On peut alors évaluer la matrice des valeurs centrées réduites : } u(i,j) = \frac{x(i,j) - M_{xo}(j)}{\sigma_{xo}(j)}$$

et calculer pour chaque observation la moyenne des valeurs centrées réduites disponibles : $\bar{u}(i)$

$$[u] = \begin{array}{c|cccccc|c} & u(1,1) & \text{inconnu} & \dots & u(1,j) & \dots & u(1,nv) & \bar{u}(1) \\ & u(2,1) & u(2,2) & \dots & u(2,j) & \dots & \text{inconnu} & \bar{u}(2) \\ & \dots \\ & u(i,1) & u(i,2) & \dots & u(i,j) & \dots & u(i,nv) & \bar{u}(i) \\ & \text{inconnu} & \dots & \dots & \text{inconnu} & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & \text{inconnu} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & u(no,1) & u(no,2) & \dots & u(no,j) & \dots & u(no,nv) & \bar{u}(no) \end{array}$$

On peut alors dans une première étape remplacer chaque valeur inconnue $x(i,j)$ par une valeur $x_{e_0}(i,j) = \frac{\bar{u}(i) - M_{xo}(j)}{\sigma_{xo}(j)}$ correspondant à la variable réduite moyenne pour cette observation. On obtient alors une première matrice complète $[x_0] : x_0(i,j)$

$$[x_0] = \begin{pmatrix} x(1,1) & \mathbf{x_0(1,2)} & \dots & x(1,j) & \dots & x(1,nv) \\ x(2,1) & x(2,2) & \dots & x(2,j) & \dots & \mathbf{x_0(2,nv)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(i,1) & x(i,2) & \dots & x(i,j) & \dots & x(i,nv) \\ \mathbf{x_0(i+1,1)} & \dots & \dots & \mathbf{x_0(i+1,j)} & \dots & \dots \\ \dots & \mathbf{x_0(no-1,2)} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(no,1) & x(no,2) & \dots & x(no,j) & \dots & x(no,nv) \end{pmatrix}$$

Nous effectuons alors une A.C.P. sur cette matrice $[x_0]$ et obtenons les projections des variables $[a_1]$ et des observations $[c_1]$ sur les k seules premières composantes principales pouvant avoir une signification physique :

$$[a_1] = \begin{pmatrix} a_1(1,1) & a_1(1,2) & \dots & a_1(1,j) & \dots & a_1(1,nv) \\ a_1(2,1) & a_1(2,2) & \dots & a_1(2,j) & \dots & a_1(2,nv) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1(k,1) & a_1(k,2) & \dots & a_1(k,j) & \dots & a_1(k,nv) \end{pmatrix} \quad [c_1] = \begin{pmatrix} c_1(1,1) & c_1(1,2) & \dots & c_1(1,k) \\ c_1(2,1) & c_1(2,2) & \dots & c_1(2,k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1(i,1) & c_1(i,2) & \dots & c_1(i,k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1(no,1) & c_1(no,2) & \dots & c_1(no,k) \end{pmatrix}$$

Ainsi que les matrices des moyennes et écarts-types :

$$\begin{matrix} [Mx_1] = \\ [Sx_1] = \end{matrix} \begin{pmatrix} Mx_1(1) & Mx_1(2) & \dots & Mx_1(j) & \dots & Mx_1(nv) \\ Sx_1(1) & Sx_1(2) & \dots & Sx_1(j) & \dots & Sx_1(nv) \end{pmatrix}$$

Il est alors possible de reconstituer chaque observation manquante $x(i,j)$ par une nouvelle valeur estimée $x_{e1}(i,j)$

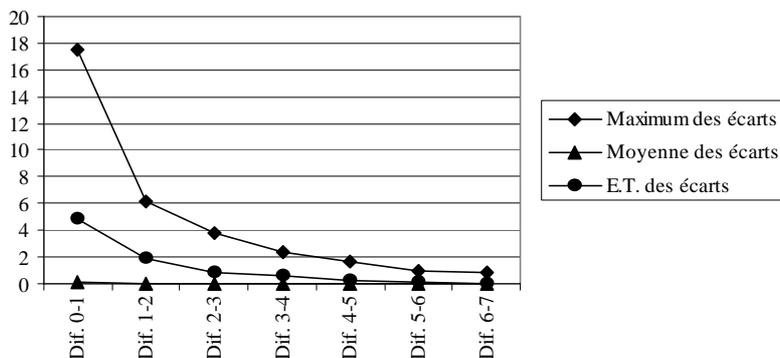
:

$$x_{e1}(i,j) = Mx_1(j) + Sx_1(j) * \{ a_1(1,j) c_1(i,1) + a_1(2,j) c_1(i,2) + \dots + a_1(k,j) c_1(i,k) \}$$

Cette estimation n'est pas très correcte puisque l'A.C.P. a été effectuée sur une matrice "bouchée" à partir de moyennes interannuelles, cependant $x_{e1}(i,j)$ est une meilleure estimation que $x_{e0}(i,j)$ puisqu'elle tient compte des observations aux autres stations pour cette année j . On peut donc réitérer le processus en remplaçant dans la matrice $[x_0]$ chaque $x_{e0}(i,j)$ par les $x_{e1}(i,j)$ adaptés. On obtient ainsi une nouvelle matrice $[x_1]$:

$$[x_1] = \begin{pmatrix} x(1,1) & \mathbf{x_{e1}(1,2)} & \dots & x(1,j) & \dots & x(1,nv) \\ x(2,1) & x(2,2) & \dots & x(2,j) & \dots & \mathbf{x_{e1}(2,nv)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(i,1) & x(i,2) & \dots & x(i,j) & \dots & x(i,nv) \\ \mathbf{x_{e1}(i,1)} & \dots & \dots & \mathbf{x_{e1}(i,j)} & \dots & \dots \\ \dots & \mathbf{x_{e1}(i,2)} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(no,1) & x(no,2) & \dots & x(no,j) & \dots & x(no,nv) \end{pmatrix}$$

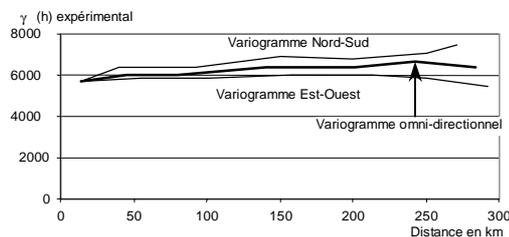
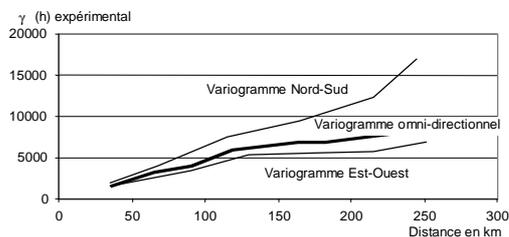
On recommence alors une A.C.P. sur la matrice $[x_1]$ permettant d'obtenir de nouvelles matrices $[c_2]$, $[a_2]$, $[Mx_2]$ et $[Sx_2]$ d'où l'on tirera de nouvelles estimations $x_{e2}(i,j)$.



A chaque itération nous modifions les estimations pour les observations manquantes. A titre d'exemple on citera l'étude de 120 postes pluviométriques d'Algérie sur une période commune de 60 ans où nous avons 1854 stations-années manquantes sur 7200 (25% de "trous"). Nous avons à chaque fois noté la moyenne et l'écart-type des modifications, ainsi que la plus forte modification en valeur absolue. Ces résultats sont reportés sur le graphe ci-contre.

On y constate que toutes les caractéristiques des écarts d'une itération à l'autre suivent sensiblement une exponentielle décroissante. Ici comme dans d'autres tentatives on constate que le processus est stabilisé dès la 6ème ou 7ème itérations.

La difficulté réside dans le choix du nombre de composantes principales à utiliser dans les reconstitutions. Nous préconisons bien sûr, de n'utiliser que les composantes ayant une signification physique. La pluie ayant à priori une structure spatiale, on peut prèjuger que seules les composantes ayant également une structure spatiale sont physiquement significatives. Ainsi le choix des composantes à utiliser se basera sur l'analyse du variogramme des projections des variables sur les composantes :



Comportement à l'origine de la troisième composante Comportement à l'origine de la quatrième composante

Dans cet exemple algérien, les trois premières composantes ont une structure spatiale nette (mais anisotrope), par contre la quatrième composante est pépitique pure. On ne prendra donc en compte dans les reconstitutions que les trois premières composantes.

IX.3 - ETUDE DE LA PLUIE DANS L'ESPACE

L'apparition de précipitations est liée au mouvement des masses d'air ; or, leur déplacement est fortement influencé par le relief et cela à différentes échelles, par exemple le massif montagneux (effet de foehn) ou le relief de côte (phénomène d'abris). Etudier la pluie dans l'espace ne peut donc généralement se faire qu'en tenant compte du relief à moins que la densité de pluviomètres soit suffisante, ce que l'on rencontre rarement et que sur de petites surfaces.

IX.3.1 - Pluie et relief

Il est difficile de dégager des lois quantitatives traduisant l'effet du relief sur la pluie. En effet, ces lois dépendent de la nature de la pluie à laquelle on s'intéresse, hauteurs de pluies annuelles, pluie journalière extrême d'une saison, etc.

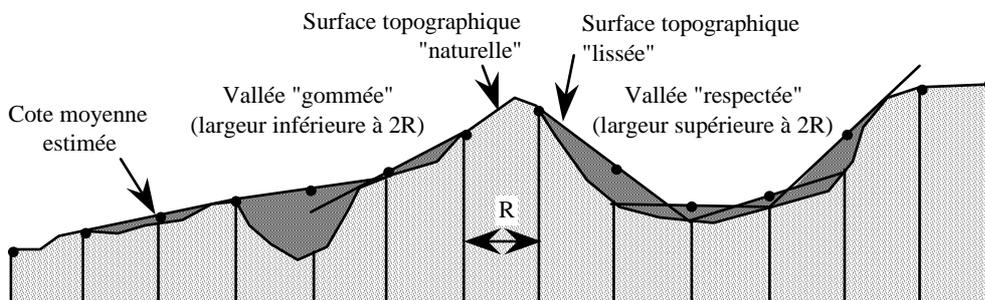
Nous proposons de faire intervenir le relief d'après deux paramètres essentiels :

IX.3.1.1 - L'altitude

Le paramètre altitude joue un rôle très important mais bien évidemment, ce n'est pas l'altitude exacte du point où l'on fait la mesure mais plutôt l'altitude moyenne autour de ce point.

Parmi les nombreuses façons de calculer les altitudes moyennes, une méthode qui donne de bons résultats consiste à prendre l'altitude au centre d'un disque de rayon R que l'on positionnerait par la pensée dans la situation la plus basse qu'il peut prendre sur la topographie, le centre du cercle étant à la verticale du point de mesure. Le rayon R optimum dépend des régions mais il est de l'ordre de 1 à 3 km.

L'intérêt de cette méthode est de supprimer les vallées dont la faible amplitude ne permet pas une influence sur le déplacement des masses d'air.



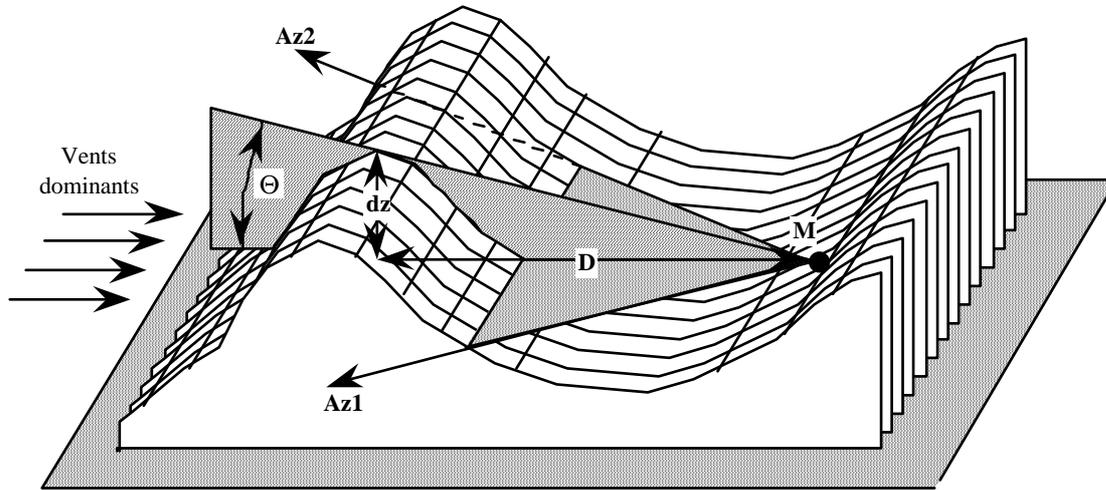
Dans la pratique, on constate que la pluie augmente avec l'altitude, ceci jusqu'à une altitude limitée appelée optimum pluviométrique. En effet, la masse d'eau condensable connaît une limite et au-delà d'un certain moment, il est évident que le volume d'eau précipité tend vers le volume précipitable et que les intensités ne peuvent continuer à croître, tout au contraire. Sur les hauteurs de pluies annuelles, l'optimum pluviométrique est de l'ordre de 2.000 à 3.000 mètres.

L'altitude revient aussi sur la nature des précipitations. En appelant coefficient de niviosité le rapport du volume d'eau tombé sous forme de neige au volume total, on constate les variations suivantes de son ordre de grandeur :

Altitude	Ordre de grandeur du coefficient de nivrosité
500 m	10 %
2.000 m	50 %
3.000 m	85 %

IX.3.1.2 - L'encaissement

L'inconvénient des altitudes moyennes est de ne pas faire intervenir l'orientation des versants ou des vallées. Prenons l'exemple de la cote moyenne définie plus haut : elle "gomme" les vallées de largeur inférieure à $2R$ mais quelle qu'en soit l'orientation.



Caractérisation d'un site par l'angle solide sous lequel on voit l'horizon.

Or, il est évident que leur influence sera différente selon qu'elles sont orientées Est-Ouest ou Nord-Sud, alors que les perturbations se déplacent grossièrement Est-Ouest.

La méthode que nous proposons est basée sur le raisonnement simple suivant : supposons que nous soyons en M à l'abri d'une crête montagneuse. L'influence de cette crête est d'autant plus forte qu'elle est élevée par rapport au site où nous nous trouvons (d_z) et qu'elle en est proche (d_j). Pour tenir compte en même temps des aspects dénivelée et distance, il est logique de faire intervenir la tangente de l'angle θ sous lequel on voit cette crête. Evidemment, cet angle θ est à mesurer selon la direction des vents dominants.

Par ailleurs, $\tan \theta$ ne peut à elle-seule mesurer l'influence de la crête ; à cela deux raisons : d'une part, un pic isolé n'aura pas la même influence qu'une crête continue ; il faut donc ne plus se contenter de $\tan \theta$ selon la direction des vents dominants mais mesurer $\tan \theta$ selon des azimuts situés de part et d'autre de la direction des vents dominants. D'autre part, les vents dominants s'orientent dans une certaine "fourchette" d'azimuts, mais ils peuvent varier d'une dépression à l'autre et d'une saison à l'autre.

On peut construire un paramètre caractérisant l'environnement du site à partir de l'angle solide sous lequel on voit l'horizon entre deux azimuts Az_1 et Az_2 , situés de part et d'autre de la direction des vents dominants.

Dans la pratique, l'influence de l'angle solide sous lequel on voit l'horizon s'exerce dans des sens différents selon la nature des précipitations :

- pour des pluies de front, il pleut plus dans un site encaissé que sur un sommet, cela à altitude égale (précipitations orographiques) ;
- pour des pluies d'orage, il pleut plus sur un sommet que dans un site encaissé, toujours à altitude égale (localisation préférentielle des orages sur les sommets).

IX.3.2. - Interpolation des précipitations

Les techniques modernes d'interpolation se rattachent plus ou moins étroitement, aux notions de fonctions aléatoires. Il est donc nécessaire de présenter le vocabulaire, les principaux concepts et résultats.

X.3.2.1 - La pluie, une fonction aléatoire

X.3.2.1.1 - Fonction aléatoire d'ordre 2

Soit $R(\vec{x}, \omega)$ la hauteur de pluie précipitée en un point \vec{x} dans la région étudiée D pendant une durée t débutant à l'instant ω de la nuit des temps τ , et soit P une mesure de probabilité ; on admettra que $R(\vec{x}, \omega)$ est une fonction aléatoire avec :

$$P(\Omega) = \int_{\Omega} P(d\omega) = 1$$

Si maintenant on se fixe un évènement ω_k , la fonction $f_k(\vec{x}) = R(\vec{x}, \omega_k)$, est une trajectoire de $R(\vec{x}, \omega)$. La fonction $f_k(\vec{x})$ pourrait être représentée par les courbes isohyètes de la pluie entre les instants ω et $\omega+t$.

Si maintenant on considère un point particulier fixé \vec{x}_i , la fonction $R_i(\omega) = R(\vec{x}_i, \omega)$ est une variable aléatoire. $R_i(\omega)$ est la loi de distribution statistique des pluies ponctuelles en \vec{x}_i et de durée t .

On appellera moyenne de la fonction aléatoire $R(\vec{x}, \omega)$ au point \vec{x}_i , la fonction $m(\vec{x}_i)$ telle que :

$$m(\vec{x}_i) = E \{R_i(\omega)\} = \int_{\Omega} R_i(\omega) P(d\omega)$$

Plus simplement, $m(\vec{x}_i)$ représente la moyenne des hauteurs de pluie sur une durée t , au pluviomètre situé en \vec{x}_i .

On peut également définir la fonction de covariance $C(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$ des précipitations entre deux points \vec{x}_i et \vec{x}_j :

$$C(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = E \{R_i(\omega) R_j(\omega)\} - m(\vec{x}_i) m(\vec{x}_j)$$

(avec évidemment $C(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = C(\vec{x}_j, \vec{x}_i)$)

La variance $V(\vec{x}_i)$ n'est que le cas particulier où les points \vec{x}_i et \vec{x}_j sont confondus :

$$V(\vec{x}_i) = s^2(\vec{x}_i) = C(\vec{x}_i, \vec{x}_i)$$

($s(\vec{x}_i)$ est bien sur l'écart-type en \vec{x}_i)

A partir de la covariance et de la variance, on peut également définir la fonction de corrélation $r(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$:

$$r(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \frac{C(\vec{x}_i, \vec{x}_j)}{s(\vec{x}_i) s(\vec{x}_j)}$$

$r(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$ est le coefficient de corrélation entre les précipitations aux points \vec{x}_i et \vec{x}_j , et évidemment :

$$r(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = r(\vec{x}_j, \vec{x}_i)$$

Une fonction aléatoire est dite fonction aléatoire d'ordre 2 si moyenne et fonction de covariance existent, ce qui est bien le cas pour les précipitations où les études statistiques utilisent des modèles de distribution à variance finie et où il est très classique de corréler des séries entre elles.

IX.3.2.1.2 - Homogénéité et isotropie

Si la fonction de corrélation ne dépend pas des points \vec{x}_i et \vec{x}_j mais du seul vecteur $\vec{h} = \vec{x}_i - \vec{x}_j$, on dit que le domaine étudié est homogène, et l'on parlera de corrélogramme $r(\vec{h})$. A priori, le corrélogramme est anisotrope ; il dépend à la fois de la distance h entre les points \vec{x}_i et \vec{x}_j mais aussi de la direction du vecteur \vec{h} .

Si la fonction de corrélation ne dépend pas des points \vec{x}_i et \vec{x}_j mais de la seule norme h du vecteur $\vec{x}_i - \vec{x}_j$ ($h = \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|$), on dit que le domaine étudié est isotrope. On parlera alors de corrélogramme isotrope $r(h)$.

Dans les applications ultérieures, l'hypothèse d'isotropie n'est nullement obligatoire car si les traitements sont notablement simplifiés, les moyens de calcul actuels permettent très bien de traiter les cas de domaines où la pluie est anisotrope. L'homogénéité des précipitations est par contre une hypothèse quasi-obligatoire et pourtant rien ne permet de l'affirmer a priori. Dans la pratique cependant, on constate que les précipitations peuvent être considérées comme homogènes sur des zones restreintes (en particulier des zones aux reliefs homogènes et affectées par des phénomènes météorologiques comparables).

IX.3.2.1.3 - Stationnarité d'ordre 2

Une fonction aléatoire est dite stationnaire d'ordre 2 s'il existe un corrélogramme et si moyennes et variances sont identiques en tout point :

$$m(\vec{x}) = m \quad (\text{pour tout } \vec{x} \text{ appartenant à } D)$$

$$s(\vec{x}) = s \quad (\text{pour tout } \vec{x} \text{ appartenant à } D)$$

$$r(\vec{h}) = \frac{C(\vec{x}_i, \vec{x}_j)}{s^2} \quad (\text{pour tous } \vec{x}_i, \vec{x}_j \text{ appartenant à } D)$$

La stationnarité d'ordre 2 des précipitations est une hypothèse très forte puisque non seulement il doit y avoir homogénéité, mais aussi égalité des moyennes et des variances des précipitations en tout point. Ceci ne peut donc se rencontrer que si l'on étudie les précipitations sur un domaine de très faible extension et à faible relief. Par contre on peut souvent appliquer l'hypothèse de stationnarité non pas directement aux précipitations, mais aux résidus de régression entre des paramètres géographiques (altitudes, encaissement, distances à la mer, aux crêtes ...) et les précipitations. En effet ces résidus sont de moyenne nulle et de variance constante (homoscédasticité).

IX.3.2.2 - Méthodes d'interpolation

La plupart des méthodes modernes d'interpolation ne peuvent se rattacher aux notions d'auto-corrélation ou d'estimateurs linéaires optimaux (estimateurs BLUE'S : Best Linears Unbiased Estimators).

IX.3.2.2.1 - Auto-corrélation

Supposons que l'on cherche à reconstituer en un point \vec{x}_0 lors d'un événement ω la pluie $R^*(\vec{x}_0, \omega)$ qui n'y aurait pas été observée. Pour ce faire, on choisira a priori une combinaison linéaire du type :

$$R^*(\vec{x}_0, \omega) = a_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i R(\vec{x}_i, \omega)$$

Cette combinaison devra être juste en moyenne :

$$\begin{aligned} E\{R(\vec{x}_0, \omega) - R^*(\vec{x}_0, \omega)\} &= 0 \\ E\{R(\vec{x}_0, \omega) - a_0 - \sum_{i=1}^n \lambda_i R(\vec{x}_i, \omega)\} &= 0 \\ E\{R(\vec{x}_0, \omega)\} - \sum_{i=1}^n \lambda_i E\{R(\vec{x}_i, \omega)\} &= a_0 \\ a_0 &= m(\vec{x}_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i m(\vec{x}_i) \end{aligned}$$

Si cette première équation est vérifiée on peut travailler sur les écarts à la moyenne $r(\vec{x})$ ainsi définis :

$$r(\vec{x}) = R(\vec{x}, \omega) - m(\vec{x})$$

En effet on a alors :

$$\begin{aligned} R(\vec{x}_0, \omega) - R^*(\vec{x}_0, \omega) &= R(\vec{x}_0, \omega) - a_0 - \sum_{i=1}^n \lambda_i R(\vec{x}_i, \omega) \\ 0 &= m(\vec{x}_0) - a_0 - \sum_{i=1}^n \lambda_i m(\vec{x}_i) \\ R(\vec{x}_0, \omega) - R^*(\vec{x}_0, \omega) &= R(\vec{x}_0, \omega) - m(\vec{x}_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i (R(\vec{x}_i, \omega) - m(\vec{x}_i)) \\ R(\vec{x}_0, \omega) - R^*(\vec{x}_0, \omega) &= r(\vec{x}_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i r(\vec{x}_i) \end{aligned}$$

Imposons à cette reconstitution d'être de plus, de "bonne qualité" au sens de l'erreur quadratique moyenne :

$$\begin{aligned} d^2 &= E\{(R^*(\vec{x}_0, \omega) - R(\vec{x}_0, \omega))^2\} = \text{minimum} \\ d^2 &= E\{(r(\vec{x}_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i r(\vec{x}_i))^2\} = \text{minimum} \end{aligned}$$

On détermine les n paramètres λ_i en annulant les n dérivées partielles de d^2 par rapport aux λ_i

$$\begin{aligned} d^2 &= E\{(r(\vec{x}_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i r(\vec{x}_i))^2\} \\ d^2 &= E\{r(\vec{x}_0)^2\} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i E\{r(\vec{x}_0) r(\vec{x}_i)\} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j E\{r(\vec{x}_i) r(\vec{x}_j)\} \end{aligned}$$

Développons le terme $E\{r(\vec{x}_0) r(\vec{x}_i)\}$:

$$E\{r(\vec{x}_0) r(\vec{x}_i)\} = E\{[R(\vec{x}_0, \omega) - m(\vec{x}_0)] [R(\vec{x}_i, \omega) - m(\vec{x}_i)]\}$$

$$E\{r(\vec{x}_0) r(\vec{x}_1)\} = E\{R(\vec{x}_0, \omega) R(\vec{x}_1, \omega)\} - m(\vec{x}_0) E\{R(\vec{x}_1, \omega)\} - m(\vec{x}_1) E\{R(\vec{x}_0, \omega)\} + E\{m(\vec{x}_0) m(\vec{x}_1)\}$$

$$E\{r(\vec{x}_0) r(\vec{x}_1)\} = E\{R(\vec{x}_0, \omega) R(\vec{x}_1, \omega)\} - m(\vec{x}_0) m(\vec{x}_1)$$

$$E\{r(\vec{x}_0) r(\vec{x}_1)\} = C(\vec{x}_0, \vec{x}_1)$$

D'où l'expression :

$$d^2 = s^2(\vec{x}_0) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C(\vec{x}_0, \vec{x}_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$$

Ecrivons alors les dérivées :

$$\frac{\partial(d^2)}{\partial \lambda_i} = -2 C(\vec{x}_0, \vec{x}_i) + 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j C(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$$

Or ces dérivées doivent être nulles, donc pour les n valeurs que peut prendre i, on aura :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j C(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = C(\vec{x}_0, \vec{x}_i)$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} C(\vec{x}_1, \vec{x}_2) & C(\vec{x}_1, \vec{x}_2) & \dots & C(\vec{x}_1, \vec{x}_j) & \dots & C(\vec{x}_1, \vec{x}_n) \\ C(\vec{x}_2, \vec{x}_2) & C(\vec{x}_2, \vec{x}_2) & \dots & C(\vec{x}_2, \vec{x}_j) & \dots & C(\vec{x}_2, \vec{x}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C(\vec{x}_i, \vec{x}_1) & C(\vec{x}_i, \vec{x}_2) & \dots & C(\vec{x}_i, \vec{x}_j) & \dots & C(\vec{x}_i, \vec{x}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C(\vec{x}_n, \vec{x}_1) & C(\vec{x}_n, \vec{x}_2) & \dots & C(\vec{x}_n, \vec{x}_j) & \dots & C(\vec{x}_n, \vec{x}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_i \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(\vec{x}_0, \vec{x}_1) \\ C(\vec{x}_0, \vec{x}_2) \\ \dots \\ C(\vec{x}_0, \vec{x}_i) \\ \dots \\ C(\vec{x}_0, \vec{x}_n) \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$[C_{i,j}] [\lambda_i] = [C_{0,i}]$$

et bien sur on trouvera les λ_i par résolution du système suivant :

$$[\lambda_i] = [C_{i,j}]^{-1} [C_{0,i}]$$

Pour une application pratique; on supposera que l'on a observé k événements ω sur les n+1 points

Il est alors aisé d'approcher ainsi les espérances mathématiques :

$$E\{R(\vec{x}_i, \omega)\} = m(\vec{x}_i) \sim \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R(\vec{x}_i, \omega)$$

De même pour les covariances :

$$C(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [R(\vec{x}_i, \omega) R(\vec{x}_j, \omega)] - m(\vec{x}_i) m(\vec{x}_j)$$

Ces covariances permettent de remplir les matrices $[C_{i,j}]$ et $[C_{0,i}]$, il suffit alors de calculer la matrice inverse $[C_{i,j}]^{-1}$ pour obtenir les n paramètres λ_i .

Supposons que pour le (k+1)^{ème} événement, on ne connaisse que les n $R(\vec{x}_i, \omega_{k+1})$, on pourra reconstituer la valeur en \vec{x}_0 par :

$$R^*(\vec{x}_0, \omega_{k+1}) = a_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i R(\vec{x}_i, \omega_{k+1})$$

$$R^*(\vec{x}_0, \omega_{k+1}) = m(\vec{x}_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i m(\vec{x}_i) + \sum_{i=1}^n \lambda_i R(\vec{x}_i, \omega_{k+1})$$

$$R^*(\vec{x}_0, \omega_{k+1}) = m(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i [R(\vec{x}_i, \omega_{k+1}) - m(\vec{x}_i)]$$

Voici ainsi présenté l'auto-corrélation qui permet des reconstitutions telles que l'écart $R(\vec{x}_0, \omega) - R^*(\vec{x}_0, \omega)$ soit nul en moyenne et que la variance de cet écart d^2 soit minimale. On montre d'ailleurs que ce minimum est :

$$d^2 = C(\vec{x}_0, \vec{x}_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i C(\vec{x}_i, \vec{x}_0)$$

Dans la pratique l'auto-corrélation n'est pas une méthode opérationnelle d'interpolation ; en effet, il faut connaître en tout point d'interpolation les $m(\vec{x}_0)$ et tous les $C(\vec{x}_i, \vec{x}_0)$, or ceci n'est jamais le cas sauf si l'on imagine un réseau très dense (un point de mesure en chaque point d'interpolation) exploité durant k événements puis le maintien en service d'un nombre n plus restreint de postes de mesure.

Les véritables méthodes d'interpolation vont donc consister essentiellement à se donner les $m(\vec{x}_0)$ et $C(\vec{x}_i, \vec{x}_0)$ suivant des hypothèses plus ou moins simplificatrices.

X.3.2.2.2 - Interpolation optimale de Gandin

Cette technique s'applique au cas où l'on ne dispose d'information qu'en n pluviomètres \vec{x}_i , et sur k événements. On se propose alors pour chaque événement de reconstituer le phénomène en un point \vec{x}_0 non observé.

Les équations d'auto-régression nécessitent de connaître tous les $C(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$ et tous les $m(\vec{x}_i)$, pour i et j variant de 0 à n , or les termes pour $i=0$ sont manifestement inconnus.

Nous avons vu que la fonction de corrélation était :

$$r(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \frac{C(\vec{x}_i, \vec{x}_j)}{s(\vec{x}_i) s(\vec{x}_j)}$$

La première hypothèse dans la méthode de Gandin est de supposer que le phénomène est homogène; c'est-à-dire que :

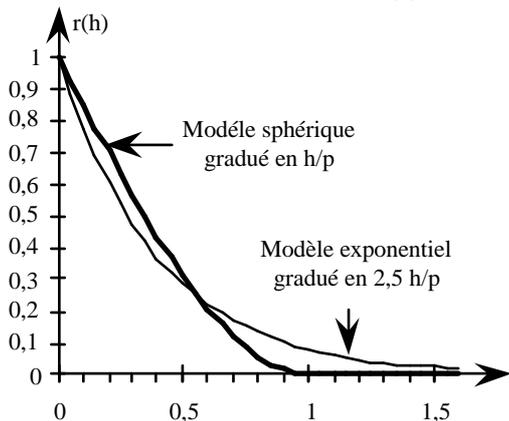
$$r(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = r(\vec{h}) \quad (\text{avec } \vec{h} = \vec{x}_i - \vec{x}_j)$$

Les n points d'observation permettent de calculer des valeurs expérimentales des $r(\vec{h})$ par :

$$r(\vec{h}) = \frac{1}{k s(\vec{x}_i) s(\vec{x}_j)} \left\{ \sum_{i=1}^k R(\vec{x}_i, w_i) R(\vec{x}_j, w_i) - m(\vec{x}_i) m(\vec{x}_j) \right\}$$

On obtient donc $\frac{n(n-1)}{2}$ valeurs expérimentales de $r(\vec{h})$ sur lesquelles on ajustera une formulation théorique.

La fonction $r(\vec{h})$ est appelée corrélogramme et si h représente la norme de \vec{h} et q l'azimut de h par rapport au nord, on cherchera donc une formulation en $r^*(h, q)$ en s'appuyant sur les corrélogrammes expérimentaux construits pour différentes tranches dq d'azimut $q-dq/2, q+dq/2$. Dans le cas plus simple mais fréquent où l'anisotropie est faible, il suffira de rechercher une fonction $r^*(h)$.



Assez classiquement; on arrive à caler $r^*(h)$ sur des fonctions du type :

- modèle exponentiel

$$r^*(h) = \exp(-h/a)$$

- modèle sphérique

$$r^*(h) = 1 - 3/2 h/p + 1/2 h^3/p^3 \quad : \text{ si } h < p$$

$$r^*(h) = 0 \quad : \text{ si } h > p$$

Si on appelle portée la distance au-delà de laquelle le coefficient de corrélation est nul, le paramètre p du modèle sphérique est la portée ; par contre le modèle exponentiel n'a qu'une portée "efficace" qui représente environ 2,5 fois la valeur du paramètre p (au delà de $h=2,5p$ le modèle exponentiel donne un $r(h)$ négligeable).

Une fois ajustée la fonction $r^*(h)$, il faut pour déterminer les valeurs des matrices $[C_{i,j}]$, $[C_{0,i}]$ connaître les variances aux points \vec{x}_i , mais aussi en tout point d'interpolations \vec{x}_0 . De même, pour reconstituer les valeurs de $R^*(\vec{x}_0, w)$, il faut connaître non seulement les $m(\vec{x}_i)$ mais aussi les $m(\vec{x}_0)$.

Manifestement, on ignore pour l'instant les $m(\vec{x}_0)$, et les $C(\vec{x}_0, \vec{x}_0)$. Deux solutions sont alors possibles. La première préconisée par Gandin repose sur une hypothèse forte ; la fonction $R(\vec{x}, \omega)$ est stationnaire d'ordre 2, c'est-à-dire que l'on a :

$$m(\vec{x}_0) = m$$

$$C(\vec{x}_0, \vec{x}_0) = s^2$$

Il suffit alors d'après toutes les $R(\vec{x}, \omega)$ observées de calculer moyenne et variance :

$$m \sim \frac{1}{k} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k R(\vec{x}_i, \omega_j)$$

$$s^2 \sim \frac{1}{k} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k R(\vec{x}_i, \omega_j)^2 - m^2$$

L'hypothèse de stationnarité est souvent trop forte. On peut alors tourner la difficulté :

- soit en admettant que les champs des $m(\vec{x})$ et des $s^2(\vec{x})$ sont plus réguliers que celui des $R(\vec{x}, \omega)$ et on fera alors une première interpolation sommaire des champs des $m(\vec{x})$ et des $s^2(\vec{x})$ connus à partir des seules estimations $m(\vec{x}_i)$ et $s^2(\vec{x}_i)$;

- soit en utilisant l'interpolation de Gandin appliquée aux résidus de régression entre la pluie et les variables caractéristiques du relief pouvant expliquer les fluctuations des $m(\vec{x})$ et des $s^2(\vec{x})$.

IX.3.2.2.3 - Krigeage

A partir des années 1960 se sont développées les techniques appelées de krigeage avec les travaux de Matheron puis de son équipe de l'école des Mines de Paris.

Ces techniques diffèrent des deux précédentes par le fait qu'elles s'appuient sur une seule réalisation de ce que l'on peut toujours considérer comme une fonction aléatoire. Les données de départ sont donc ici uniquement les réalisations $R(\vec{x}_i, \omega_k)$ lors d'un seul événement ω_k et connu en n points \vec{x}_i .

Krigeage simple en covariance

On suppose a priori que la fonction aléatoire est stationnaire d'ordre 2 :

$$m(\vec{x}) = m$$

$$s^2(\vec{x}) = s^2$$

$$C(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = C(\vec{x}, \vec{x} + \vec{h}) = C(\vec{h})$$

et l'on cherche à exprimer $R(\vec{x}, \omega)$ par la fonction linéaire suivante : $R(\vec{x}_0, \omega) = \sum_{i=1}^n \lambda_i R(\vec{x}_i, \omega)$

Cette expression diffère des précédentes puisque l'on impose a priori à a_0 d'être nul. Mais la condition de non-

biais : $a_0 = m(\vec{x}_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i m(\vec{x}_i)$

se transforme aisément (puisque $m(\vec{x}) = m$ et $a_0 = 0$) en : $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$

La minimisation de la variance d'estimation sous cette contrainte aboutit à ce que l'on appelle communément "système de krigeage" :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_j C(\vec{x}_i, \vec{x}_j) - m = C(\vec{x}_0, \vec{x}_i)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Soit sous forme matricielle :

$C(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$	$C(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$...	$C(\vec{x}_1, \vec{x}_j)$...	$C(\vec{x}_1, \vec{x}_n)$	1	λ_1	=	$C(\vec{x}_0, \vec{x}_1)$
$C(\vec{x}_2, \vec{x}_2)$	$C(\vec{x}_2, \vec{x}_2)$...	$C(\vec{x}_2, \vec{x}_j)$...	$C(\vec{x}_2, \vec{x}_n)$	1	λ_2		$C(\vec{x}_0, \vec{x}_2)$
...
$C(\vec{x}_i, \vec{x}_1)$	$C(\vec{x}_i, \vec{x}_2)$...	$C(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$...	$C(\vec{x}_i, \vec{x}_n)$	1	λ_i		$C(\vec{x}_0, \vec{x}_i)$

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C(\vec{x}_n, \vec{x}_1) & C(\vec{x}_n, \vec{x}_2) & \dots & C(\vec{x}_n, \vec{x}_j) & \dots & C(\vec{x}_n, \vec{x}_n) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dots \\ \lambda_n \\ \mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dots \\ C(\vec{x}_0, \vec{x}_n) \\ 1 \end{vmatrix}$$

Nous sommes alors amenés à faire une seconde hypothèse : valeurs de m , s^2 et $C(\vec{h})$ qui sont normalement définies à partir de plusieurs événements ω_k (estimations "climatologiques"), peuvent se définir à partir d'une seule distribution spatiale sur le domaine D . Cette hypothèse est appelée hypothèse d'ergodicité.

On suppose donc :

$$E_D\{R(\vec{x}, \omega_k)\} = E\{R(\vec{x}, \omega_k)\} = m$$

$$E_D\{R(\vec{x}_i, \omega_k) R(\vec{x}_j, \omega_k)\} - m^2 = E\{R(\vec{x}_i, \omega_k) R(\vec{x}_j, \omega_k)\} - m^2 = s^2 [1 - r(\vec{h})] = C(\vec{h})$$

On évaluera donc la moyenne du champ par :

$$m = \sum_{i=1}^n R(\vec{x}_i, \omega_k)$$

Pour la fonction de covariance $C(\vec{h})$ on procédera par pas de distance Dh (dans le cas anisotrope on travaillera de plus, sur des tranches d'azimut). Les couples (\vec{x}_i, \vec{x}_j) tels que :

$$\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\| = h \pm Dh/2$$

étant au nombre de t on obtient un des points de la fonction de covariance en reportant :

$$C(h) \sim \frac{1}{t} \sum_{l=1}^t [R(\vec{x}_l, \omega_k) R(\vec{x}_j, \omega_k)] - m^2$$

$$\left(\text{avec : } h' = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\| \right)$$

Il suffit alors d'ajuster aux $C(h')$ un modèle théorique $C(h)$ et enfin de remplir les matrices $[C_{i,j}]$ et $[C_{0,i}]$ avec les $C(h)$ correspondant.

Voici ainsi présenté, le krigeage simple qui permet des reconstitutions telles que l'écart $R(\vec{x}_0, \omega) - R(\vec{x}_0, \omega)$ soit nul en moyenne et que la variance de cet écart d^2 soit minimale. On montre d'ailleurs que ce minimum est :

$$d^2 = C(\vec{x}_0, \vec{x}_0) + \mu - \sum_{i=1}^n \lambda_i C(\vec{x}_i, \vec{x}_0)$$

Ce cas est très rarement traité tel quel, en effet l'hypothèse de stationnarité d'ordre 2 peut paraître trop forte et d'autre part l'estimation spatiale de m peut être parfois biaisée.

Krigeage dans le cadre de l'hypothèse intrinsèque

On est souvent amené à une nouvelle hypothèse, moins forte, appelée hypothèse intrinsèque qui consiste à dire que ce sont les accroissements $\{R(\vec{x}, \omega_k) - R(\vec{x} + \vec{h}, \omega_k)\}$, pour une distance \vec{h} , qui sont stationnaires d'ordre 2.

$$\text{Moyenne constante : } E_D\{R(\vec{x}, \omega_k) - R(\vec{x} + \vec{h}, \omega_k)\} = m(\vec{x}) - m(\vec{x} + \vec{h}) = C^te = 0$$

Les accroissements sont nuls en moyenne, et $R(\vec{x}, \omega_k)$ est stationnaire en moyenne.

$$\text{Variance constante pour une distance } \vec{h} : \text{Var}_D\{R(\vec{x}, \omega_k) - R(\vec{x} + \vec{h}, \omega_k)\} = 2 \gamma(\vec{h})$$

Ainsi l'hypothèse intrinsèque peut se résumer en disant qu'en moyenne les accroissements spatiaux sont nuls et que la variance de ces accroissements spatiaux ne dépend que du vecteur \vec{h} (ou de son module h).

$\gamma(\vec{h})$ est appelé variogramme. Dans le cadre de l'hypothèse intrinsèque, ce variogramme est lié aux covariances, en effet :

$$2 \gamma(\vec{h}) = \text{Var}_D\{R(\vec{x}, \omega_k) - R(\vec{x} + \vec{h}, \omega_k)\}$$

$$2 \gamma(\vec{h}) = E_D\{[R(\vec{x}, \omega_k) - R(\vec{x} + \vec{h}, \omega_k)]^2\} - [E_D\{R(\vec{x}, \omega_k) - R(\vec{x} + \vec{h}, \omega_k)\}]^2$$

$$2 \gamma(\vec{h}) = E_D\{[R(\vec{x}, \omega_k) - R(\vec{x} + \vec{h}, \omega_k)]^2\} - 0$$

$$2 \gamma(\vec{h}) = E_D\{[R(\vec{x}, \omega_k)]^2\} - 2 E_D\{R(\vec{x}, \omega_k) R(\vec{x} + \vec{h}, \omega_k)\} + E_D\{[R(\vec{x} + \vec{h}, \omega_k)]^2\}$$

$$2 \gamma(\vec{h}) = E_D\{[R(\vec{x}, \omega_k)]^2\} - 2 E_D\{R(\vec{x}, \omega_k) R(\vec{x} + \vec{h}, \omega_k)\} + E_D\{[R(\vec{x} + \vec{h}, \omega_k)]^2\}$$

Mais :

$$E_D\{[R(\vec{x}, \omega_k)]^2\} - m^2 = C(0), \quad E_D\{[R(\vec{x} + \vec{h}, \omega_k)]^2\} - m^2 = C(0)$$

$$2 E_D\{R(\vec{x}, \omega_k) R(\vec{x} + \vec{h}, \omega_k)\} - 2 m^2 = 2 C(\vec{x}, \vec{x} + \vec{h})$$

Donc :

$$2 \gamma(\vec{h}) = E_D\{[R(\vec{x}, \omega_k) - R(\vec{x} + \vec{h}, \omega_k)]^2\}$$

$$\gamma(\vec{h}) = C(0) - C(\vec{h})$$

Le système initial se transforme alors en : $\overset{*}{R}(\vec{x}_0, \omega) = \sum_{i=1}^n \lambda_i R(\vec{x}_i, \omega)$

avec :

$$\overset{*}{R}(x) \gamma(\vec{x}_i, \vec{x}_j) - m = \gamma(\vec{x}_0, \vec{x}_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

et sous forme matricielle :

$$\begin{vmatrix} \gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2) & \gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2) & \dots & \gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_j) & \dots & \gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_n) & 1 \\ \gamma(\vec{x}_2, \vec{x}_2) & \gamma(\vec{x}_2, \vec{x}_2) & \dots & \gamma(\vec{x}_2, \vec{x}_j) & \dots & \gamma(\vec{x}_2, \vec{x}_n) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma(\vec{x}_i, \vec{x}_1) & \gamma(\vec{x}_i, \vec{x}_2) & \dots & \gamma(\vec{x}_i, \vec{x}_j) & \dots & \gamma(\vec{x}_i, \vec{x}_n) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma(\vec{x}_n, \vec{x}_1) & \gamma(\vec{x}_n, \vec{x}_2) & \dots & \gamma(\vec{x}_n, \vec{x}_j) & \dots & \gamma(\vec{x}_n, \vec{x}_n) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_i \\ \dots \\ \lambda_n \\ \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma(\vec{x}_0, \vec{x}_1) \\ \gamma(\vec{x}_0, \vec{x}_2) \\ \dots \\ \gamma(\vec{x}_0, \vec{x}_i) \\ \dots \\ \gamma(\vec{x}_0, \vec{x}_n) \\ 1 \end{vmatrix}$$

Pour une mise en œuvre pratique, il suffit de construire le variogramme expérimental,

$$2\gamma(\vec{h}) = E_D\{[R(\vec{x}, \omega_k) - R(\vec{x} + \vec{h}, \omega_k)]^2\}$$

Cette construction se fait en travaillant par pas de distance Dh (dans le cas anisotrope on travaillera de plus sur des tranches d'azimut), les couples (\vec{x}_i, \vec{x}_j) tels que :

$$\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\| = h \pm Dh/2$$

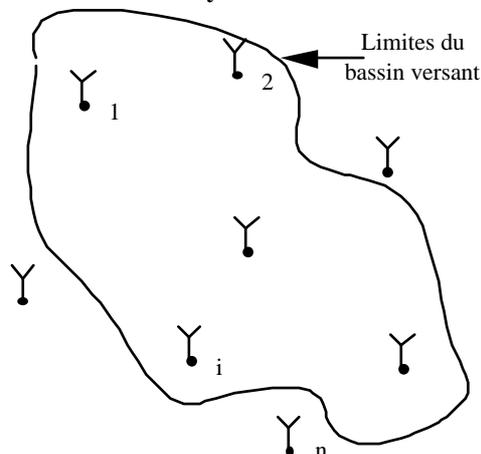
étant au nombre de t, on obtient un des points du variogramme en reportant :

$$2 \gamma(h) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t [R(\vec{x}_i, \omega_k) - R(\vec{x}_j, \omega_k)]^2$$

$$\left(\text{avec : } h' = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\| \right)$$

On ajuste aux $\gamma(h')$ un modèle théorique $\overset{*}{\gamma}(h)$ et enfin on remplit les matrices $[\Gamma_{i,j}]$ et $[\Gamma_{0,i}]$ avec les $\overset{*}{\gamma}(h)$ correspondant.

IX.3.3 - Pluies moyennes sur une surface



D'une façon générale, le problème se pose de la manière suivante : on connaît sur n points (aux postes pluviométriques), la fonction $P(x, y)$ et on se propose de calculer la valeur moyenne \bar{P}_{BV} de $P(x, y)$ sur un certain domaine BV (en général un bassin versant) :

$$\bar{P}_{BV} = \frac{1}{S_{BV}} \iint_{BV} P(x, y) dx dy$$

où S_{BV} est la surface du domaine BV.

Le problème est alors un problème d'interpolation de la fonction $P(x, y)$ entre les points d'échantillonnage.

Les solutions à ce problème sont nombreuses, mais elles peuvent se résumer en deux grands types : des solutions simples et rustiques applicables à la main, des solutions précises et sophistiquées d'application plus complexe.

IX.3.3.1 - Méthode de Thiessen

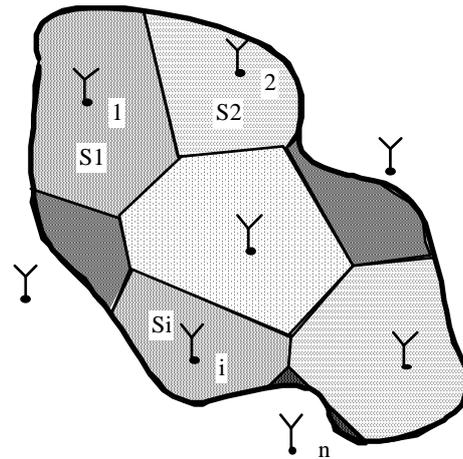
Cette méthode, basée uniquement sur les pluies observées aux pluviomètres, consiste à supposer que la fonction P (x, y) varie discrètement. Pour cela, sur tout élément de surface dx dy, on admet que P (x, y) est égal à la valeur enregistrée au poste le plus proche.

Comme le suggère la figure ci-contre, les éléments de surface plus proches d'un pluviomètre que de tout autre, sont déterminés par le réseau des médiatrices des segments joignant les postes 2 à 2.

Dans cette hypothèse, la pluie moyenne s'exprime ainsi :

$$\bar{P}_{BV} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i S_i}{\sum_{i=1}^n S_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$$

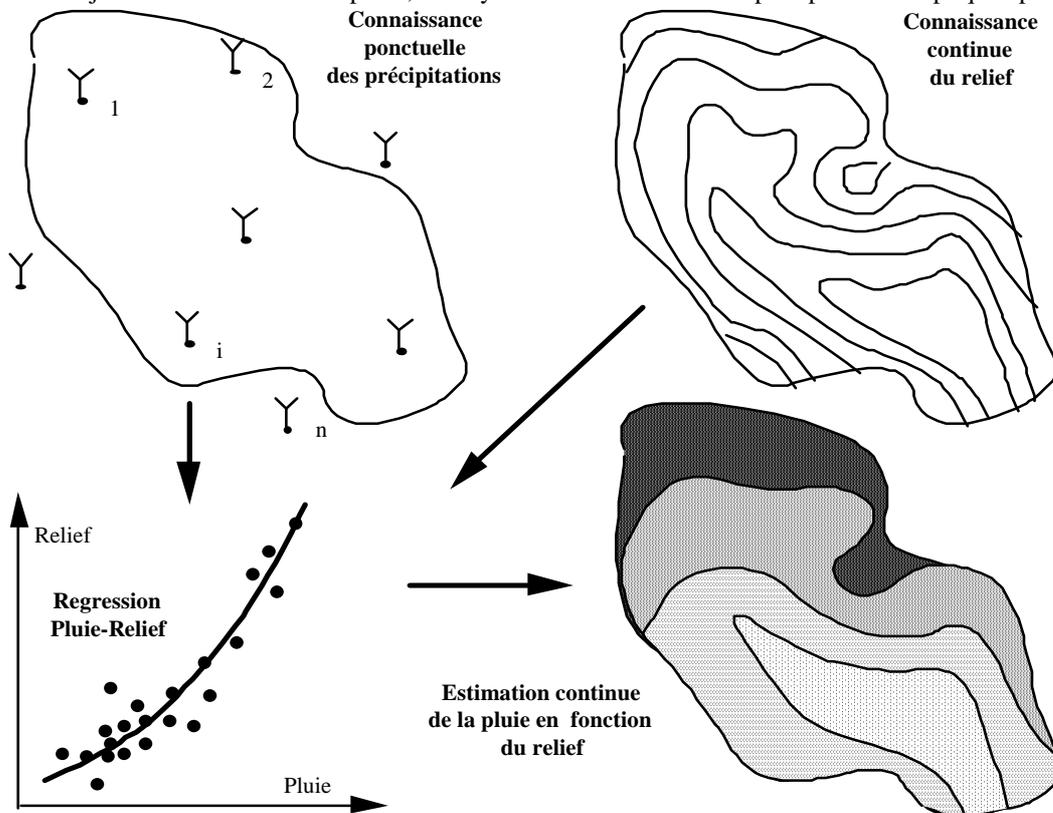
avec
$$\alpha_i = \frac{S_i}{\sum_{i=1}^n S_i}$$



On remarque alors que les termes α_i appelés coefficients de Thiessen ne dépendent que de la répartition spatiale des postes par rapport au bassin versant. Ils ne dépendent pas de la pluie, donc la construction géométrique est à faire une fois pour toutes et on appliquera α_i à toutes les averses à étudier.

IX.3.3.2 - Méthode des isohyètes

Cette méthode consiste, connaissant la fonction P (x, y) en quelques points d'échantillonnage à interpoler P(x,y) en tout point du bassin versant. Cette interpolation est généralement faite selon des techniques de krigeage où la pluie estimée en un point quelconque est une combinaison linéaire des pluies connues aux pluviomètres ; les poids étant affectés selon la distance du point au pluviomètre par rapport à la structure spatiale du phénomène. Cette méthode permet de tenir compte d'autres paramètres, en particulier du relief que l'on connaît en tout point. Dans ces conditions, on étudie les régressions pluie-morphométrie aux différents points d'observation, puis on interpole les résidus de régression qui par construction sont une fonction aléatoire stationnaire d'ordre 2. Enfin on reconstitue en tout point les précipitations en ajoutant aux résidus interpolés, la moyenne conditionnelle des précipitations expliquée par le relief.



Si on connaît d'une façon continue, une estimation $\hat{P}(x,y)$ de la pluie, il devient aisé par des méthodes numériques ou graphiques, de calculer la pluie moyenne à partir des estimations des intégrales :

$$\bar{P}_{BV} = \frac{1}{S_{BV}} \iint_{BV} \hat{P}(x,y) dx dy$$

Cette façon de procéder est préférable puisqu'elle permet de prendre en compte des paramètres autres que ceux mesurés uniquement aux pluviomètres, mais elle présente les inconvénients d'être plus longue (calcul automatique quasiment nécessaire) et de devoir être répétée pour chaque averse.

IX.3.4- Coefficients d'abattement

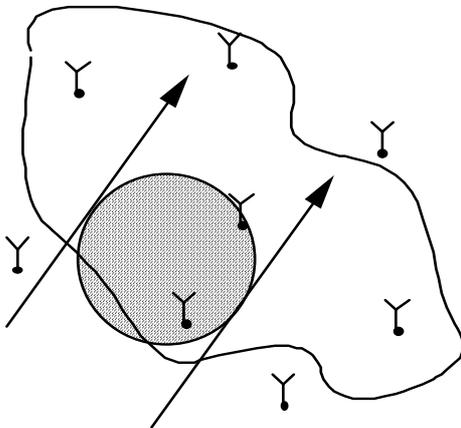
X.3.4.1 - Définition et hypothèses

Pour évaluer le volume ruisselé sur une surface, il est nécessaire de connaître la pluie qui a généré ce ruissellement. Or, on ne connaît généralement que la pluie ponctuelle (à un pluviomètre) et non la pluie moyenne sur la surface du bassin versant. On appellera K le coefficient d'abattement : rapport de la pluie moyenne sur la surface P_{BV} à la pluie ponctuelle de même fréquence F.

Ce coefficient K dépendra donc de la surface du bassin, de la fréquence, de la pluie et aussi de la répartition spatiale de la pluie. Ce dernier point permet de remarquer que K n'a de sens que si la pluie ponctuelle de fréquence F est la même en tout point du bassin ; nous avons donc fait implicitement l'hypothèse que la pluie était une fonction aléatoire stationnaire, c'est-à-dire que la distribution fréquentielle des pluies ponctuelles était la même en tout point du bassin considéré.

IX.3.4.2 - Valeurs relatives du coefficient d'abattement

Le coefficient d'abattement est toujours inférieur à 1 quelle que soit la surface du bassin et la fréquence de la pluie considérée.



Pour s'en persuader, on peut considérer la caricature suivante d'une averse de fréquence donnée.

Une averse s'étend sur une surface finie (que nous schématiserons par un cercle de rayon R). Elle a la même probabilité (mesurée par F) de passer à la verticale de chacun des pluviomètres. Si R est nettement inférieur aux dimensions du bassin versant, la pluie moyenne sur le bassin versant qu'elle engendrera sera nettement inférieure à celle enregistrée aux pluviomètres à la verticale desquels l'averse est passée. Le coefficient K sera donc d'autant plus inférieur à un que le bassin sera grand.

Si maintenant on s'intéresse à une pluie beaucoup plus forte (F plus grand), il est vraisemblable que ceci ne se produise que dans la zone centrale de l'averse.

Dans notre schéma, cela se traduirait par un rayon R plus petit. Il est alors évident que le coefficient K serait encore plus petit. Le coefficient K sera donc d'autant plus inférieur à un que la fréquence de la pluie sera plus rare (F tendant vers 1).

Dans la réalité, les choses sont évidemment plus complexes, mais les sens de variations sont les mêmes que ceux tirés de ce schéma simpliste. D'une façon générale, les formulations de K en fonction de la surface S du bassin et de la fréquence au non-dépassement F de la pluie et de sa durée t sont de la forme :

$$K = \frac{1}{1 + a \frac{S^\alpha}{(1-F)^\beta t}}$$

Des études conduites sur des bassins versants du Bassin Parisien, ont montré que K pouvait s'approcher par la formule :

$$K = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{S}}{30\sqrt[3]{t}}}$$

(S en km² ; t en heures et F = 0.9)

IX.3.4.3 - Détermination pratique de K

IX.3.4.3.1 - Approche de Brunet-Moret

Parmi plusieurs approches, la solution proposée par MM. ROCHE et BRUNET-MORET est la plus classique. Elle permet de tenir compte à la fois d'observations denses durant une courte période et de séries ponctuelles longues.

Supposons que sur une période courte de n années complètes, on dispose d'observations à p pluviomètres. On peut, sur ces n années, calculer les pluies moyennes journalières (ou sur une autre durée) sur le bassin (isohyètes ou Thiessen).

A partir de ces données, on construit un tableau à double entrée, chaque ligne correspondant à un intervalle sur la pluie moyenne (par exemple découpage de 10 en 10 mm de P_S) et une colonne à un intervalle sur la pluie ponctuelle P_p .

Les valeurs portées dans ce tableau donnent le nombre de fois où à une station, la pluie ponctuelle correspondait à la colonne alors que la pluie moyenne correspondait à la ligne.

Une fois ce tableau rempli à partir des $n * 365$ jours d'observations, on a une représentation numérique du champ de densité de probabilité $P(P_S, P_p)$, déterminée à partir de n années d'observations.

Chaque ligne représente la distribution des fréquences conditionnelles des pluies ponctuelles pour une valeur donnée de P_m .

Chaque colonne donne la distribution des fréquences conditionnelles des pluies moyennes pour une valeur donnée de la pluie ponctuelle :

- les sommes suivant les lignes donnent la distribution marginale des bassins versants ;
- les sommes suivant les colonnes donnent la distribution marginale des P ponctuelles.

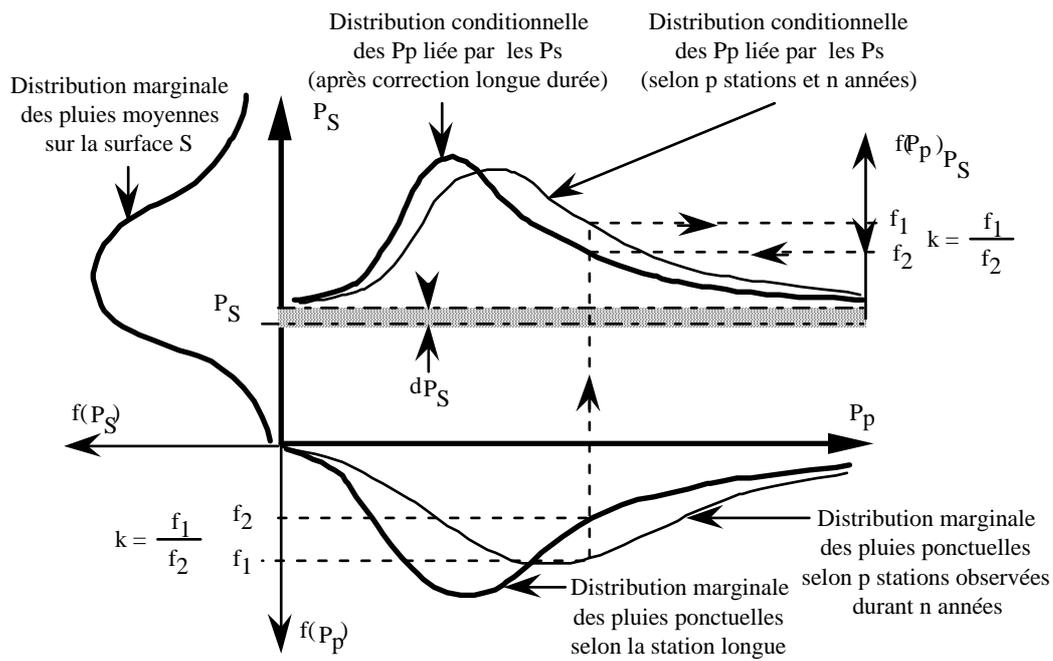
Cette dernière distribution expérimentale peut être améliorée par la connaissance d'une longue série.

En effet, pour chaque intervalle de P , on peut déterminer le nombre n' théorique de fois où l'on aurait dû avoir P à l'intérieur de l'intervalle ; soit n nombre expérimental de fois où l'on a rencontré une telle valeur de P ; on admet que si l'échantillon était plus représentatif, chaque terme de la colonne correspondante devrait être multiplié par $\frac{n'}{n}$. Ainsi, la

loi marginale de P serait identique à celle observée à la station longue.

Après cette correction due à la série de longue durée, on effectue les sommes ligne par ligne pour obtenir la loi de distribution marginale des pluies moyennes.

Ayant obtenu ainsi la distribution statistique des pluies moyennes sur le bassin, on calcule K pour les différentes fréquences en la comparant à la distribution des pluies ponctuelles.



IX.3.4.3.1 - Approche géostatistique

Cette méthode proposée par LABORDE en 1986, s'appuie sur des considérations géostatistiques simples et couramment admises dans la pratique. L'avantage réside dans le fait que le calcul explicite des pluies moyennes n'est plus nécessaire. Par ailleurs connaissant la distribution statistique des pluies ponctuelles et leur structure spatiale à travers le corrélogramme ou le variogramme, on peut évaluer très simplement les coefficients d'abattement pour n'importe quelle fréquence et n'importe quel bassin versant.

Nous venons de voir avec l'approche de Brunet-Moret, que les pluies ponctuelles sur le bassin versant devait être considérées comme des réalisations d'une fonction aléatoire stationnaire d'ordre 2 :

$$m(\vec{x}) = m \quad , \quad \sigma^2(\vec{x}) = \sigma^2 \quad , \quad C(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \sigma^2 - \gamma(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$$

La moyenne spatiale des précipitations sur un bassin versant de surface S est alors une variable aléatoire $R_S(\omega)$ telle que :

$$R_S(\omega) = \frac{1}{S} \int_S R(\omega, \bar{x}) d\bar{x}$$

On montre aisément que la moyenne m_S des $R_S(\omega)$ est la même que la moyenne des pluies ponctuelles m .

$$m_S = E[R_S(\omega)] = m$$

De même la variance σ_S^2 des pluies moyennes sur le bassin a pour expression :

$$\sigma_S^2 = \sigma^2 - \frac{1}{S^2} \iint_S \gamma(\bar{x}_i - \bar{x}_j) d\bar{x}_i d\bar{x}_j$$

Si l'on fait l'hypothèse que les pluies ponctuelles sont distribuées selon le même type de loi que les pluies moyennes sur le bassin versant, on constate donc qu'à partir de la moyenne des pluies ponctuelles, du variogramme des pluies ponctuelles et du domaine S (bassin versant sur lequel on calcule l'abatement), on peut évaluer aisément la moyenne et la variance des pluies moyennes sur le bassin versant. Souvent on peut modéliser les variogrammes par un modèle exponentiel :

$$\frac{\gamma(\bar{x}_i - \bar{x}_j)}{\sigma^2} = \frac{\gamma(h)}{\sigma^2} = 1 - e^{-\frac{h}{p}}$$

Alors la variance σ_S^2 des pluies moyennes sur le bassin a pour expression : $\sigma_S^2 = \sigma^2 g(S,p)$

où $g(S,p)$ n'est plus qu'une fonction de la surface et de la forme du bassin versant ainsi que du paramètre p caractéristique de la structure spatiale des pluies. Ainsi par exemple si le bassin peut être assimilé à un carré on obtient :

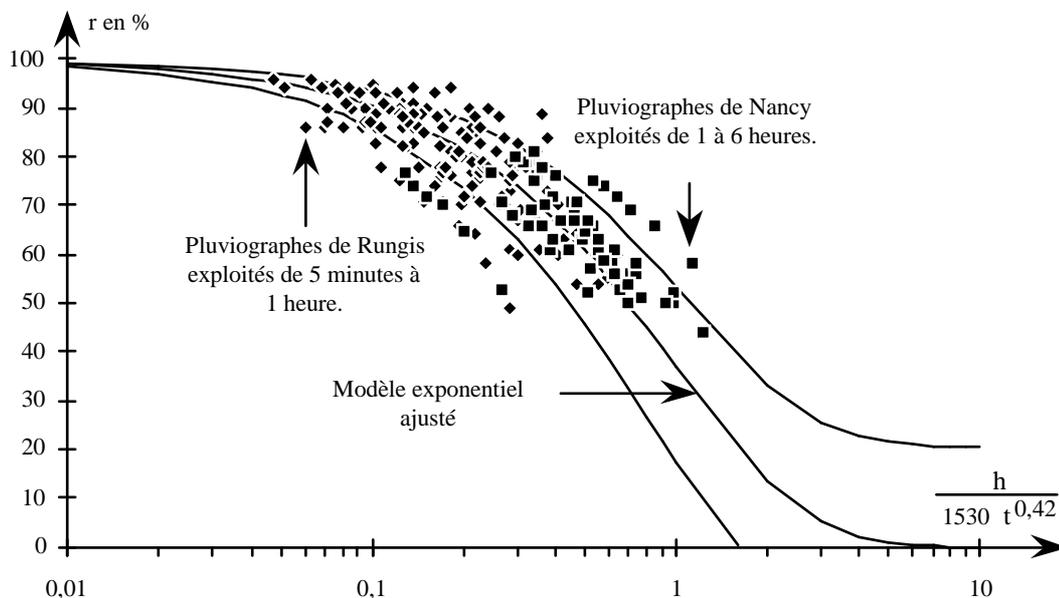
$$g(S,p) = 1 - \frac{0.245\sqrt{S}}{p}$$

Evaluer les coefficients d'abatement revient donc à calculer les moyenne et variance des pluies ponctuelles (d'après la station la plus longue), de déterminer le paramètre p caractéristique de la structure spatiale des précipitations (d'après le corrélogramme ou le variogramme construit d'après la série courte et dense de pluviomètre). On en tire alors les moyenne et variance de la distribution des pluies moyennes sur la durée. D'où bien sur la loi de distribution de ces pluies moyennes et les coefficients d'abatement.

A titre d'exemple, nous avons analysé les coefficients de corrélation r obtenus par DESBORDES à Rungis où il a exploité un ensemble de pluviographes à des pas de temps allant de 5 mn à 1 heure, et ceux obtenus par le District Urbain de Nancy pour des pas de temps de 1 à 6 heures. On constate que les corrélogrammes s'ajustent sensiblement à des modèles exponentiels et que les paramètres p varient comme une fonction puissance de la durée. Pour l'ensemble de ces observations on obtient la relation suivante :

$$r(h,t) = e^{-h / (1530 t^{0.42})}$$

(avec h exprimé en mètres et t en minutes)



Pour un bassin versant de forme carré nous avons vu que : $\frac{\sigma_S}{\sigma} = 1 - \frac{0.245\sqrt{S}}{p}$

ce qui nous donne ici : $\frac{\sigma_S}{\sigma} = 1 - \frac{0.245\sqrt{S}}{1530t^{0.42}}$

Admettons que les pluies moyennes sur le bassin suivent une loi de Gumbel, on aura alors :

$$F_S(x) = e^{-e^{-\frac{x-x_0S}{g_S}}}$$

avec $g_S = 0,78 \sigma_S$ et $x_0S = m - 0,577 g$

ou encore :

$$x_{FS} = x_0S + g_S [-\text{Ln}\{-\text{Ln}(F)\}]$$

Cependant lorsque la fréquence tend vers 1, le deuxième terme est prépondérant et l'on a :

$$x_{FS} = g_S [-\text{Ln}\{-\text{Ln}(F)\}]$$

$$x_{FS} = 0,78 \sigma_S [-\text{Ln}\{-\text{Ln}(F)\}]$$

Il en est de même pour les pluies ponctuelles :

$$x_{FP} \sim 0,78 \sigma [-\text{Ln}\{-\text{Ln}(F)\}]$$

et pour les fréquences rares le coefficient d'abattement $K(S,t)$ devient :

$$K(S,t) = x_{FS} / x_{FP} = \sigma_S / \sigma$$

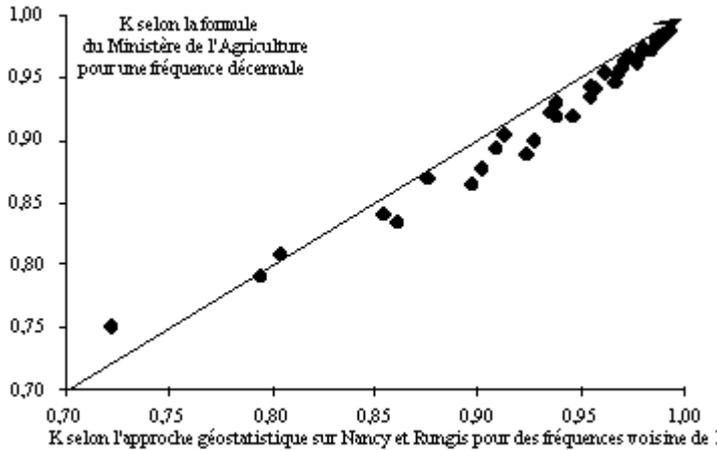
ou encore :

$$K(S,t) = 1 - \frac{\sqrt{S}}{36t^{0.42}} \quad (S \text{ en km}^2, t \text{ en heures})$$

On est alors frappé par l'analogie avec la formule proposée par le Ministère de l'Agriculture pour des pluies décennales en région parisienne : $K(S,t) = 1 - \frac{\sqrt{S}}{30t^{0.33}}$

Cette formule a été établie empiriquement après avoir évalué les valeurs de K par la méthode traditionnelle pour des durées et des surfaces quelconques.

Comme le montre la figure suivante, on constate une très bonne concordance dans la gamme de durée 1 h - 20 h et pour les surfaces de 1 à 100 km².



On est alors frappé par l'analogie avec la formule proposée par le Ministère de l'Agriculture pour des pluies décennales en région parisienne :

$$K(S,t) = 1 - \frac{\sqrt{S}}{30t^{0.33}}$$

Cette formule a été établie empiriquement après avoir évalué les valeurs de K par la méthode traditionnelle pour des durées et des surfaces quelconques.

Comme le montre la figure suivante, on constate une très bonne concordance dans la gamme de durée 1 h - 20 h et pour les surfaces de 1 à 100 km².

IX.4 - ETUDE DE LA PLUIE EN FONCTION DE LA DUREE

Précisons tout de suite, que l'on peut concevoir cette étude sous deux aspects :

- l'étude de la pluie en fonction du temps ; ceci concerne le dépouillement des hyétogrammes et la constitution de hyétogrammes-types ;
- l'étude de la statistique des pluies sur différentes durées.

Nous ne développerons ici que ce deuxième aspect, le premier - présentant des intérêts évidents - ne se prête cependant pas encore à une présentation synthétique.

IX.4.1 - Notion d'intensité moyenne sur une durée

Définir l'intensité de la pluie est relativement simple. Soit $h(t)$ la hauteur cumulée de pluie en fonction du temps. On appellera $I(t)$, intensité de la pluie à l'instant t , le terme :

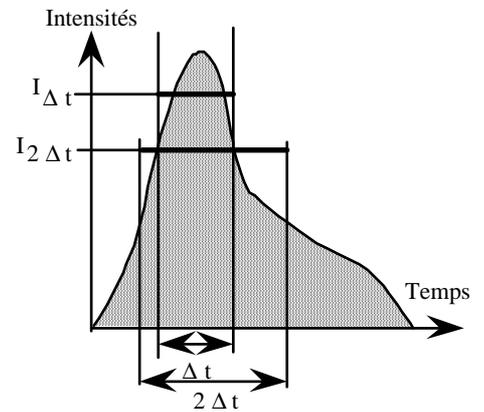
$$I_t = \frac{dh(t)}{dt}$$

Malheureusement, on ne connaît pas la fonction $h(t)$ d'une façon continue mais par une fonction $\hat{h}(t)$ qui varie par palier (des paliers de 1/10 de mm si on utilise les données d'un pluviographe, des paliers de un jour si on utilise les données d'un pluviomètre).

Il n'est donc pas possible d'en déterminer la dérivée et nous serons amenés à définir non plus l'intensité à un instant t , mais l'intensité sur une durée Δt :

$$I_{\Delta t} = \frac{\Delta h(t)}{\Delta t}$$

$I_{\Delta t}$ représente l'intensité moyenne de la pluie sur un intervalle de temps Δt .



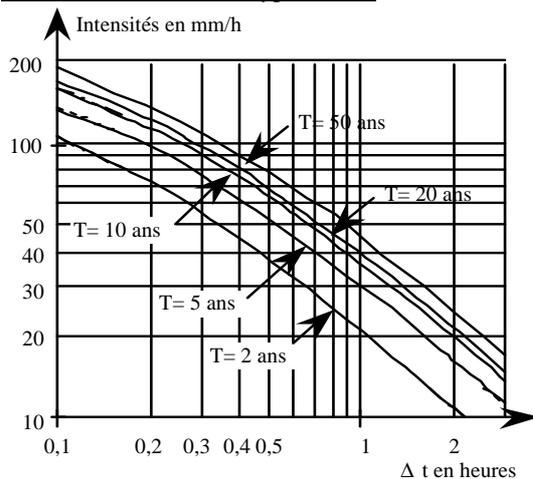
Il faut donc toujours préciser, lorsqu'on parle d'intensité, la durée sur laquelle on la mesure. Supposons que par un procédé, on puisse connaître l'intensité maximale I_t . Le schéma ci-contre montre que l'intensité moyenne sur un Δt maximale pour cette averse décroît lorsque Δt croît : $I_{\Delta t \text{ max}} = I_{2\Delta t \text{ max}}$

Pour un Δt donné, on peut donc s'intéresser à la statistique des hauteurs de pluie tombée sur ce Δt ou à celle des intensités moyennes sur ce Δt . Pour chaque durée Δt , nous aurons une relation expérimentale intensité-fréquence.

IX.4.2 - Fonctions durée-intensité-fréquence

De très nombreux auteurs se sont intéressés à ces fonctions. L'ensemble de leurs résultats tend à montrer que sous nos climats, les lois de variations entre intensité et durée changent de part et d'autre d'une durée limite de l'ordre de 3 h. Ceci peut très bien s'expliquer par le fait que pour des durées allant de quelques minutes à trois heures environ, on travaille sur une même averse (au sens de la définition C). Au-delà de 3 heures, et jusqu'à un ou deux jours, on rencontre par contre plusieurs averses.

IX.4.2.1 - Formules du type Talbot



Ce type de formulation est le suivant :

$$I_{\Delta t} = \frac{a}{b + \Delta t}$$

a et b sont fonction de la fréquence F et valables pour des Δt inférieurs ou égaux à 3 heures environ.

Parmi les résultats les plus connus, citons ceux obtenus par GRISOLLET sur les pluies à Paris-Montsouris, sur une période de 50 ans. La figure ci-contre en donne une présentation graphique. Les courbes expérimentales ont pour expression mathématique :

$$I_{\Delta t} = \frac{a}{b + \Delta t}$$

(I en mm/h ; Δt en heures)

Période de retour	2 ans	5 ans	10 ans	20 ans	50 ans
a	23,3	35,0	43,2	47,5	53,7
b	0,115	0,150	0,167	0,177	0,183

IX.4.2.2 - Formules du type Montana

Pour des durées supérieures à 3 h, on constate que les formules du type hyperbolique ne sont plus adaptées. MONTANA a proposé une formulation du type :

$$I_{\Delta t} = \frac{a}{(\Delta t)^b}$$

$$\text{ou } P_{\Delta t} = a (\Delta t)^{1-b}$$

a et b sont des paramètres qui dépendent de la région et de la fréquence. Il semble cependant que b varie relativement lentement avec F .

Bien souvent, on pourra faire l'hypothèse que b est constant et que a , qui représente l'intensité de la pluie de fréquence F sur un intervalle de temps unité, suit une loi à comportement asymptotiquement exponentiel. Pour des fréquences rares, on pourra donc rechercher des expressions de l'intensité I sur un intervalle de temps Δt en fonction de la période de retour $T = \frac{1}{1-F}$ par des expressions du type :

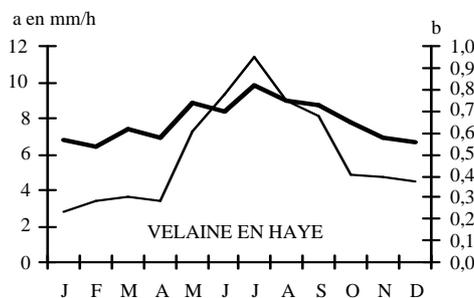
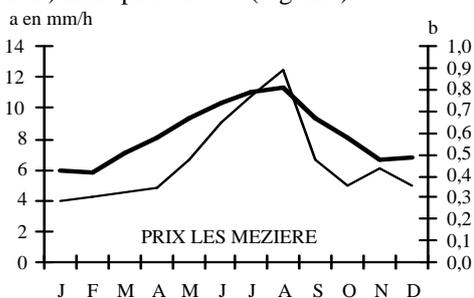
$$I_{\Delta t} = \frac{I_0 + g_0 \text{Ln} T}{\Delta t^b}$$

Le tableau suivant récapitule les résultats d'une synthèse effectuée par le C.T.G.R.E.F. et valable pour les pluies de fréquence décennale et de durée comprise entre 1 h et 24 h (a en mm/h, t en heures) :

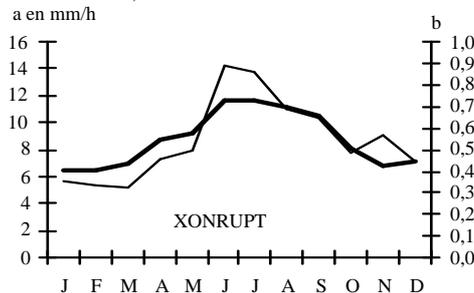
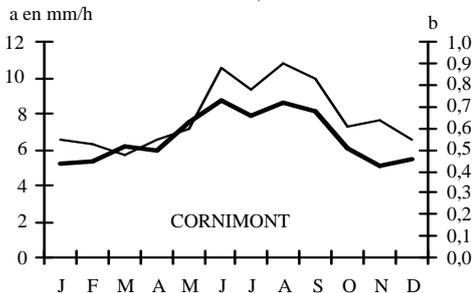
Stations	a	b	Stations	a	b
Abbeville	27	0.72	Limoges	28	0.61
Agen	39	0.74	Marignane	33	0.61
Alençon	27	0.72	Le Mans	26	0.69
Auxerre	28	0.75	Metz	24	0.74
Bastia	61	0.62	Mont-de-Marsan	31	0.76
Beaulieu	33	0.54	Pau	30	0.77
Biarritz	44	0.51	Poitiers	36	0.77
Bretigny	22	0.76	Reims	26	0.80
Casaux	28	0.72	Rostrenen	20	0.66
Challes-les-Eaux	34	0.73	St Quentin	26	0.72
Chartres	23	0.72	Salon	80	0.87
Gourdon	35	0.57	Toulouse	37	0.76
Lille	32	0.84			

Soulignons que ces formules sont valables pour des pluies maximales annuelles. Si on s'intéresse aux pluies de différentes saisons ou de différents mois, les résultats peuvent changer notablement.

Les graphiques ci-après présentent les variations de a et b pour les pluies maximales mensuelles de fréquence 0,5 de quatre stations de l'Est de la France. Ces résultats peuvent s'interpréter de la façon suivante : les pluies d'été sont plus intenses (a fort) mais plus brèves (b grand).



(les valeurs de a sont en très fort et celles de b en trait fin)



Ces graphiques peuvent constituer une bonne base pour un découpage de l'année en saison, ainsi dans l'est de la France on pourrait retenir un "hiver" de Novembre à Avril, et un "été" de Mai à Octobre.

Nous avons vu que les pluies extrêmes pouvaient se caractériser par leur gradex et nous venons de voir que ces pluies variaient en fonction de la durée selon des lois de Montana où b varie très peu avec la fréquence. Dans ces conditions, il est normal que le gradex des pluies de différentes durées varie également comme des lois de Montana. Pour l'Est de la France, les gradex peuvent se mettre sous la forme :

$$G_{\Delta t} = a (\Delta t)^c$$

$G_{\Delta t}$: gradex, en mm, des pluies extrêmes de durée Δt (en heures). Les valeurs de c dépendent du site et de la saison avec pour ordre de grandeur les valeurs suivantes :

c	hiver	été
Lorraine	0,45	0,14
Vosges	0,67	0,34

X - METHODES D'ETUDE DES CRUES

X.1 - DEFINITION ET INTRODUCTION

La défense contre les crues et les problèmes d'irrigation ont été historiquement à l'origine du développement de l'hydrologie.

L'importance économique extrême de l'étude des crues s'explique en grande partie par des considérations de géographie : les zones de fortes concentrations urbaines sont très fréquemment près des fleuves ; les terres agricoles les plus riches sont généralement dans les basses vallées. D'autres considérations économiques justifient également une étude approfondie des crues : par exemple, les ouvrages de franchissement représentent une part très importante des coûts des infra-structures routières ou ferroviaires, le coût de l'évacuateur de crue qui protège une retenue en terre peut très bien être du même ordre de grandeur que celui de la digue elle-même...

L'homme de tout temps s'est donc intéressé aux crues, que ce soit à leur prédétermination ou à leur prévision ; il en a résulté une foule de méthodes d'étude dont, bien sûr, certaines sont dépassées maintenant. Cependant, il en persiste un grand nombre encore et chaque année voit l'apparition d'une nouvelle méthode ou l'amélioration d'anciennes. Une conclusion s'impose : le problème des crues est loin d'être réglé. Dans la plupart des cas, plusieurs méthodes d'étude sont envisageables et ce n'est que la convergence d'un faisceau de présomptions qui justifie une certaine confiance.

Mais avant d'aller plus loin, qu'est-ce qu'une crue ? Quelle est son origine ? Comment la caractériser ? Les définitions s'articulent autour de deux concepts justifiés par l'existence de deux phénomènes qui peuvent être plus ou moins liés :

- *la crue est une augmentation brutale du débit quel que soit ce débit (typiquement, la crue provoquée par un orage) ;*
- *la crue est la période durant laquelle le débit dépasse un certain multiple (2 à 3 par exemple) du débit moyen annuel.*

En fait, la définition peut changer en fonction de la taille du bassin et du phénomène engendrant la crue. Les phénomènes engendrant les crues peuvent se ramener à trois grands types :

- *les crues d'averses sont de loin les plus fréquentes sous nos climats ; elles sont provoquées par des averses exceptionnelles, soit par leur durée, leur intensité, leur extension géographique, leur répétition, ou la combinaison de plusieurs de ces caractères ;*

• *les crues de fonte de neige sont plus rares en France ; elles ne se rencontrent guère que dans les hauts bassins des Alpes et des Pyrénées. A la fin de l'hiver, ces bassins sont recouverts d'un manteau neigeux et l'arrivée d'un front chaud accompagné souvent de vent et de pluie, provoque une fusion rapide de la neige. Les eaux de fusion nivale et de la pluie s'écoulant sur un sol parfois encore gelé et sans végétation, peuvent provoquer des crues importantes ;*

• *enfin, signalons les crues d'embâcle et de débâcle de glace bien qu'elles n'affectent généralement que les régions sub-polaires (nord du Canada et Sibérie par exemple).*

Quelles sont par ailleurs les valeurs numériques qui permettent de caractériser une crue ? La réponse à cette question en nécessite une autre : quel est le problème posé ?

• *Dimensionner l'évacuateur de crue d'une retenue au fil de l'eau (pas de stockage possible de l'eau en amont ; l'élément caractéristique de la crue est certainement son débit de pointe instantané. Dans certains cas, ce débit est méconnu et on est obligé de se rabattre sur le débit moyen journalier maximum, quitte à rétablir le débit instantané par un coefficient multiplicatif, dit "coefficient de pointe", plus ou moins empirique.*

• *Effectuer le recalibrage d'un cours d'eau en zone agricole ; l'élément caractéristique de la crue est la durée pendant laquelle le débit demeure supérieur au débit de débordement.*

• *Dimensionner un bassin de compensation ; c'est alors le volume de la crue qui est la caractéristique essentielle.*

• *Etudier l'amortissement de la crue à la traversée d'un barrage réservoir ; c'est alors tout l'hydrogramme de la crue qu'il est nécessaire de connaître.*

Bien d'autres cas sont encore possibles. Tout est affaire de bon sens dans le choix des variables que l'on étudiera.

X.2 - METHODES EMPIRIQUES DE PREDETERMINATION DES CRUES

La prédétermination du débit d'une crue consiste à associer au dépassement d'un certain débit une probabilité d'occurrence. Pendant très longtemps, les hydrologues ont travaillé avec l'idée qu'il existait sur un bassin versant, un débit maximum possible. Cette notion de crue maximale possible est généralement réfutée aujourd'hui. On considère que si la probabilité de dépassement d'un débit x tend vers 0, ce débit tend lui-même vers l'infini. Nous ne parlerons donc plus de crue maximale possible mais de débits de crue de fréquence donnée.

X.2.1 - Intérêts de la recherche historique

Les crues sont un phénomène suffisamment important pour que l'on conserve le souvenir des principales catastrophes. Ce souvenir peut se traduire par des descriptions écrites, par des repères de niveau marqués par l'homme, par des déplacements de blocs de rochers...

La période sur laquelle portent ces souvenirs est variable de quelques dizaines d'années à quelques centaines.

Généralement, les crues sont caractérisées par un niveau d'eau (les débits ne sont guère mesurés que depuis le début du siècle). Il nous faudra, pour dimensionner des ouvrages, passer des hauteurs aux débits. Ceci ne peut se faire que si une courbe de tarage, établie de nos jours, est valable pour les périodes anciennes. Une telle validité dans le

temps n'est justifiée que si le site a été hydrauliquement stable. Cette stabilité est envisageable dans certains cas comme des passages de ponts anciens, des endiguements entre des quais...

De toute façon, le passage des hauteurs aux débits, lorsqu'il est possible, sera toujours entaché d'une forte incertitude. Que peut donc apporter la recherche historique ? Surtout l'ordre de grandeur du phénomène.

L'étude des crues, basée sur d'autres méthodes telles que nous les verrons plus loin, s'appuie sur des observations plus ou moins longues, plus ou moins stables. Il se peut très bien que les observations chiffrées disponibles sur une période restreinte ne permettent pas d'envisager l'ampleur de crues excessivement rares et provoquées par des phénomènes tout à fait exceptionnels et d'une autre nature que ceux observés habituellement.

Dans tous les cas, il est donc recommandé de procéder à une investigation "historique". Que ce soit dans des textes anciens ou tout au moins par interrogation des populations locales. Les résultats que l'on peut en espérer serviront essentiellement à vérifier que les estimations de débits de crues faites par d'autres méthodes permettent de rendre raisonnablement compte des différentes crues catastrophiques enregistrées.

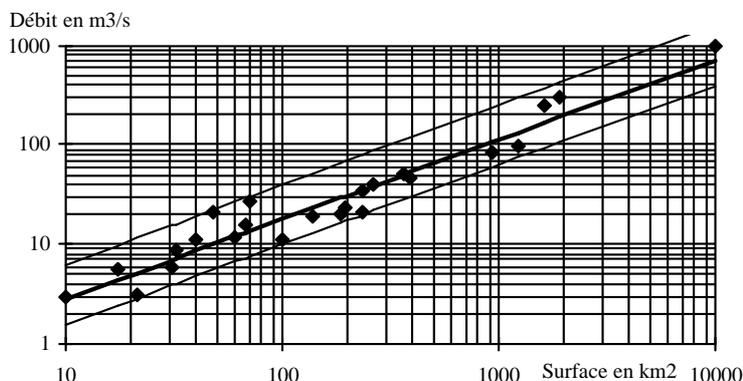
X.2.2 - Evolution du débit avec la surface

Les paramètres essentiels qui influent sur le débit de crue de fréquence donnée pour un bassin versant sont :

- la surface, • la pluviométrie, • la nature géologique du bassin.

Dans une région restreinte où on peut supposer que "géologie" et surtout "pluviométrie" varient peu, il est possible d'étudier l'évolution du débit de crue de fréquence F en fonction de la surface du bassin. La quasi-totalité des études montrent qu'en première approximation, le débit Q_F de fréquence F varie comme une fonction puissance de la surface : $Q_F = a S^b$

Le terme b est inférieur à 1, ce qui traduit l'amortissement du débit de pointe de crue en fonction de la surface. Le coefficient "a" est lui une variable régionale intégrant essentiellement "pluviométrie" et "géologie".



Comme le montre l'exemple ci-contre, on peut donc établir des formules régionales qui permettent d'évaluer sommairement les débits de crue. Aussi, à partir des observations faites sur 24 stations hydrométriques de Lorraine, on peut estimer que le débit de pointe de crue décennale varie comme S à la puissance 0,9 :

$$Q_i = a S^{0,8}$$

(Q_i en m^3/s ; S en km^2 ; a est de l'ordre de 0,45 en moyenne et il est compris entre 0,25 et 1,0).

Débits décennaux de pointe de crue en Lorraine

Evidemment, de telles formules n'ont qu'un intérêt régional et la confiance que l'on peut leur attribuer est fonction de la qualité de la durée et du nombre d'observations de débits qui en sont à la base X.2.3 -

X.2.3 Evolution du débit avec la fréquence

De nombreux auteurs ont proposé de relier la variation du débit à celle de la période de retour T

$$\left[T = \frac{1}{1 - F} \right] \text{ par des relations du type :}$$

$$Q(T) = Q(1) (1 + \beta \log T)$$

Q(T) étant le débit de période de retour T années; Q(1) étant la crue dite annuelle et β est un coefficient régional variant généralement de 0,7 à 0,8 mais pouvant atteindre parfois des valeurs supérieures à 2.

Le caractère local de cette valeur β ne permet pas de donner ici les valeurs à prendre dans chaque cas particulier. On peut seulement constater que le débit devenant une fonction linéaire de la période de retour, cela sous-entend que les lois de distribution des débits de crue ont un comportement asymptotiquement exponentiel.

D'autres approches sont possibles : citons par exemple le cas des crues de quelques bassins versants de Lorraine. Les débits de crue s'ajustent assez bien pour des fréquences comprises entre 2 % et 98 % à des lois de Galton :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} du ; u = \frac{\log x - \overline{\log x}}{\sigma_{\log x}}$$

Or, on constate que $\sigma_{\log x}$ est indépendant de $\overline{\log x}$; par ailleurs, les $\sigma_{\log x}$ varient très peu et sont dans 80 % des cas compris entre 0,114 et 0,285. On peut donc établir des coefficients de passage valables dans 80 % des cas pour aller d'un débit de crue de fréquence F1 à celui de fréquence F2 : dans le cas de la Lorraine :

F1, F2	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
0,5	1,27 à 1,74	1,40 à 2,32	1,54 à 2,93	1,71 à 3,84	1,84 à 4,61
0,8	1	1,12 à 1,33	1,23 à 1,68	1,37 à 2,21	1,48 à 2,65
0,9		1	1,10 à 1,27	1,22 à 1,66	1,32 à 1,99
0,95			1	1,11 à 1,31	1,20 à 1,57
0,98				1	1,08 à 1,20

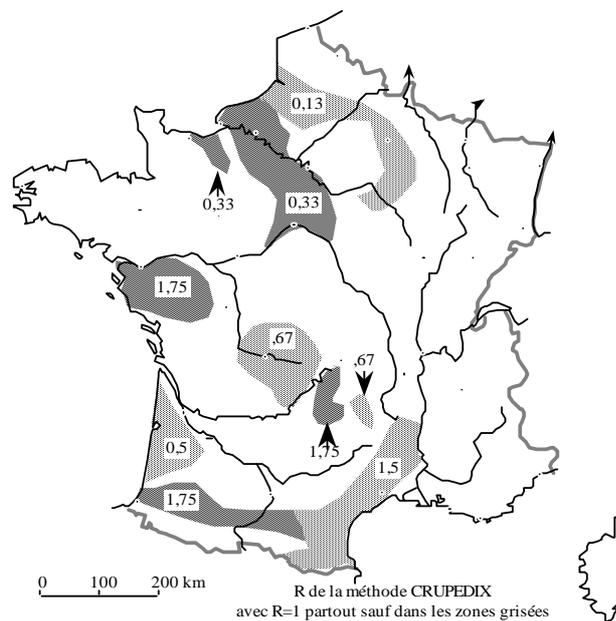
X.2.4 - Différentes méthodes empiriques valables pour la France

Les formules empiriques sont multiples mais souvent d'une portée assez régionale. Nous ne donnerons ici que quelques éléments valables en France, mais qui peuvent se transposer tout au moins dans leur principe, à d'autres régions. Dans un ordre de complexités croissantes, nous verrons trois méthodes.

X.2.4.1 - Méthode CRUPEDIX

Cette méthode a été établie en 1980 par le Ministère de l'Agriculture Français. L'étude a été menée à partir de 630 bassins versants pour lesquels on a pu évaluer le débit décennal instantané. Ces différentes valeurs de débits ont été mises en régression avec les principaux facteurs pouvant jouer un rôle. Parmi les plus significatifs, on a retenu : la surface du bassin S en km^2 ; la pluie journalière décennale P_{10} en mm/j et un coefficient régional R . Le débit décennal

de pointe de crue Q_d en m^3/s est donné par la relation : $Q_d = S^{0,8} \left[\frac{P}{80} \right]^2 R$



R est généralement égal à 1 sauf pour quelques régions indiquées sur la carte jointe.

La gamme des surfaces de bassins versants couverte par cette formule est de l'ordre de 10 à 2.000 km^2 .

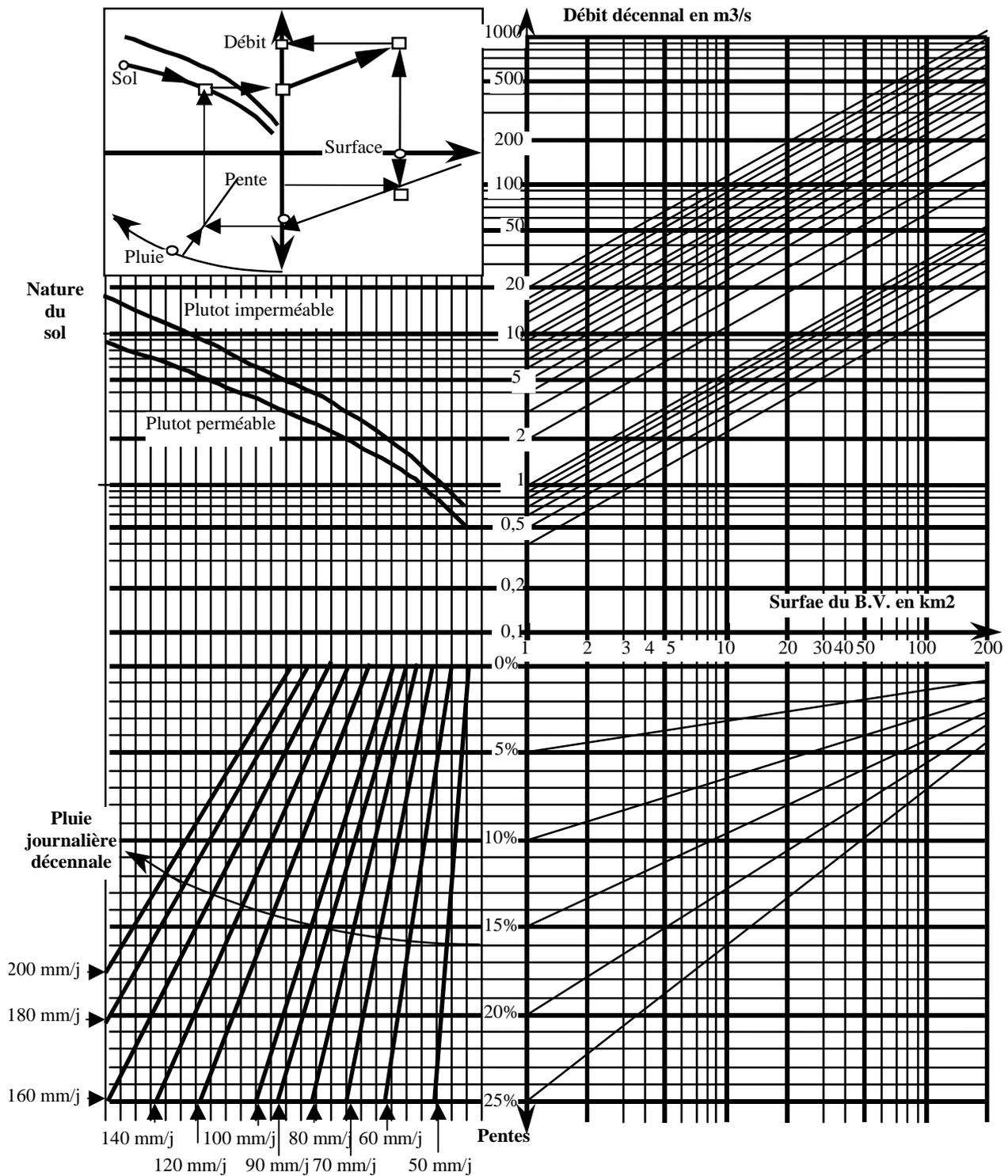
L'intervalle de confiance à 90 % est d'environ : $\left[\frac{Q_d}{2}, 2Q_d \right]$

L'intervalle de confiance à 70 % est d'environ : $\left[\frac{2Q_d}{3}, \frac{3Q_d}{2} \right]$

X.2.4.2 - Abaques SOGREAH

En 1968, la SOGREAH a procédé à une synthèse des crues sur des bassins versants de 1 à 100 km^2 . 105 stations hydrométriques ont été utilisées pour mettre en évidence les relations entre le débit de pointe de crue décennale Q_d en m^3/s , la pente du thalweg principal I en %, la surface S du bassin en km^2 ; la pluie journalière décennale P_{10} en mm/j et une alternative de perméabilité des terrains. L'abaque ci-après provient d'une publication du Ministère de l'Agriculture et permet, à partir de ces données, d'évaluer le débit décennal Q_d . L'intervalle de confiance à 85 % sur

cette estimation est à peu près : $\frac{Q_d}{1,5}$; $1,5 Q_d$



Cet abaque correspond sensiblement aux calculs suivants :

A partir de la pente i (sans unité ou m/m) et de la surface S en km^2 , on calcul la pente corrigée i' par :

$$i' = \frac{i}{1 - 0,153 \ln(S)}$$

Connaissant i' (sans unité) et la pluie journalière décennale P_{j10} en mm on calcule un terme intermédiaire A :

$$A = \frac{P_{j10}}{3} (i' + 0.2) \left(1 - e^{-\frac{P_{j10} - 40}{20}} \right) + \frac{i' - 0.1}{0.3}$$

Enfin le débit décennal de pointe de crue Q_{i10} (en m^3/s) est obtenu par les relations suivantes :

Terrains plutôt perméables

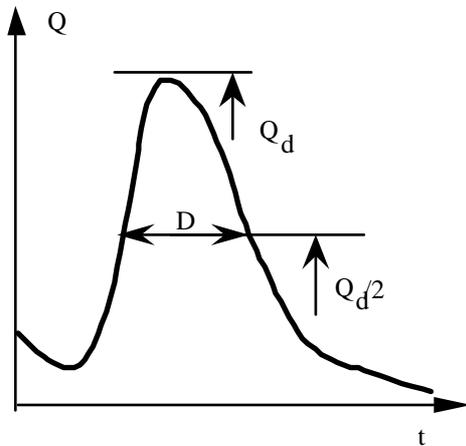
$$Q_{i10}_{\text{perméable}} = e^{\frac{\sqrt{A} - 2}{1.4}} S^{0,75}$$

Terrains plutôt imperméables

$$Q_{i10}_{\text{imperméable}} = e^{\frac{\sqrt{A} - 1,5}{1,25}} S^{0,75}$$

X.2.4.3 - Méthode SOCOSE

En 1980, le Ministère de l'Agriculture a proposé une nouvelle méthode d'estimation des débits de crue sur des petits bassins versants. Cette méthode a été calée sur 200 bassins de 2 à 200 km². Le caractère particulier de cette méthode est de donner non seulement le débit de crue décennal, mais de préciser sa durée. Par ailleurs, cette méthode allie une interprétation purement statistique de certains paramètres et des considérations déterministes sur le passage des pluies aux débits (hydrogramme unitaire et fonction de production du "Soil Conservation Service" (cf. plus loin).



Outre le débit décennal de pointe de crue Q_d en m³/s, la méthode SOCOSE permet d'évaluer la durée D , en heures, durant laquelle le débit demeure supérieur à $\frac{Q_d}{2}$.

Les paramètres explicatifs sont :

- la surface S du bassin versant en km²
- la longueur L du plus long thalweg en km
- la pluie journalière décennale P_{10} en mm/j
- la hauteur de pluie moyenne annuelle P_a en mm/an
- la température moyenne interannuelle t_a en °C ramenée au niveau de la mer
- le paramètre b de la loi de Montana liant l'intensité I de la pluie décennale à sa durée t : $I = \frac{a}{t^b}$

La durée D s'obtient par son log népérien :

$$\ln(D) = -0.69 + 0.32 \ln(S) + 2.2 \sqrt{\frac{P_a}{P_{10}}} \frac{1}{t_a}$$

Le paramètre intermédiaire J (infiltration de la fonction de production S.C.S.) s'obtient ainsi :

$$J = 260 + 21 \ln\left(\frac{S}{L}\right) - 54 \sqrt{\frac{P_a}{P_{10}}}$$

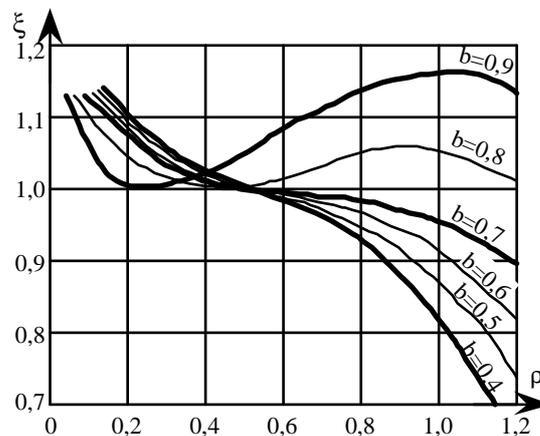
On calcule ensuite les paramètres intermédiaires k et ρ :

$$k = \frac{24^b P_{10}}{21 \left[1 + \frac{\sqrt{S}}{30^3 \sqrt{D}} \right]}$$

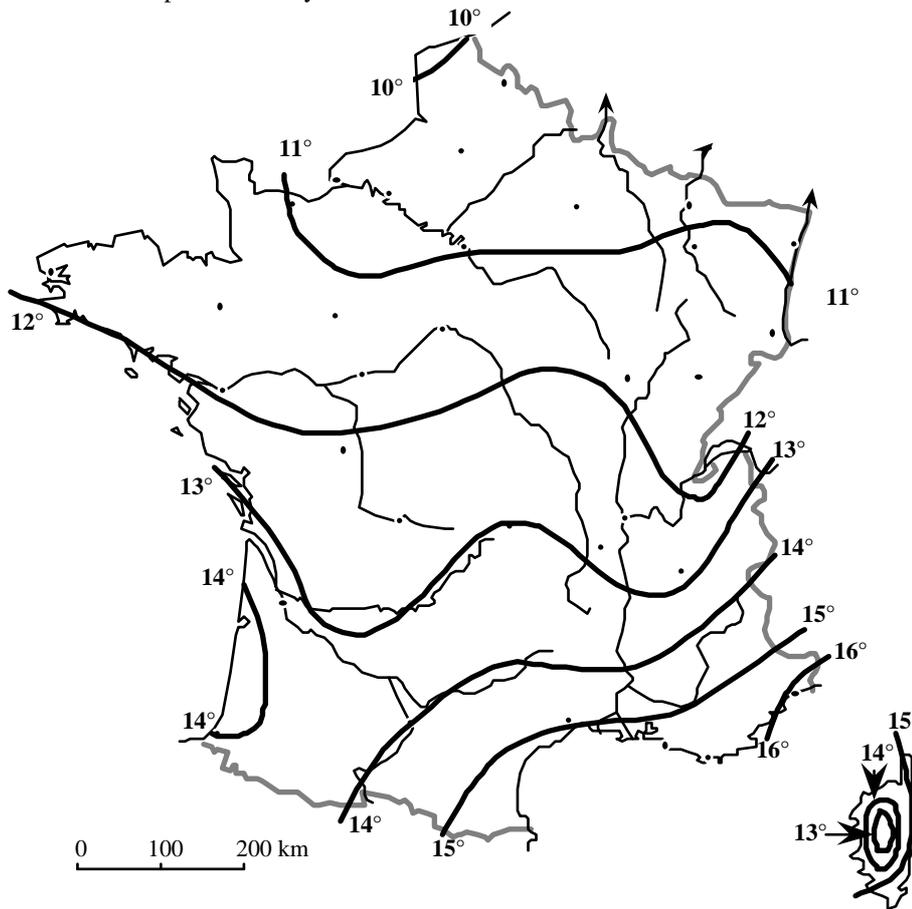
$$\rho = 1 - \frac{0,2 J}{k(1,25D)^{1-b}}$$

A partir de ρ et de b , l'abaque ci-contre donne le coefficient ξ . On obtient enfin le débit décennal Q_d par la relation :

$$Q_d = \xi \frac{k S}{(1,25D)^b} \frac{r^2}{15-12r}$$



La carte suivante donne les températures moyennes interannuelles ramenée au niveau de la mer :



X.2.5 - Différentes méthodes empiriques valables pour l'Afrique

X.2.5.1 - Approche déterministe - les débits de crues décennales en Afrique

(par RODIER et AUVRAY de l'O.R.S.T.O.M.)

X.2.5.1.1 Détermination de l'averse décennale

On constate que les fortes averses présentent un corps de courte durée et qu'il ne se produit généralement qu'une seule averse par jour. La statistique des hauteurs précipitées lors des averses se ramène sensiblement à celle des hauteurs de pluies journalières P_j . Pour ces hauteurs de pluies journalières, on rencontre généralement des distributions gumbéliennes.

Pour passer de la pluie ponctuelle à la pluie sur le bassin versant de surface S , on applique un coefficient d'abattement K qui, en Afrique, varie avec la surface S (en km^2), la hauteur de pluie annuelle P_{an} (en mm) et la période de retour T (en années) de l'averse :

$$K = 1 - 0,001 (9 \log T - 0,042 P_{an} + 152) \log S$$

Il est donc possible de calculer pour la période de retour T , le volume d'eau V précipité sur le bassin versant :

$$V = K (T, S, P_{an}) * S * P_j (T)$$

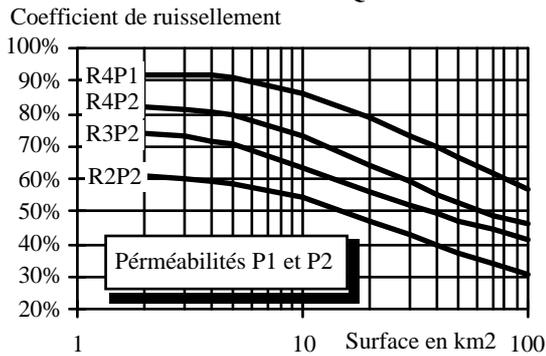
L'averse étant généralement très brève devant le temps de concentration, on peut considérer qu'elle est unitaire et que son intensité est quasi-constante.

X.2.5.1.2 Passage à l'averse de la pluie nette

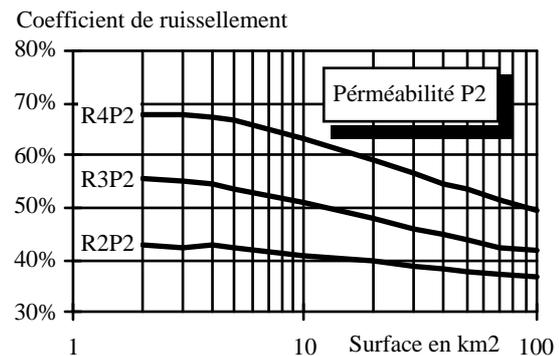
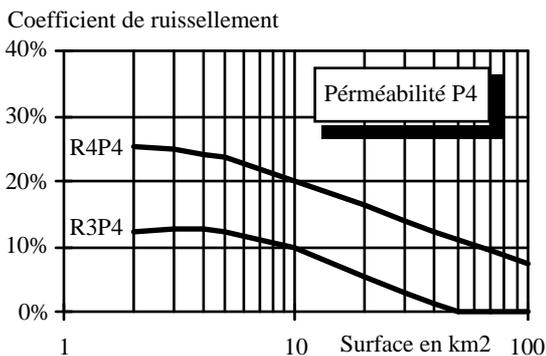
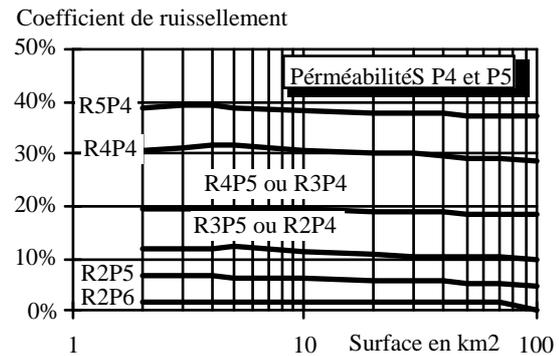
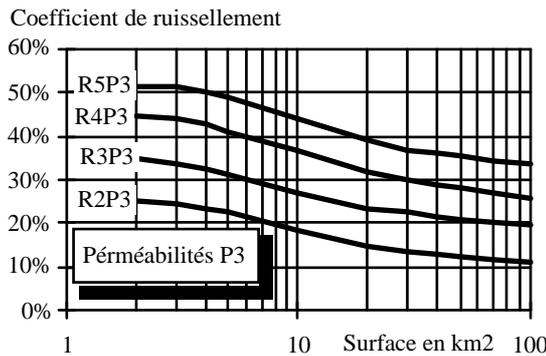
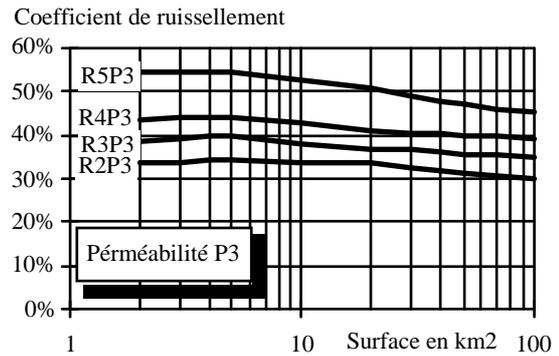
RODIER et AUVRAY proposent de passer de l'averse à la pluie nette par un coefficient de ruissellement K_r qui dépend à la fois de la perte et de la maîtrise du sous-sol.

En admettant des classifications suivant les pertes de R1 à R6 et suivant la perméabilité de P1 à P5 (Classification ORSTOM), on peut proposer des abaques donnant K_r dans les conditions de la crue décennale.

REGIMES SAHELIENS ET SUB-DESERTIQUES



RÉGIMES TROPICAUX ET TROPICAUX DE TRANSITION



X.2.5.1.3 Hydrogramme unitaire

RODIER et AUVRAY proposent d'admettre que la pluie est suffisamment brève pour que la réponse à une averse soit unitaire.

L'hydrogramme unitaire est alors défini par trois paramètres dont seuls les deux premiers sont nécessaires à l'évaluation du débit de pointe de crue décennale :

- t_b (ou t_c) temps de base (ou temps de concentration) généralement exprimé en heures ;
- α : coefficient de pointe, rapport du débit de pointe de crue au débit moyen sur la durée t ;
- t_m : temps de la montée de la crue.

a) Coefficient α :

° Bassins sahéliens et désertiques :

S en km ²	2	10	20	50	100
α	3,0	3,0	3,0	4,5	4,0

° Bassins typiques et de transition :

$$\alpha = 2,5 \text{ quel que soit } S$$

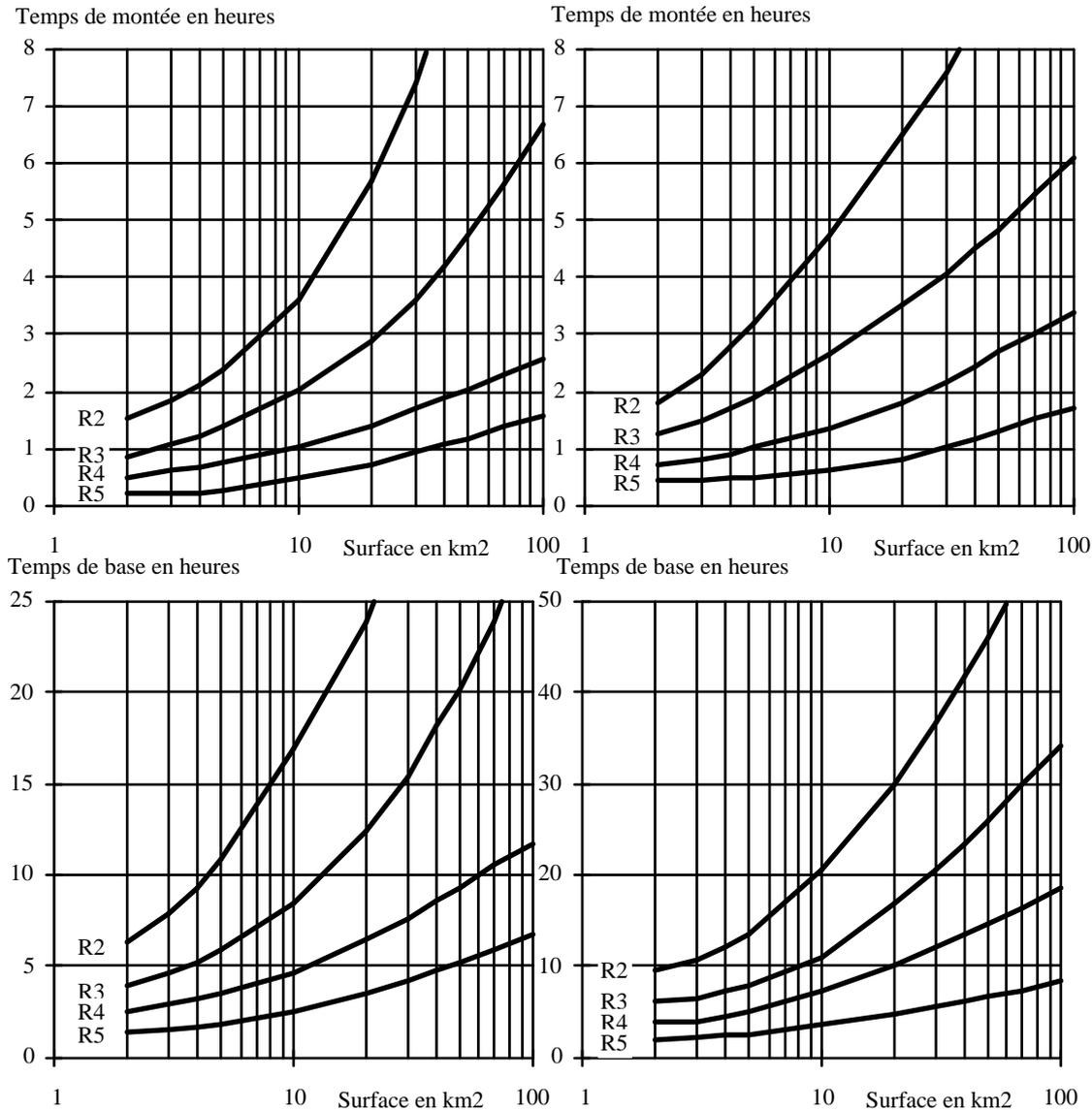
° Bassins forestiers :

Selon S et R	$S < 5 \text{ km}^2$	$5 < S < 10$	$S > 10 \text{ km}^2$
Relief R2 (plaine)	1,9	2,2	2 - 3
Relief R6 (montagne)	2	2,3	2 - 4

b) Coefficients t_b et t_m :

REGIMES SAHELIENS SUB-DESERTIQUES

REGIMES TROPICAUX ET TOPICAUX DE TRANSITION



X.2.5.2 - Approche stochastique - les débits de crues décennales en Afrique de l'Ouest et Centrale (par PUECH et CHABI GONNI du C.I.E.H.)

X.2.5.2.1 Inventaire des variables explicatives et à expliquer

La seule variable à expliquer est le débit de pointe de crue décennale Q_{10} .

Les variables explicatives sont nombreuses, qualitatives et quantitatives :

- S : surface du bassin versant en km^2 ;
- P_{an} : hauteur de pluie annuelle en mm ;
- g : indice de pente global ;
- K_r : coefficient de ruissellement dans les conditions décennales ;
- nature du sous-sol (élément qualitatif).

X.2.5.2.2 Nature de la régression

Le C.I.E.H. suppose que Q_{10} varie avec les autres variables comme une fonction puissance du style :

$$Q_{10} = a S^\alpha P_{\text{an}}^\beta I_g^\gamma K_r^\delta$$

Manifestement, la régression $\log Q_{10}$ en $\log S$, $\log P_{\text{an}}$, *etc.*, est une régression linéaire multiple de résolution classique.

A partir des observations sur 162 bassins versants, on obtient des régressions de types suivants :

$$\begin{aligned} \text{Afrique de l'Ouest :} \quad Q_{10} &= 197 \quad S^{0,633} \quad I_g^{0,35} \quad P_{an}^{-0,643} \\ Q_{10} &= 0,163 \quad S^{0,628} \quad I_g^{0,26} \quad K_r^{0,877} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Afrique centrale:} \quad Q_{10} &= 15,77 \quad S^{0,787} \quad I_g^{1,089} \quad P_{an}^{-0,638} \\ Q_{10} &= 0,225 \quad S^{0,496} \quad I_g^{0,507} \quad K_r^{1,087} \end{aligned}$$

Evaluation de K_r avec la géologie :

$$\begin{aligned} \cdot \text{ granit} \quad & K_r = 2.300 P_{an}^{-0,67} \\ \cdot \text{ grès} \quad & K_r = 300 P_{an}^{-0,375} \\ \cdot \text{ sable} \quad & K_r = 210 P_{an}^{2,2} \\ \cdot \text{ argiles et marnes} \quad & K_r = 300 P_{an}^{-0,3} \\ \cdot \text{ schistes} \quad & K_r = 370 P_{an}^{-0,375} \end{aligned}$$

□ Application

Soit un bassin de 10 km^2 au Burkina Faso. On peut admettre que la hauteur de pluie annuelle est de l'ordre de 700 mm et la pluie journalière de 102 mm . Le climat y est sahélien. On calculera d'abord le volume de l'averse décennale :

$$\begin{aligned} \text{Coefficient d'abattement :} \quad K &= 1 - 0,001 (9 \log 10 - 0,042 \infty 700 + 152) \log 10 \\ K &= 0,87 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Volume de l'averse :} \quad V &= 0,87 \infty 102 \text{ mm} \infty 10 \text{ km}^2 \\ V &= 887.400 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Si ce bassin est imperméable (P2) et rangé dans la classe de relief R4, on trouve un coefficient de ruissellement de 73% .

Le temps de base d'un tel bassin est évalué à $4,5 \text{ h}$ et son temps de montée à $1,5 \text{ h}$. Le débit moyen de la crue sera donc :

$$Q = \frac{647.802}{3.600} = 40 \text{ m}^3/\text{s}$$

Le coefficient de pointe α est de l'ordre de 3 ; la pointe de crue décennale sera donc d'environ $40 \infty 3 = 120 \text{ m}^3/\text{s}$.

X.3 - ETUDE STATISTIQUE DES DEBITS DE CRUE

Lorsque l'on dispose d'observations de débits de crue, au site même ou à proximité, il est possible de procéder à un ajustement statistique puis à une extrapolation sur les fréquences. Cette méthode est parfaitement justifiée si on dispose de suffisamment d'observations (10 ans est un strict minimum). Cependant, il n'est pas raisonnable d'extrapoler l'ajustement statistique à des périodes de retour supérieures à $2n$ ou $3n$, n étant la durée d'observations. Cette méthode est donc limitée par la durée habituelle des observations à la prédétermination de débits de crue de fréquence généralement inférieure à $0,99$.

X.3.1 - Constitution de l'échantillon

Dans le cas où les observations ont été faites sur une durée suffisante, de l'ordre de 20 ans , on pourra travailler sur les débits instantanés ou moyens journaliers, maximaux annuels. Bien souvent, la période d'observations est restreinte et on pourra constituer un échantillon de débits de crue par corrélation à partir d'une station plus longue.

Généralement, les corrélations se font en log-log, les distributions de fréquence des crues étant à forte dissymétrie positive.

Les variables utilisées sont généralement un débit maximum instantané Q_i ou un débit moyen journalier Q_j maximum. Que ce soit à partir d'une période réellement observée ou d'une série reconstituée, on peut retenir :

- les débits maxima annuels de chacune des n années (on s'assure de l'indépendance des observations puisque l'on travaille sur des années hydrologiques débutant à la fin de la période d'étiage) ;
- tous les débits supérieurs à un certain seuil de débit Q_0 ;
- etc.

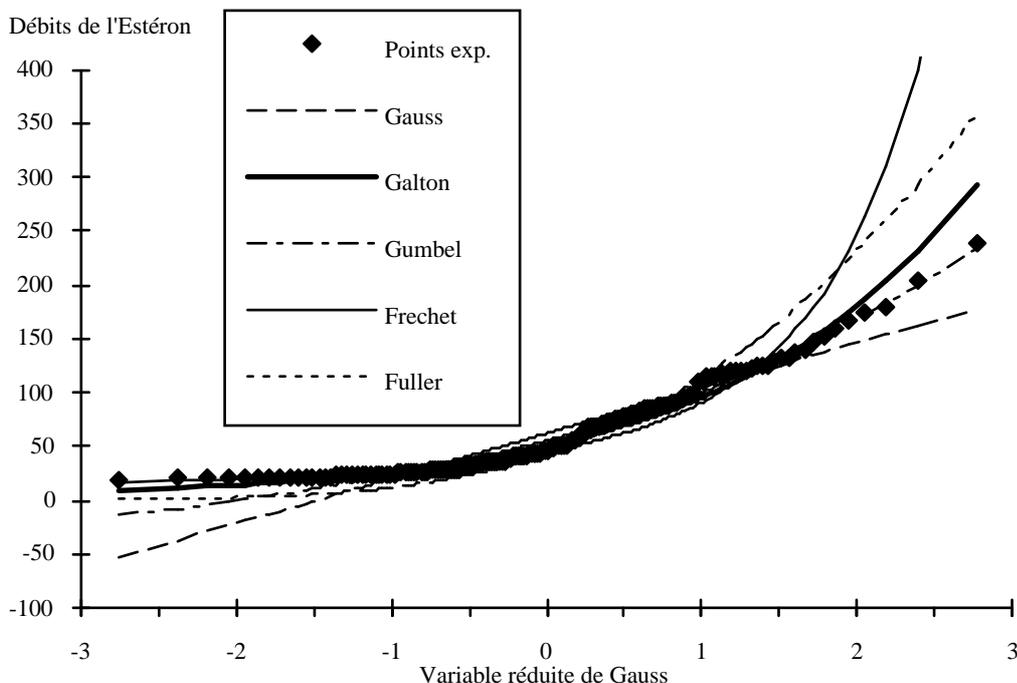
La première définition est préférable lorsque la taille de l'échantillon est suffisante. Les fréquences s'expriment alors en n^{-1} , et les observations sont généralement parfaitement indépendantes.

La seconde définition est d'un emploi un peu plus délicat, soit à cause du problème de l'indépendance, soit du problème de la fréquence de ($Q < Q_0$). Elle ne s'utilise que si le nombre d'années disponibles est faible et avec une extrême prudence.

X.3.2 - Choix du type de loi et ajustement

Le choix du type de loi peut être guidé par des tests statistiques, les coefficients de symétrie et d'aplatissement. Malheureusement la taille de l'échantillon est généralement trop faible pour que les estimations des moments d'ordre supérieur soient fiables.

Le plus souvent, on procède par expérience en choisissant une loi à priori puis en vérifiant a posteriori que ce choix n'est pas absurde (alignement correct des points dans un graphique adéquat). Dans telle région, les expériences faites sur des stations longues et fiables montrent que ce sont les lois de Galton, de Gumbel... qui rendent le mieux compte de la statistique des débits de crue (sous les climats tempérés, ce sont généralement les lois de Gumbel, Galton ou Pearson III).



Quant aux méthodes d'ajustement, toutes celles citées au chapitre "statistiques" s'appliquent ici. Le choix d'une technique dépend alors essentiellement des moyens de calcul dont on dispose et de la taille de l'échantillon.

X.3.3 - Passage des débits moyens journaliers aux débits instantanés

Très fréquemment, les débits maxima instantanés de crue ne sont pas disponibles ou ne le sont que sur une période relativement courte. Seule reste la ressource de travailler sur les débits moyens journaliers maxima annuels.

Soit Q_i le débit maximum instantané d'une crue et Q_j le débit moyen journalier durant lequel on a observé Q_j .

On appellera coefficient de pointe r , le rapport : $r = \frac{Q_i}{Q_j}$

Deux cas de figures peuvent alors se produire :

X.3.3.1 - Le coefficient de pointe n'est pas connu

C'est par exemple le cas de stations où on ne dispose que d'observations discrètes des hauteurs d'eau : 1 par 6 h ou 3 h par exemple en période de crues. On peut alors évaluer avec une précision acceptable les Q_j mais certainement pas les Q_i . On peut alors utiliser la formule de Fuller qui exprime une relation expérimentale entre le coefficient \bar{r} moyen et la superficie S du bassin versant (en km^2) :

$$r \cong 1 + \left(\frac{2,66}{S} \right)^{0,3}$$

Ayant étudié la statistique des débits journaliers Q_j , on obtient le quantile de fréquence F recherché Q_{jF} pour passer au même quantile mais sur les débits instantanés Q_{iF} . On admettra :

$$Q_{iF} \cong r Q_{jF} = Q_{jF} \left(1 + \left(\frac{2,66}{S} \right)^{0,3} \right)$$

Manifestement, ceci implique que l'on admet que le coefficient de pointe défini sur une crue est indépendant de la fréquence de la crue et que le coefficient est identique, qu'on le définisse comme il a été fait plus haut ou comme rapport d'un débit instantané de fréquence F au débit moyen journalier de même fréquence.

X.3.3.2 - On connaît quelques valeurs du coefficient de pointe

Ceci est généralement le cas pour les dernières années d'observations. On peut raisonnablement penser que la loi de distribution de r est la même pour une station donnée selon que l'on s'intéresse aux crues maximales annuelles ou mensuelles. Ainsi, même avec un nombre restreint n d'années d'observations simultanées des Q_j et des Q_i , on peut étudier la statistique des r sur un échantillon de taille 12n.

Nous admettrons ensuite que les coefficients r sont indépendants des valeurs de Q_j . Ceci se vérifie généralement. Dans ces conditions, les Q_i sont une variable aléatoire produit de deux autres variables aléatoires Q_j et r : $Q_i = r Q_j$

Or, on connaît la distribution statistique des r d'après 12n mois ; de même, la distribution statistique des Q_j est connue d'après une longue période. On peut donc évaluer la distribution des Q_i d'après la combinaison des lois de distribution des Q_j et des r. Une étude très complète a été menée en 1976 sur ce sujet par le C.T.G.R.E.F. qui a publié un ensemble d'abaques permettant de résoudre ce problème. La combinaison des lois des probabilités dépend de leur type et des paramètres d'ajustement. Les principaux types de lois envisagées sont :

- | | | |
|---------------------|---|----------------------------------|
| . la loi de Galton | } | pour la distribution F des Q_j |
| . la loi de Gumbel | | |
| . la loi de Pearson | | |
| . la loi de Gauss | } | pour la distribution G des r |
| . la loi de Galton | | |

La distribution I des débits instantanés des Q_i est :

$$I(Q_i) = \int_D f(Q_j) g(r) dQ_j dr$$

D étant le domaine où $Q_j < Q_i$, f et g étant les densités de probabilité de F et G.

Du point de vue des ajustements, toutes les lois envisagées sont à deux paramètres. On peut donc caractériser chaque ajustement par un nombre sans dimension ; le coefficient de variation C a été retenu :

$$C = \frac{\text{écart - type}}{\text{moyenne}} = \frac{s_x}{\bar{x}}$$

$$\text{avec : } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}{n-1}}$$

Les abaques suivant ne concernent que des débits moyens journaliers distribués selon une loi de Gumbel (cas très fréquent) et des valeurs du coefficient de pointe r distribués selon des lois de Gauss où de Galton. Les abaques se lisent d'abord en choisissant les lois de distribution des r et des Q_j . Chaque diagramme correspond à une valeur C_q du coefficient de variation des Q_j . En ordonnées sont portées les fréquences F du quantile cherché et en abscisses, les valeurs d'un coefficient correctif λ . Dans chaque diagramme, le faisceau de courbe est paramétré suivant les valeurs du coefficient de variation C_r des coefficients de pointe.

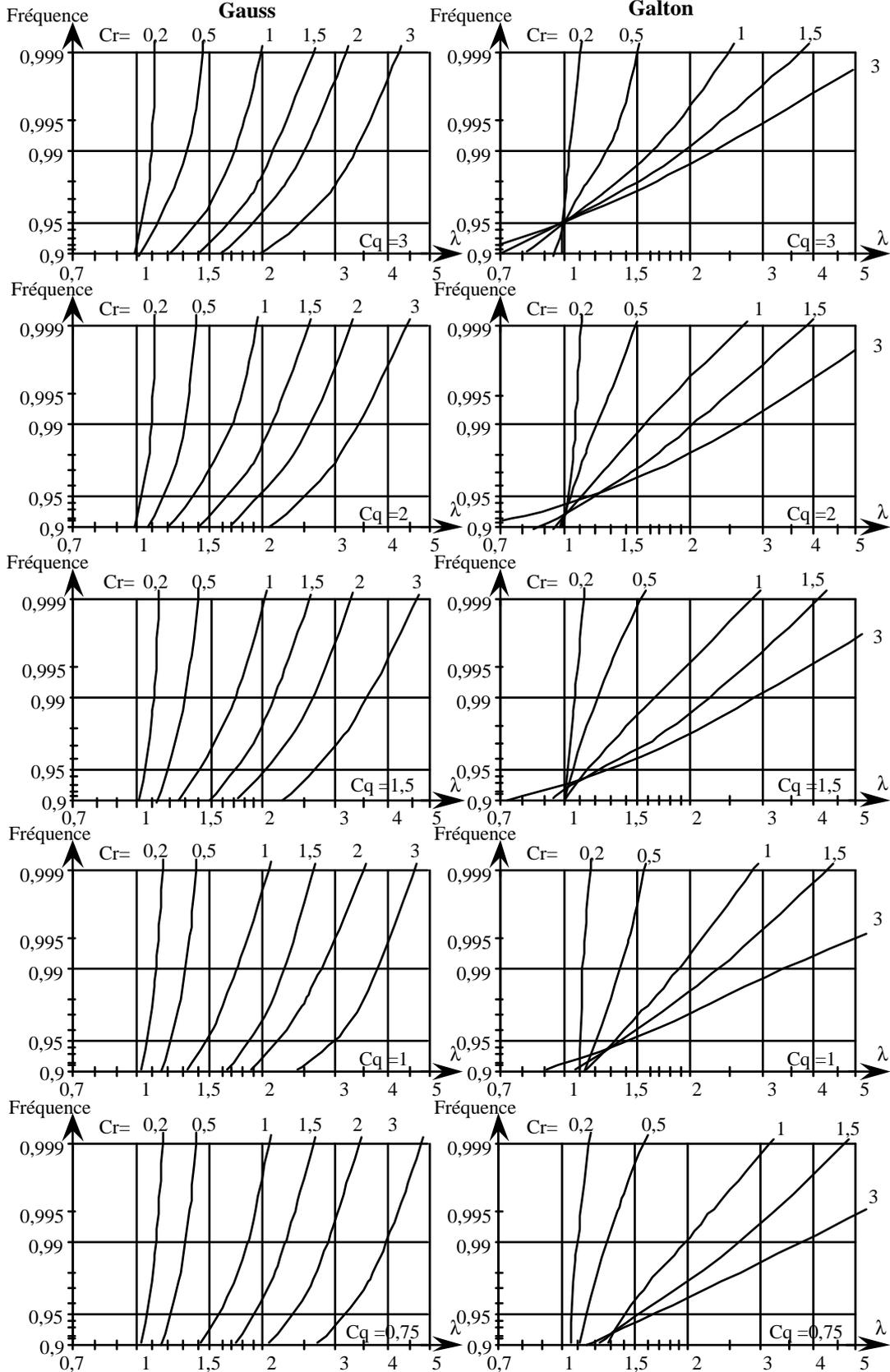
Le coefficient correctif λ est tel que :

$$Q_{iF} = Q_{jF} \bar{r} \lambda(C_q, C_r, F)$$

Les débits sont distribués selon une loi de Gumbel

avec pour coefficients de variation $Cq = \frac{\sigma q}{q}$ et $Cr = \frac{\sigma r}{r}$

Les coefficients de pointe journalière r sont distribués selon une loi de Gauss



Application :

Ainsi, pour des Q_j distribués selon une loi de Gumbel avec $\bar{Q}_j = 4 \text{ m}^3/\text{s}$ et $\sigma_{Q_j} = 3 \text{ m}^3/\text{s}$, on obtient un coefficient de variation $C_{Q_j} = 0,75$.

L'ajustement à une loi de Gumbel par la méthode des moments nous donne :

$$g = 0,78 \sigma_{Q_j} = 0,78 * 3 = 2,34$$

$$x_0 = \bar{Q}_j - 0,577 g = 4 - 0,577 * 2,34 = 2,64$$

$$F(Q_j) = e^{-e^{-\frac{Q_j - x_0}{g}}}$$

Pour la crue centennale : $F = 0,99 \Rightarrow u = 4,6$:

$$Q_{j0,99} = 2,64 + 4,6 * 2,34 = 13,4 \text{ m}^3/\text{s}$$

Supposons que l'étude des coefficients r montre qu'ils sont gaussiens, de moyenne $\bar{r} = 2,4$ et d'écart-type $\sigma_r = 1,2$. On aura :

$$C_r = \frac{1,2}{2,4} = 0,5$$

En se reportant à la table Q_j Gumbel, r Gauss, puis au graphique $C_{Q_j} = 0,75$ et enfin en lisant l'intersection de la courbe $C_r = 0,5$ avec l'ordonnée $F = 0,99$, on obtient en abscisse : $\lambda \cong 1,3$.

Le débit de pointe de crue décennale $Q_{i0,99}$ sera donc :

$$Q_{i0,99} = Q_{j0,99} \bar{r} * \lambda$$

$$Q_{i0,99} = 13,4 * 2,4 * 1,3 = 41,8 \text{ m}^3/\text{s}$$

X.3.4 - Etude des crues maximales annuelles à partir des crues supérieures à un seuil et des données historiques

Plutôt que de ne retenir que les na crues maximales annuelles observées en na années, on peut également travailler sur toutes les crues ayant dépassé un seuil Q_0 .

On prendra pour Q_0 une valeur faible mais suffisante pour que tous les débits Q supérieurs à Q_0 soient bien des débits de pointe de crue de même nature que les crues catastrophiques. Par ailleurs, on s'assurera que les crues sont bien indépendantes (par exemple, un intervalle minimum de quelques jours entre deux crues).

La statistique des crues est alors caractérisée par la distribution du nombre de crues par an, puis par la distribution des crues supérieures à Q_0 .

X.3.4.1 - Choix des lois de probabilité

X.3.4.1.1 Fréquence du nombre de jours de crues par an

Très souvent, le nombre n de crues supérieures à Q_0 observées en une année est distribué selon une loi de Poisson :

$$\text{Prob}(n) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}$$

Ceci s'explique par le fait que si le seuil est suffisamment haut, le dépassement de seuil est un événement rare et dans ces conditions la loi de Bernoulli tend vers une loi de Poisson (ou loi des événements rares).

Cette loi de distribution ne comporte qu'un seul paramètre μ qui est à la fois la moyenne et la variance. Si l'on s'intéresse à la somme m de deux variables poissonniennes de paramètres μ et μ' :

$$\text{Prob}(n) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} \quad , \quad \text{Prob}(n') = \frac{\mu'^{n'}}{n'!} e^{-\mu'}$$

... soit $m = n + n'$. Calculons $\text{Prob}(m)$:

$$\text{Prob}(0) = e^{-\mu} \frac{\mu^0}{0!} * e^{-\mu'} \frac{\mu'^0}{0!} = e^{-(\mu+\mu')}$$

$$\text{Prob}(1) = e^{-\mu} \frac{\mu^1}{1!} * e^{-\mu'} \frac{\mu'^0}{0!} + e^{-\mu} \frac{\mu^0}{0!} * e^{-\mu'} \frac{\mu'^1}{1!} = e^{-(\mu+\mu')} \frac{\mu + \mu'}{1!}$$

$$\begin{aligned} \text{Prob}(2) &= e^{-\mu} \frac{\mu^2}{2!} * e^{-\mu'} \frac{\mu'^0}{0!} + e^{-\mu} \frac{\mu^1}{1!} * e^{-\mu'} \frac{\mu'^1}{1!} + e^{-\mu} \frac{\mu^0}{0!} * e^{-\mu'} \frac{\mu'^2}{2!} \\ &= e^{-(\mu+\mu')} \frac{(\mu + \mu')^2}{2!} \end{aligned}$$

Dans le cas général :

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(k) &= \sum_{i=0}^k e^{-\mu} \frac{\mu^i}{i!} * e^{-\mu'} \frac{\mu'^{(k-i)}}{(k-i)!} \\
&= e^{-(\mu+\mu')} \sum_{i=0}^k \frac{\mu^i \mu'^{(k-i)}}{i!(k-i)!} \\
&= e^{-(\mu+\mu')} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \mu^i \mu'^{(k-i)} \\
&= e^{-(\mu+\mu')} \frac{(\mu+\mu')^k}{k!}
\end{aligned}$$

La somme de deux variables poissonniennes est donc une variable poissonnienne dont le paramètre est la somme des paramètres des variables initiales.

X.3.4.1.2 Fréquence des crues supérieures à un seuil

Plusieurs types de lois peuvent être utilisés, mais le plus souvent, on retiendra une distribution de Weibull (ou sous une forme simplifiée une distribution exponentielle) :

$$G(Q) = 1 - e^{-\left(\frac{Q-Q_0}{g}\right)^p}$$

... dont la densité est :

$$g(Q) = \frac{p}{g} \left(\frac{Q-Q_0}{g}\right)^{p-1} e^{-\left(\frac{Q-Q_0}{g}\right)^p}$$

Dans cette loi figurent trois paramètres g , p et Q_0 , mais ce dernier est choisi *a priori*. Il n'y a donc que deux paramètres à ajuster.

X.3.4.2 - Ajustement par le maximum de vraisemblance

Les crues ont été observées durant n_a années et on constate que la $i^{\text{ème}}$ année, n_i crues ont dépassé Q_0 . Au total, les crues Q_j supérieures à Q_0 ont été au nombre de n_c :

$$n_c = \sum_{i=1}^{n_a} n_i$$

On choisit donc d'approcher les statistiques par :

$$\text{Proba}(n_i) = \frac{\mu^{n_i}}{n_i!} e^{-\mu} \text{ et } G(Q) = 1 - e^{-\left(\frac{Q-Q_0}{g}\right)^p}$$

Les trois paramètres μ , g et p seront ajustés de façon à maximiser la vraisemblance V de l'échantillon observé.

$$V = \text{Prob}(n_1 \text{ crues la } 1^{\text{ère}} \text{ année}) = \frac{\mu^{n_1}}{n_1!} e^{-\mu}$$

$$* \text{Prob}(n_2 \text{ crues la } 2^{\text{ème}} \text{ année}) * \frac{\mu^{n_2}}{n_2!} e^{-\mu}$$

* *

$$* \text{Prob}(n_{na} \text{ crues la } n_a^{\text{ème}} \text{ année}) * \frac{\mu^{n_{na}}}{n_{na}!} e^{-\mu}$$

$$* \text{Prob}(1^{\text{ère}} \text{ crue égale à } Q_1) * \frac{p}{g} \left(\frac{Q_1-Q_0}{g}\right)^{p-1} e^{-\left(\frac{Q_1-Q_0}{g}\right)^p}$$

$$* \text{Prob}(2^{\text{ème}} \text{ crue égale à } Q_2) * \frac{p}{g} \left(\frac{Q_2-Q_0}{g}\right)^{p-1} e^{-\left(\frac{Q_2-Q_0}{g}\right)^p}$$

* *

$$* \text{Prob (nc}^{\text{ème}} \text{ crue égale à } Q_{nc}) \quad * \frac{p}{g} \left(\frac{Q_{nc} - Q_o}{g} \right)^{p-1} e^{-\left(\frac{Q_{nc} - Q_o}{g} \right)^p}$$

$$V = \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_{na}!} \frac{e^{-\mu na} \mu^{-nc} p^{nc}}{g^{nc}} \prod_{i=1}^{nc} \left(\frac{Q_i - Q_o}{g} \right)^{p-1} \prod_{i=1}^{nc} e^{-\left(\frac{Q_i - Q_o}{g} \right)^p}$$

Pour évaluer ces trois paramètres on écrira donc successivement :

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = \frac{\partial V}{\partial g} = \frac{\partial V}{\partial p} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial \ln(V)}{\partial \mu} = \frac{\partial \ln(V)}{\partial g} = \frac{\partial \ln(V)}{\partial p} = 0$$

$$\ln(V) = C_{/\mu}^{te} - \mu na + nc \ln(\mu) \Rightarrow \frac{\partial \ln(V)}{\partial \mu} = -na + \frac{nc}{\mu} = 0 \Rightarrow \mu = \frac{nc}{na}$$

$$\ln(V) = C_{/g}^{te} - nc \ln(g) - nc (p-1) \ln(g) - \frac{1}{g^p} \sum_{i=1}^{nc} (Q_i - Q_o)^p$$

$$\frac{\partial \ln(V)}{\partial g} = -\frac{nc}{g} - \frac{nc(p-1)}{g} + \frac{p}{g^{p+1}} \sum_{i=1}^{nc} (Q_i - Q_o)^p = 0 \Rightarrow g = \sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^{nc} (Q_i - Q_o)^p}{nc}}$$

$$\ln(V) = C_{/p}^{te} + nc \ln(p) + (p-1) \sum_{i=1}^{nc} \ln(Q_i - Q_o) + \sum_{i=1}^{nc} \left(\frac{Q_i - Q_o}{g} \right)^p$$

si l'on se rappelle ici que la dérivée de a^x est $a^x \ln(a)$ et que l'on remplace g par sa valeur précédente on trouve une équation implicite en p :

$$\frac{1}{p} = \frac{\sum_{i=1}^{nc} (Q_i - Q_o)^p \ln(Q_i - Q_o)}{\sum_{i=1}^{nc} (Q_i - Q_o)^p} - \frac{1}{nc} \sum_{i=1}^{nc} \ln(Q_i - Q_o)$$

Après avoir résolu par itérations successives cette équation en p , on retrouve aisément p et μ .

X.3.4.3 - Passage à la fréquence des crues maximales annuelles

Pour déterminer la loi de probabilité $F(Q)$ associée aux crues maximales annuelles, il suffit de composer les lois de probabilité $\text{Prob}(n)$ et $G(Q)$:

$$F(Q) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k) G(Q)^k$$

Lorsque $G(Q)$ est voisin de 1, $F(Q)$ peut s'approcher par la relation :

$$F(Q) = 1 - \mu [1 - G(Q)]$$

... où μ représente le nombre moyen de crues par an.

Il faut noter que dans le cas fréquent où les débits supérieurs à un seuil sont ajustés à une loi exponentielle et le nombre de crues par an à une loi de Poisson, la loi des débits maximaux annuels $F(Q)$ est simple :

$$\text{Posons donc : } P(k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} \quad \text{et} \quad G(Q) = 1 - e^{-\frac{(Q-Q_o)}{g}}$$

$$F(Q) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k) G(Q)^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} \left[1 - e^{-\frac{(Q-Q_o)}{g}} \right]^k$$

$$F(Q) = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\mu \left(1 - e^{-\frac{(Q-Q_o)}{g}} \right) \right]^k}{k!}$$

$$\text{Mais en se rappelant le développement en série de } e^x : e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$F(Q) = e^{-\mu} e^{\mu \left[1 - e^{-\frac{(Q-Q_0)}{g}} \right]} = e^{-\mu} \left[e^{-\frac{(Q-Q_0)}{g}} \right]^{\mu}$$

$$F(Q) = e^{-e^{-\frac{(Q-Q_0 - g \ln \mu)}{g}}}$$

Ce qui montre que les crues maximales annuelles sont distribuées selon une loi de Gumbel.

X.3.4.4 - Prise en compte des données historiques

Supposons que l'on sache que sur na' années antérieures, il n'y a eu que ns crues Q'_k supérieures ou égales à Q'_{ns} (on connaît les ns plus fortes crues sur ces na' années). On peut évaluer la vraisemblance V' de cet échantillon ainsi :

V' = quel que soit i compris entre ns et ∞ : Proba (d'avoir observé i crues supérieures à Q_0 en na' années)

* Proba (que $i - ns$ soient inférieures à Q'_{ns})

• Proba (que les ns autres soient égales à celles observées)

$$V' = \sum_{i=ns}^{\infty} \frac{e^{-\mu na'} \mu^i na'^i}{i!} \left(1 - e^{-\left(\frac{Q'_{ns}-Q_0}{g}\right)^p} \right)^{i-ns} \prod_{k=1}^{ns} \frac{p}{g} \left(\frac{Q'_k - Q_0}{g} \right)^{p-1} e^{-\left(\frac{Q'_k - Q_0}{g}\right)^p}$$

$$V' = \prod_{k=1}^{ns} \frac{p}{g} \left(\frac{Q'_k - Q_0}{g} \right)^{p-1} e^{-\left(\frac{Q'_k - Q_0}{g}\right)^p} \sum_{i=ns}^{\infty} \frac{e^{-\mu na'} \mu^i na'^i}{i!} \left(1 - e^{-\left(\frac{Q'_{ns}-Q_0}{g}\right)^p} \right)^{i-ns}$$

$$V' = \prod_{k=1}^{ns} \frac{p}{g} \left(\frac{Q'_k - Q_0}{g} \right)^{p-1} e^{-\left(\frac{Q'_k - Q_0}{g}\right)^p} e^{-\mu na'} \mu^{ns} na'^{ns} \sum_{i=ns}^{\infty} \frac{\mu^{i-ns} na'^{i-ns}}{i!} \left(1 - e^{-\left(\frac{Q'_{ns}-Q_0}{g}\right)^p} \right)^{i-ns}$$

Si l'on remarque que le développement de e^x est : $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

$$V' = \prod_{k=1}^{ns} \frac{p}{g} \left(\frac{Q'_k - Q_0}{g} \right)^{p-1} e^{-\left(\frac{Q'_k - Q_0}{g}\right)^p} e^{-\mu na'} \mu^{ns} na'^{ns} e^{\left(\mu na' \left[1 - e^{-\left(\frac{Q'_{ns}-Q_0}{g}\right)^p} \right] \right)}$$

$$V' = \prod_{k=1}^{ns} \frac{p}{g} \left(\frac{Q'_k - Q_0}{g} \right)^{p-1} e^{-\left(\frac{Q'_k - Q_0}{g}\right)^p} \mu^{ns} na'^{ns} e^{\mu na' e^{-\left(\frac{Q'_{ns}-Q_0}{g}\right)^p}}$$

$$V' = \frac{\mu^{ns} na'^{ns} p^{ns}}{g^{ns}} \prod_{k=1}^{ns} \left(\frac{Q'_k - Q_0}{g} \right)^{p-1} e^{-\left(\frac{Q'_k - Q_0}{g}\right)^p} e^{\mu na' e^{-\left(\frac{Q'_{ns}-Q_0}{g}\right)^p}}$$

$$V' = \rho^{ns} * p^{ns} * \prod_{k=1}^{ns} (Q'_k - Q_0)^{p-1} * e^{-\rho} \sum_{k=1}^{ns} (Q'_k - Q_0)^p * e^{-\mu na'} * (\mu na')^{ns}$$

$$e^x = \sum_{i=ns}^{\infty} \frac{[\mu na' (1 - e^{-\left(\frac{Q'_k - Q_0}{g}\right)^p})]^{i-ns}}{(i-ns)!}$$

Si l'on remarque que le développement de e^x est : $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

$$V' = na^{ns} \mu^{ns} r^{ns} p^{ns} \sum_{i=ns}^{\infty} (Q'_k - Q_0)^{p-1} e^{-\rho} \sum_{i=ns}^{\infty} (Q'_k - Q_0)^p - \mu na' e^{-\rho(Q'_{ns} - Q_0)^p}$$

Pour déterminer les paramètres μ , ρ et p , nous maximiserons la vraisemblance v de l'échantillon global de nc crues supérieures à Q_0 en na années, toutes connues, et des ns crues les plus fortes connues sur na' années antérieures : $v = V \times V'$

$$v = \frac{na^{ns}}{n_1! n_2! \dots n_{na}!} * \mu^{ns+nc} * \rho^{ns+nc} * p^{ns+nc} * \prod_{k=1}^{ns} (Q_{jik} - Q_0)^{p-1} e^{-\rho} \sum_{j=1k=1}^{ncns} (Q_{jik} - Q_0)^{p-1} - \mu na' e^{-\rho(Q'_{ns} - Q_0)^p} * e^{-\mu na}$$

Comme précédemment, on détermine μ , ρ et p en cumulant les dérivées partielles de $\ln v$:

- **Par rapport à μ :**

$$\begin{aligned} \ln(v) &= \frac{Cte}{\mu} + (ns + nc) \ln \mu - \mu na' e^{-\rho(Q'_{ns} - Q_0)^p} - \mu na \\ \frac{d(\ln(v))}{d\mu} &= \frac{(ns + nc)}{\mu} - na' e^{-\rho(Q'_{ns} - Q_0)^p} - na = 0 \end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$\mu = \frac{(ns+nc)}{na+na'e^{-\rho(Q'_{ns}-Q_0)^p}} \quad (1)$$

- **par rapport à ρ :**

$$\begin{aligned} \ln(v) &= \frac{Cte}{\rho} + (ns + nc) \ln \rho - \rho \sum_{j=1k=1}^{ncns} (Q - Q_0)^p - \mu na' e^{-\rho(Q'_{ns} - Q_0)^p} \\ \frac{\partial \ln(v)}{\partial \rho} &= \frac{(ns+nc)}{\rho} - \sum_{j=1k=1}^{ncns} (Q - Q_0)^p + \mu na' (Q'_{ns} - Q_0)^p e^{-\rho(Q'_{ns} - Q_0)^p} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum_{j=1k=1}^{ncns} (Q - Q_0)^p}{(ns+nc)} - \frac{na'(Q'_{ns} - Q_0)^p e^{-\rho(Q'_{ns} - Q_0)^p}}{na+na'e^{-\rho(Q'_{ns} - Q_0)^p}} \quad (2)$$

- **par rapport à p :**

$$\begin{aligned} \ln(v) &= \frac{Cte}{p} + (ns + nc) \ln p + (p - 1) \sum_{j=1k=1}^{ncns} \ln(Q - Q_0)^p - \rho \sum_{j=1k=1}^{ncns} (Q - Q_0)^p - \mu na' e^{-\rho(Q'_{ns} - Q_0)^p} \\ \frac{\partial \ln(v)}{\partial p} &= \frac{(ns + nc)}{p} - \sum_{j=1k=1}^{ncns} \ln(Q - Q_0) - \rho \sum_{j=1k=1}^{ncns} (Q - Q_0)^p \ln(Q - Q_0) + \rho + \mu na' e^{-\rho(Q'_{ns} - Q_0)^p} \ln(Q'_{ns} - Q_0) \end{aligned}$$

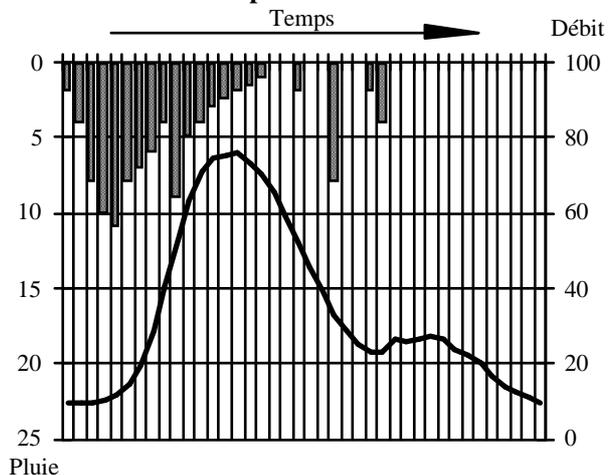
$$\frac{\partial \ln(v)}{\partial p} = \frac{(ns + nc)}{p} - \sum_{j=1k=1}^{ncns} \ln(Q - Q_0) - \rho \sum_{j=1k=1}^{ncns} (Q - Q_0)^p \ln(Q - Q_0) \dots$$

Pour résoudre ce système de trois équations à trois inconnues, il semble préférable de ne pas se servir de l'équation 3, mais de se donner *a priori* une valeur de p . Les équations 1 et 2 permettent, connaissant p , de calculer le ρ optimum (équation 2 résolue par itérations successives), ainsi que le μ optimum (équation 1 explicite). On calcule alors la vraisemblance v et on réitère sur p pour minimiser v . En général, p est voisin de 1 et quelques itérations par exemple entre 0,5 et 2 suffisent à fixer p à plus ou moins quelques pour-cents près.

X.4 - METHODES D'ETUDES HYDROMETEOROLOGIQUES

Les méthodes d'hydrologie analytique sont basées sur l'étude fine du passage des précipitations aux débits. Ce passage est très complexe puisqu'il dépend d'une foule de paramètres : structure de la pluie, nature du bassin versant et degré d'humidification, état de la végétation, capacité d'évaporation, etc. Nous allons voir comment et avec quelles approximations on peut étudier le passage d'une averse à la crue qu'elle génère. Ayant étudié ce passage, on pourra soit étendre la série de crues à partir d'observations, soit, le plus souvent, évaluer la crue de fréquence rare F à partir de la pluie de même fréquence F que l'on présume être à son origine.

X.4.1 - Etude d'un couple averse - crue



Supposons que l'on dispose de l'enregistrement simultané de la pluie et des débits sur un petit bassin versant. On supposera que le bassin est suffisamment petit de façon à ce que :

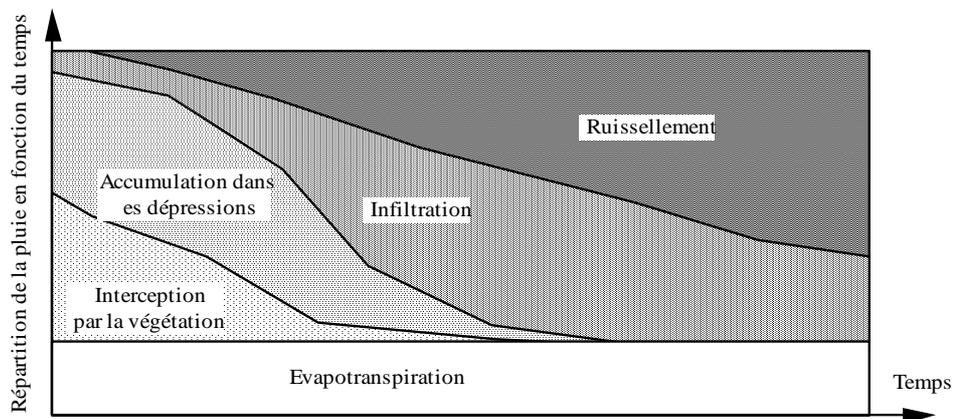
- la pluie soit homogène sur l'ensemble du bassin ;
- la nature hydrogéologique soit homogène ;
- les conditions initiales également.

Sur le graphique ci-contre, nous avons porté en abscisses le temps et en ordonnées les débits et les intensités de pluies par pas de temps dt .

Ce schéma est déformé. En effet, d'une part toute la pluie n'a pas ruisselé ; une partie s'est infiltrée et une autre s'est évaporée. D'autre part, le débit ne provient pas seulement du ruissellement mais aussi du débit de base, position du débit qui a transité par les nappes.

X.4.1.1 - Le devenir des précipitations

Ce devenir est complexe et multiple ; plusieurs auteurs l'ont étudié ; on peut cependant résumer les principales observations dans le schéma suivant :



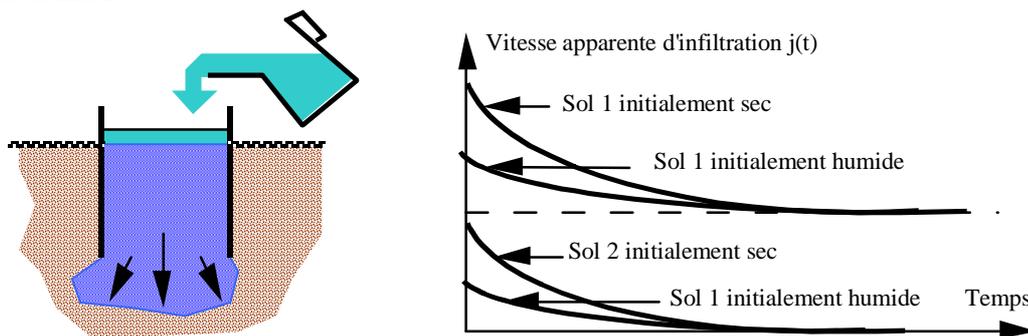
En fonction du temps ou de la qualité de pluie déjà tombée, une hauteur de pluie dP se répartit entre :

- Interception { une évaporation directe (souvent négligeable)
une accumulation dans les dépressions (puis évaporation ou infiltration)
une interception par les végétaux (puis évaporation)
- Infiltration { une humidification du sol (puis évaporation ou égouttage)
un écoulement souterrain vers les nappes
- Ruissellement { un ruissellement pur
un ruissellement retardé

Dans les différents phénomènes de l'interception, seule l'évaporation persiste dans le temps mais elle peut généralement être considérée comme négligeable. L'accumulation dans les dépressions et le stockage dans la végétation ne peuvent que tendre vers une limite finie.

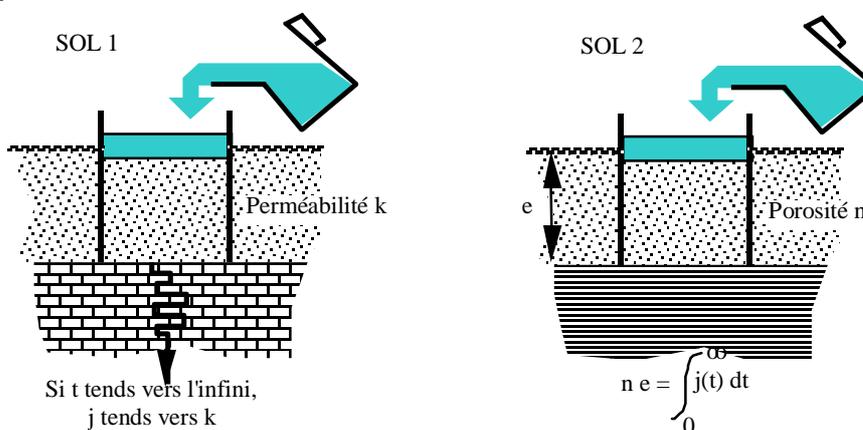
L'infiltration peut s'étudier expérimentalement. Les études faites montrent que l'on peut admettre qu'il existe une vitesse d'infiltration qui évolue avec le temps et le degré d'humidité initial.

Supposons que l'on soumette différents sols à une percolation verticale et que l'on mesure la vitesse d'infiltration en mm/h :



Manifestement, les courbes dépendent de la nature du sol et de son degré d'humidité vertical. Dans ce schéma, le sol 1 est un sol perméable ; au bout d'un certain temps, il est saturé mais est drainé par une nappe profonde ; $j(t)$ tend alors vers la perméabilité du sol saturé. La limite de $j(t)$ lorsque t tend vers l'infini est différente de 0 ; il s'infiltrera toujours de l'eau.

Au contraire, le sol 2 est un sol perméable tout au moins lorsqu'il n'est pas saturé. Mais, il n'y a pas de possibilité d'écoulement souterrain ; donc, à partir d'un certain temps, plus rien ne peut s'infiltrer : $t \rightarrow \infty \Rightarrow j(t) \rightarrow 0$



HORTON puis d'autres ont essayé de mettre en équations ces observations. Il semble que dans la quasi-totalité des cas, la variation de J en fonction du temps ($t > 1$ mn) soit de la forme :

$$J = J_1 + (J_0 - J_1) e^{-\beta t}$$

J_1 étant l'intensité limite d'infiltration qui ne dépend que des caractéristiques hydrodynamiques du sol (J_1 varie dans une large plage, allant de 0 à 2 mm/mn) ;

J_0 étant l'intensité d'infiltration au début de l'averse. J_0 dépend en plus de l'humidité initiale ;

β est une constante pur un sol donné ; t est le temps depuis le début de l'averse.

Dans les cas précédemment cités : sol 1 : $J_1 \neq 0$. sol 2 : $J_1 = 0$ et $n e = \beta j_0$

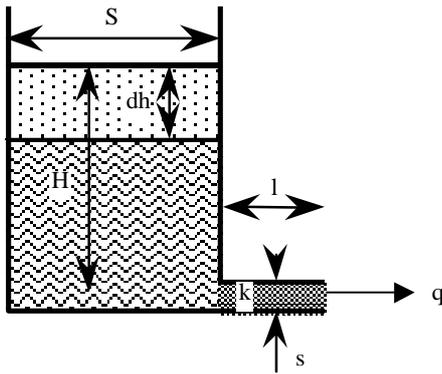
X.4.1.2 - Séparation des écoulements

Comme nous l'avons déjà dit, le débit des cours d'eau a au moins deux origines :

- le ruissellement,
- la vidange des nappes.

Le débit de vidange des nappes, que nous appelons débit de base, suit une loi de variation en fonction du temps, appelée courbe de tarissement. En l'absence d'alimentation par les pluies, la courbe de tarissement ne dépend que de la géométrie de la nappe et de ses qualités hydrodynamiques.

Une modélisation classique de la vidange d'une nappe est faite à partir du schéma de Maillet. Une nappe est schématisée par un réservoir de surface S , de hauteur H , se vidangeant par un bouchon poreux de longueur l , de section s et de perméabilité k . Le débit q de vidange est calculable par la loi de Darcy :



$$q = k s \frac{H}{l}$$

Pendant un intervalle de temps dt , le volume dV sorti de la nappe est :
 $dV = q dt$ mais aussi $q dt = -S dH$
 Par ailleurs, la première expression du débit donne en dérivant :

$$dq = k \frac{S}{l} dH$$

En combinant ces deux expressions, on obtient :

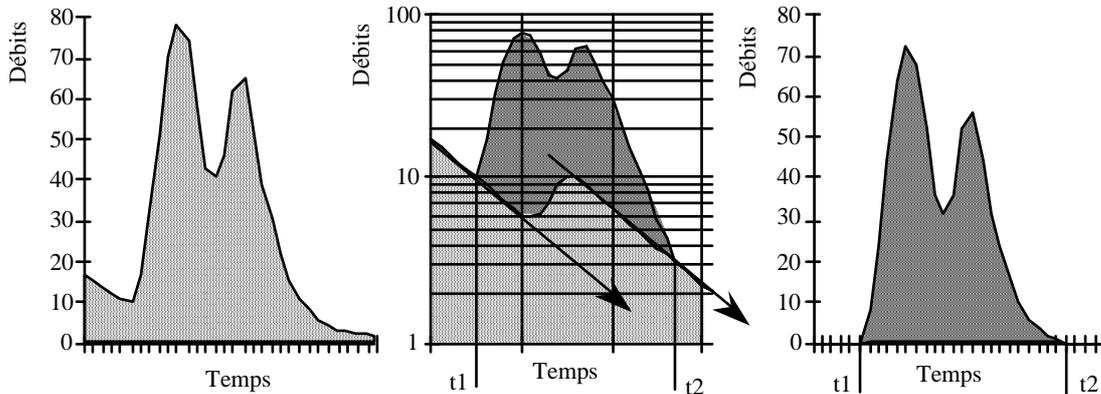
$$\frac{dq}{q} = -\alpha dt, \text{ avec } \alpha = \frac{ks}{Sl} = \text{Cte}$$

(α est appelé coefficient de tarissement)

$$(\text{Ln } q)_{q_0}^q = -\alpha (t)_{t_0}^t \Rightarrow q = q_0 e^{-\alpha t}$$

Pour le schéma de Maillet, on démontre que la loi de vidange serait une exponentielle décroissante. Cependant, ce schéma est grossier et il n'y a pas forcément qu'une seule nappe dans un bassin. Même si on peut admettre que les différentes nappes d'un bassin peuvent se schématiser ainsi, le débit de base sera la somme d'exponentielles décroissantes qui n'est pas, en général, une exponentielle décroissante. Dans la réalité, on constate que les débits de bases évoluent avec le temps et en absence de pluie comme des fonctions plus ou moins hyperboliques, assimilables pour partie à des exponentielles décroissantes. Cette assimilation se justifie surtout par la simplicité graphique ; dans un système $(\log Q, t)$, les courbes de tarissement sont des droites de pente $-\alpha$.

Reprenons donc notre crue initiale et transposant la dans un graphique semi-log :



Avant la montée du débit, nous étions en période de vidange des nappes, c'est-à-dire que les débits suivaient approximativement une exponentielle décroissante. De même, longtemps après la crue, le débit est formé essentiellement par du débit de base ; il évolue donc selon une exponentielle décroissante de même coefficient de tarissement α (deuxième droite et parallèle à la première). Si ces deux droites ne sont pas confondues, c'est qu'il y a eu une recharge de la nappe.

On trace alors approximativement (en tiré) l'évolution probable du débit de base durant la crue. Pour ce tracé, on peut se faire comme "règle" que le maximum du débit de base se produira après le maximum du débit total. Il reste encore une certaine plage de manœuvre comme l'indique les trois tracés proposés.

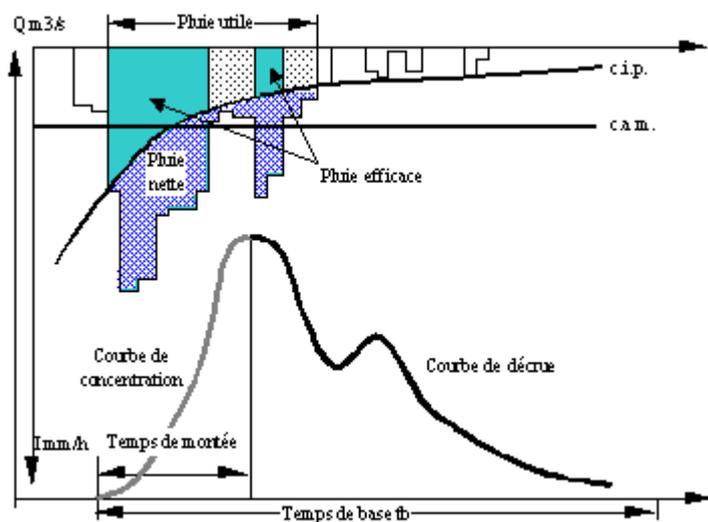
Cependant, il faut garder présent à l'esprit que ce graphique est en coordonnées semi-logarithmiques ; c'est-à-dire qu'une incertitude sur les faibles débits est graphiquement importante mais qu'elle peut très bien être négligeable devant la valeur absolue du débit maximal de crue.

Ayant adopté un tracé du débit de base, on peut, par soustraction, obtenir le débit de ruissellement Q_r . Ce débit commence à un temps t_1 et se termine à t_2 . Remarquons que ce temps t_2 est connu avec une assez forte imprécision du fait du raccordement tangentiel de l'hydrogramme de ruissellement à l'exponentielle décroissante du débit de base.

A l'intérieur de ce débit de ruissellement, on peut faire encore une distinction entre le ruissellement pur et ce que nous appellerons par tradition "écoulement hypodermique". Ce dernier type d'écoulement est en fait un ruissellement retardé. A la fin de la pluie, le ruissellement pur n'est plus alimenté. Les lames qui ruisselaient deviennent de plus en plus minces et l'écoulement, tout en restant un écoulement de surface, change de nature. Il se produit quelque chose d'analogue au passage régime turbulent / régime laminaire. A ce type d'écoulement s'ajoute également la vidange des dépressions et de quelques micro-nappes phréatiques.

Dans la pratique, il n'est guère utile de séparer ces deux types d'écoulement et nous ne considérerons que le ruissellement total (ruissellement pur plus écoulement hypodermique).

X.4.1.3 - Quelques définitions



Arrivé à ce stade, nous pouvons comparer à nouveau pluie et débit mais en ne prenant en compte que le ruissellement dû à la pluie.

Sur le graphique ci-dessus, on peut évaluer V le volume d'eau ruisselé durant la crue :

$$V = \int_{t_1}^{t_2} Q_r(t) dt$$

En divisant ce volume par la surface du bassin, on obtient une lame d'eau que l'on appellera "pluie nette". C'est la lame d'eau qui a réellement ruisselé.

Connaissant cette pluie, on peut définir une "capacité apparente moyenne" d'absorption (notée c.a.m.). En effet, si la capacité d'absorption était constante, seule la portion de la pluie ayant une intensité supérieure à cette absorption aurait donné du ruissellement.

La c.a.m. est donc l'intensité (en général en mm/h) telle que l'intégrale des intensités supérieures à c.a.m. soit égale à la pluie nette. Sur le graphique, cette intégrale est indiquée en gris foncé.

On définit ensuite la "pluie efficace", pluie tombée avec une intensité supérieure à c.a.m. En fait, on sait que la capacité d'infiltration du sol n'est pas constante mais qu'elle diminue lorsque la quantité de pluie précédemment tombée augmente. On peut donc tracer une courbe de la capacité d'infiltration probable (c.i.p.) telle qu'elle limite une intégrale égale à la pluie nette. On appellera alors "pluie utile" la portion de la pluie tombée avec une intensité supérieure à c.i.p. Cette pluie utile, figurée en gris et hachurée, est la portion de la pluie qui a raisonnablement pu donner lieu à du ruissellement (parfois, dans un souci de simplification, on admet que c.i.p. est constant et inférieur à c.a.m., ce seuil critique c.i.p. est alors fonction uniquement de la nature du bassin versant).

Du point de vue de l'hydrogramme, on appellera "courbe de concentration" la partie ascendante de l'hydrogramme. La durée $t_m = t_0 - t_1$ est appelée temps de montée. De même, la "courbe de décrue" est la portion descendante de l'hydrogramme. La durée totale de la crue $t_b = t_2 - t_1$ est appelée "temps de base".

Arrivé à ce stade, on peut mieux cerner le problème des relations averse-crues :

- un premier point est de définir la "pluie nette" (ce qui ruisselle) à partir de la pluie utile ou de la pluie totale. Une approche de ce passage est possible par les fonctions de production ;

- connaissant la pluie nette, un second problème est de la répartir dans le temps pour avoir l'hydrogramme. Ce passage se fait par des fonctions de transfert.

X.4.2 - Fonctions de production

Le passage à la pluie totale (ou de la pluie utile ou de la pluie efficace) à la pluie nette est certainement l'étape décisive. C'est pourtant là que réside le plus d'incertitudes et que les erreurs les plus grossières peuvent être commises.

Le problème se pose de la façon suivante : à un instant t et durant un intervalle de temps dt , la quantité de pluie tombée est $I(t) dt = dP(t)$; durant ce même intervalle, la quantité $J(t) dt$ s'est infiltrée. On appellera coefficient de ruissellement $k_r(t)$, le rapport entre la pluie ruisselée et la pluie totale :

$$k_r(t) \cong \frac{I(t) - J(t)}{I(t)} = 1 - \frac{J(t)}{I(t)}$$

(ce coefficient de ruissellement ne doit pas être confondu avec ce que l'on appelle coefficient d'écoulement k_e , rapport de la totalité de la pluie tombée à la totalité de l'eau ruisselée :

$$k_e = \frac{\int_0^{\infty} (I(t) - J(t)) dt}{\int_0^{\infty} I(t) dt}$$

Manifestement, le coefficient de ruissellement variera dans le temps avec l'intensité de la pluie, avec la nature du sol et son état d'humectation initial.

X.4.2.1 - Hypothèses simplificatrices sur les coefficients de ruissellement

Les premières tentatives de passage des pluies aux débits ont consisté à faire des hypothèses simples sur le coefficient $k_r(t)$.

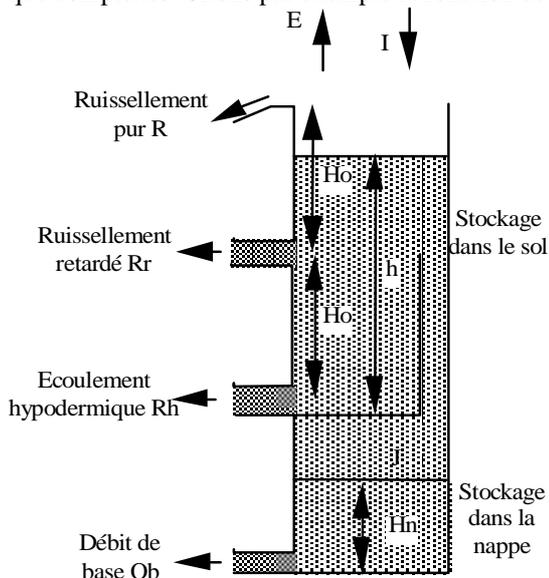
Dans un premier temps, on peut considérer que $k_r(t)$ est en fait une constante ne dépendant que de la nature du sol. Cette hypothèse se vérifie en première approximation pour les zones urbanisées. En fait, dans ces zones, les coefficients d'infiltration $J(t)$ sont très faibles et par conséquent $k_r(t)$ varie peu autour de 1. Utiliser un coefficient de ruissellement constant ne peut donc se justifier qu'en zone quasi-imperméable et donc généralement en zone urbaine.

X.4.2.2 - Simulation par modèles à réservoirs

L'idée est de simuler ce qui se passe dans la nature par des successions de remplissage et de vidange de différents réservoirs.

Le nombre de réservoirs, leurs lois de vidange et leurs interactions permettent des combinaisons aussi variées que complexes. Citons par exemple la fonction de production introduite dans certains modèles ORSTOM :

Ce modèle à réservoir comporte une entrée : la pluie d'intensité I . Cinq sorties sont possibles :



- l'évaporation E qui n'existe que si $h > 0$
- l'écoulement hypodermique $R_h = \alpha h$
- le débit de base $Q_b = \alpha h_n$
- le ruissellement retardé :
 - . $R_r = \beta (h - H_0)$ si $h > H_0$
 - . $R_r = 0$ si $h < H_0$
- le ruissellement pur $R = P - E - R_r - R_h - J$

Le transfert d'eau du sol vers la nappe se fait uniquement si $h > H_0$ avec un transfert constant d'intensité J .

Dans ce cas, les paramètres du modèle sont H_0 , J , α et β ; le problème est alors d'évaluer ces quatre paramètres en fonction de la nature du bassin.

Cet exemple montre clairement les avantages et les inconvénients des modèles à réservoirs :

- ils permettent de rendre compte de phénomènes physiques avec toute la complexité que l'on désire (modèle plus ou moins déterministe) ;
- ils nécessitent un calage d'autant plus compliqué que leur complexité est grande.

X.4.2.3 - Fonction de production du S.C.S. (Soil Conservation Service of U.S.A.)

Cette fonction de production est basée sur quelques hypothèses simplificatrices facilement acceptables :

- Soit J la capacité d'infiltration ; on admet qu'elle tend vers 0 lorsque le temps augmente ainsi il existe une lame

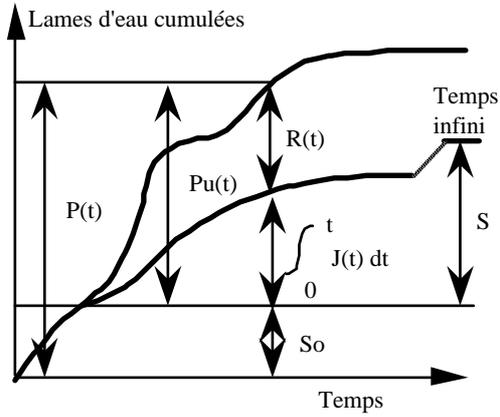
d'eau maximale infiltrable S : $S = \int_0^{\infty} J(t) dt$. Ceci est compatible avec la loi de Horton :

$$J_t = J_1 + (J_0 - J_1) e^{-\alpha t}$$

$$\text{si } J_1 = 0 \Rightarrow S = \int_0^{\infty} J_0 e^{-\alpha t} dt = \frac{J_0}{\alpha}$$

- On admet que le ruissellement ne peut apparaître qu'après qu'il soit tombée une certaine quantité S_0 de pluie interceptée par les végétaux ou servant à remplir les dépressions de la surface du sol. On appellera par la suite "pluie utile", la quantité $P_u(t) = P(t) - S_0$ [$P(t)$ est la quantité totale de pluie tombée entre les intervalles de temps 0 et t].
- Enfin, l'hypothèse principale est que le rapport du ruissellement $R(t)$ à la pluie utile $P_u(t)$ est égal au rapport de ce qui s'est déjà infiltré $\int_0^t J(t) dt$ à ce qui peut s'infiltrer au maximum S .

Ces trois hypothèses se résument sur le schéma suivant et la mise en équation est donc :



Hypothèse 2 :

$$P_u(t) = R(t) + \int_0^t J(t) dt$$

Hypothèse 3 :

$$\int_0^t J(t) dt = \frac{R(t)}{S + P_u(t)}$$

En éliminant l'intégrale :

$$R(t) = \frac{P_u(t)^2}{S + P_u(t)} \quad [\text{si } P_u(t) > 0]$$

Par ailleurs, $P_u(t) = P(t) - S_0$, donc : $R(t) = \frac{[P(t) - S_0]^2}{P(t) - S_0 + S} \quad [\text{si } P(t) > S_0 \text{ sinon } R(t) = 0]$

Deux caractéristiques sont donc nécessaires : la capacité S totale d'infiltration et l'interception S_0 . Les études menées initialement aux U.S.A. puis sur d'autres continents montrent que S_0 est assez étroitement lié à S par la relation : $S_0 \cong 0,2 S_0$, ce qui donne pour fonction de production du S.C.S. :

$$R(t) = \frac{[P(t) - 0,2S]^2}{P(t) + 0,8S} \quad [\text{si } P(t) > 0,2 S \text{ sinon } R(t) = 0]$$

avec $P(t)$: hauteur de pluies tombée entre les instants 0 et t
 $R(t)$: hauteur de pluie ruisselée entre instants 0 et t (pluie nette)

S : capacité maximale d'infiltration : $\int_0^{\infty} J_0 e^{-\alpha t} dt = \frac{J_0}{\alpha} = S$

Cette formule semble être assez bien représentative de ce qui se passe dans la nature. Un seul paramètre S sert au calage du modèle.

S est donc fonction de la nature du sol ("géologie"), de son couvert végétal, et de son état d'humectation initial.

Nature de la végétation	Mode de culture			Permanence du couvert			Perméabilité du sol			
	ordinaire	en courbe de niveau	en terrasses	Sol toujours couvert	Sol parfois couvert	Sol toujours nu	très bonne	bonne	faible	très faible
Jachères	0					0	20	7	4	3
Plantes sarclées	0					0	32	14	6	4
	0			0		0	46	19	9	5
		0				0	38	17	10	6
		0		0		0	52	25	12	8
			0		0	0	48	27	16	12
Céréales	0					0	52	23	10	6
	0					0	58	25	11	7
		0				0	58	27	12	9
		0		0		0	64	30	14	10
			0		0	0	64	32	19	12
Légumineuses ou prairies temporaires	0					0	49	21	9	5
	0					0	74	32	14	9
		0				0	54	25	11	9
		0		0		0	86	40	19	11
			0		0	0	58	30	15	11
Patures ou terres de parcours	0					0	42	17	8	5
	0					0	115	40	17	10
	0			0		0	175	64	27	15
		0				0	125	45	14	6
		0			0	0	310	70	25	11
Prairies permanentes							490	210	37	17
	0			0			255	74	35	19
Forêts et bocquetaux						0	135	49	21	11
					0		200	67	30	17
					0		310	85	37	21
Cours de ferme							70	27	12	7
Routes en terre							32	12	7	5
Routes empierrées							27	10	5	4

Valeurs courantes de S dans les conditions III.

En fait, il peut être intéressant d'utiliser cette fonction de répartition dans ces conditions autres que celles notées III. Deux autres cas sont cités par les auteurs de la méthode :

- conditions I : optimales pour l'infiltration (sol initialement sec) ;
- conditions II : conditions de calcul de la crue annuelle.

Ces trois conditions diffèrent par l'état d'humectation du sol donc des pluies antérieures. Une classification est proposée :

Hauteur H de pluie (mm) sur les 5 jours antérieurs	Base annuelle	Base saisonnière	
		Période de végétation	Période hivernale
Conditions I	$H < 12,5$	$H < 35$	$H < 12,5$
Conditions II	$12,5 < H < 37,5$	$35 < H < 53$	$12,5 < H < 27,5$
Conditions III	$H > 37,5$	$H > 53$	$H > 27,5$

Les relations entre les valeurs de S dans ces trois conditions sont :

$$S_I \cong 2,5 S_{II} \quad \text{et} \quad S_{III} \cong 0,11 S_{II}^{1,2}$$

X.4.3 - Fonction de transfert

Nous venons de voir quelles sont les techniques qui permettent de passer de la quantité de pluie I (t) dt tombée durant un intervalle de temps dt à la quantité d [R (t)] qui va se mettre à ruisseler. Il nous reste à savoir maintenant à quel moment arrivera ce ruissellement à l'exutoire. Ce passage sera étudié par le biais de la fonction de transfert. La plus connue est celle de l'hydrogramme unitaire due à L.K. SHERMAN.

X.4.3.1 - Mise en évidence de la notion d'hydrogramme unitaire

Prenons le cas d'un petit bassin soumis à des averses d'intensité uniformément répartie dans l'espace et suffisante pour générer du ruissellement : [I (t) >> J (t) \forall t]. On constate que lorsque la durée des averses diminue, le temps de base de la crue diminue puis tend vers une limite t_c . Si on appelle t_u la durée de la pluie utile, on a donc :

$$t_u \rightarrow 0 \Rightarrow t_b \rightarrow t_c \text{ et } \frac{\Delta t_b}{\Delta t_u} > 0$$

Dans la pratique, on constate même, dès que t_u est inférieur à $t_c/10$ environ, que l'on a $t_b = t_c$.

Que représente le temps t_c ? Et bien, si la durée t_u tends vers 0, tout le ruissellement va débiter à l'instant $t=0$ quel que soit l'emplacement d_s où il prend naissance. Cependant, si l'écoulement d_s est voisin de l'exutoire, cette partie du ruissellement y arrivera sensiblement à $t = 0$. Au contraire, si d_s est éloigné de l'exutoire, ce n'est qu'à un instant $t > 0$ qu'il y arrivera. La dernière particule d'eau qui arrive à l'exutoire à l'instant t_c était partie elle-aussi à l'instant $t = 0$. C'est donc celle qui avait le plus long trajet hydraulique à effectuer.

Ce temps limite t_c mis par la particule d'eau la plus éloignée de l'exutoire pour l'atteindre est appelé "*temps de concentration*".

On appellera averse unitaire, une averse de durée faible ($t_u < t_c/10$) provoquant un ruissellement d'intensité constante $r = d \frac{R(t)}{dt}$. Une averse unitaire génère donc une crue dite unitaire Q (t), c'est à dire une crue de durée t_c .

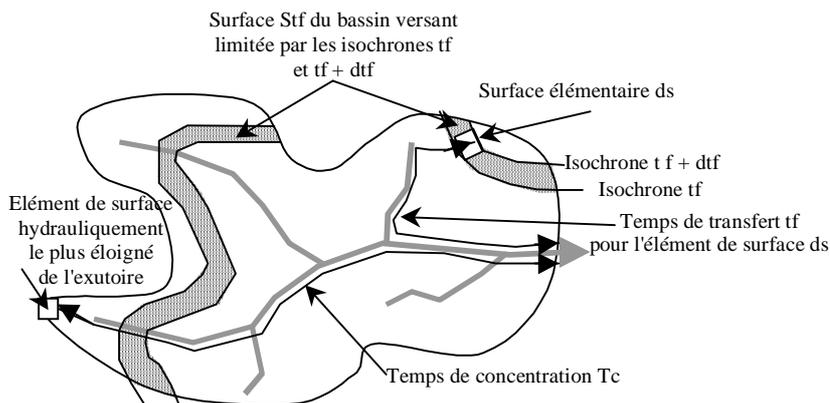
On appellera hydrogramme unitaire la fonction q (t) telle que si Q (t) est l'hydrogramme de la crue (en m3/s) et si R (t_u) est la lame d'eau ruisselée au cours de l'averse unitaire ayant généré la crue, on a : $q(t) = \frac{Q(t)}{S * R(t_u)} = \frac{Q(t)}{V}$

(S : surface du bassin versant, V volume de la crue unitaire)

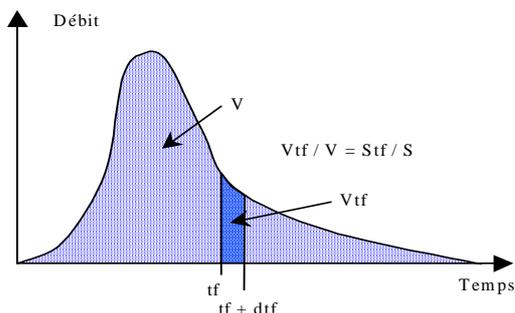
Cette fonction q(t) a pour dimension l'inverse d'un temps ; par construction, la crue unitaire est telle que :

$$\int_0^{t_c} q(t) dt = 1$$

X.4.3.2 - Propriétés des hydrogrammes résultant d'averses unitaires



Sur la figure précédente, on peut imaginer que si l'élément de surface ds est situé à une distance telle de l'exutoire que le temps de transfert soit tf, il est possible de construire des lignes isochrones tf et tf+dtf. Ces deux lignes isolent une portion Stf de la surface totale S du bassin versant.



Si le ruissellement est partout le même et que les temps de transfert restent constants, on conçoit aisément qu'entre les instants tf et tf+dtf s'écoule la portion Stf/S du volume de la crue.

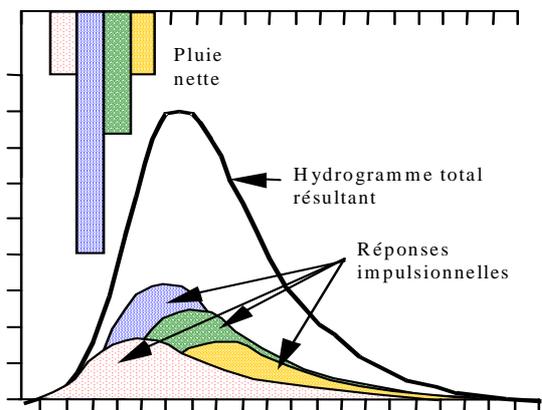
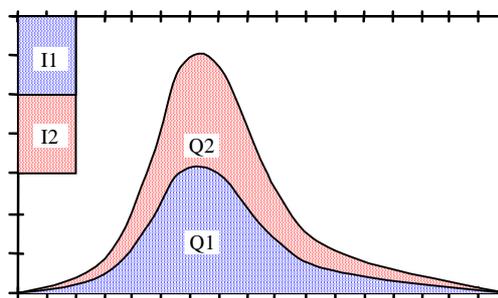
Cette proportion reste constante et caractéristique du bassin. Il en ressort que la forme de l'hydrogramme d'une crue unitaire reste la même et que l'hydrogramme unitaire q(t) est une caractéristique intrinsèque du bassin.

L'étude des hydrogrammes de crue en fonction des hyétogrammes des averses qui les ont engendrés, ont donc conduit à formuler les propositions suivantes :

* Les crues provoquées par des averses unitaires ont des hydrogrammes qui se déduisent les uns des autres par affinité. Soit I1 l'intensité constante de la pluie nette 1 et I2 pour la pluie nette 2. On aura :

$$\frac{I1}{I2} = \frac{Q1(t)}{Q2(t)} \cdot \forall t$$

Cette remarque est généralement connue sous le nom de "propriété d'affinité". La conséquence en est que la crue unitaire q(t) est une fonction unique.



* Supposons maintenant que l'on ait une averse de durée supérieure à la durée unitaire, par exemple tu = n tc/10. On divise l'averse en n averses unitaires de durée tu =tc/10

Chacune de ses averses unitaires générera une réponse qui est affinée de l'hydrogramme unitaire dans le rapport des intensités, chaque réponse étant déphasée de la précédente de tc/10.

On admettra que la réponse du bassin à cette averse de durée n tc/10est égale à la somme des réponses impulsionnelles à chaque averse unitaire de durée tc/10.

Cette propriété est connue sous le nom de "propriété d'additivité". La conséquence en est que la crue unitaire q(t) ne varie pas en fonction de la durée de l'averse.

Les différentes propriétés des hydrogrammes de crue provenant d'averses unitaires permettent une formulation mathématique de la fonction de transfert :

$$Q(t) = S \int_0^{t_c} q(\tau) * r(t - \tau) d\tau$$

$Q(t)$ est le débit à l'exutoire à l'instant t

S est la surface du bassin versant

$r(t)$ est l'intensité du ruissellement à l'instant t $\left[r(t) = d \frac{R(t)}{dt} \right]$

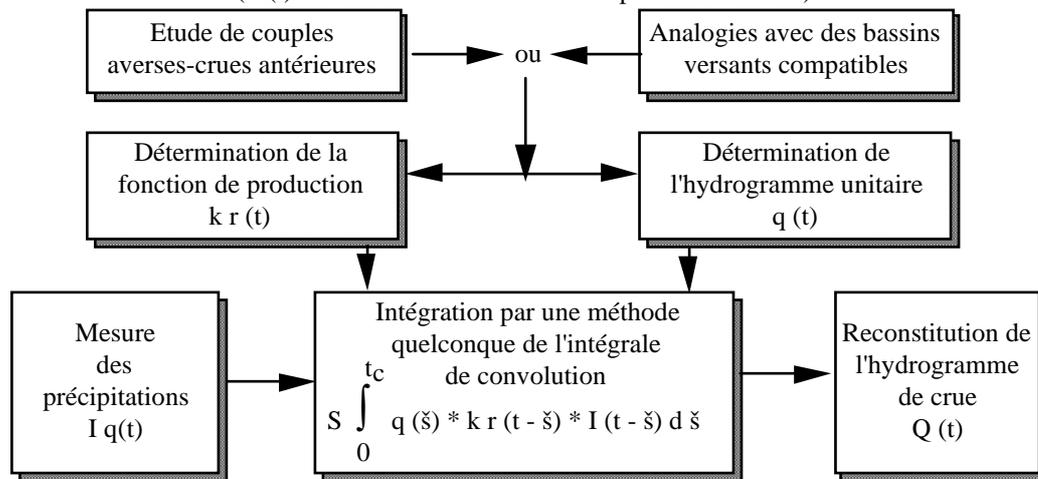
$q(t)$ est l'hydrogramme unitaire

Avec un autre vocabulaire, la fonction de transfert est une intégrale de convolution liant une entrée $r(t)$ à une sortie $Q(t)$, le noyau de convolution étant la fonction $q(\tau)$ et t_c la durée de mémoire du système.

Ayant déjà étudié la fonction de production que nous présenterons sous la forme d'un coefficient de ruissellement $k r(t)$ variant avec le temps, on peut donc établir l'équation globale du passage des pluies aux débits :

$$Q(t) = S \int_0^{t_c} q(\tau) * k r(t - \tau) * I(t - \tau) d\tau$$

($I(t)$ étant bien sûr l'intensité de la pluie à l'instant t)



X.4.3.3 - Détermination de l'hydrogramme unitaire

Il nous reste maintenant à déterminer l'hydrogramme unitaire $q(t)$. Cette détermination peut se faire directement si l'on connaît des couples averse-crue, soit dans le cas contraire par des méthodes empiriques ou par comparaison avec des bassins analogues.

X.4.3.3.1 Déterminations directes

Lorsque l'on dispose d'observations de couples averses-crués en nombre suffisant, on peut sélectionner toutes les averses unitaires. Par définition, tous les hydrogrammes qui en ont résulté sont dans un rapport d'affinité égal au rapport des pluies nettes. Il suffit donc de ramener tous les hydrogrammes i choisis au volume V_i de la crue tels que :

$$\frac{1}{V_i} \int_0^{t_c} Q_i(t) dt = 1$$

Ces différents hydrogrammes doivent se superposer. En fait, on évaluera l'hydrogramme unitaire moyen entre ces différentes observations.

Le même travail peut être fait en se contentant de reporter les hydrogrammes de ruissellement pur sur du papier semi-logarithmique (t, log Q), les hydrogrammes devant alors être superposables par translation. Généralement, la superposition du point de vue des temps est basée sur la position du maximum de la crue.

Cette façon de procéder présente l'avantage d'être indépendante de la fonction de production. Malheureusement, le nombre restreint d'années d'observations ne permet pas toujours de sélectionner des averses unitaires. On pourra néanmoins reconstituer un hydrogramme unitaire mais à partir d'observations de crues complexes. En effet, supposons qu'une averse assez longue ait provoqué une crue.

Dans un premier temps, on évalue l'hydrogramme de ruissellement (séparation des écoulements) ainsi que les intensités de pluie nette.

On dispose donc d'une observation de la fonction Q (t) et de la fonction d'entrée k r (t) I (t). Or, ces deux fonctions sont liées par la relation :

$$Q(t) = \int_0^{t_c} q(\tau) * k r(t - \tau) * I(t - \tau) d\tau$$

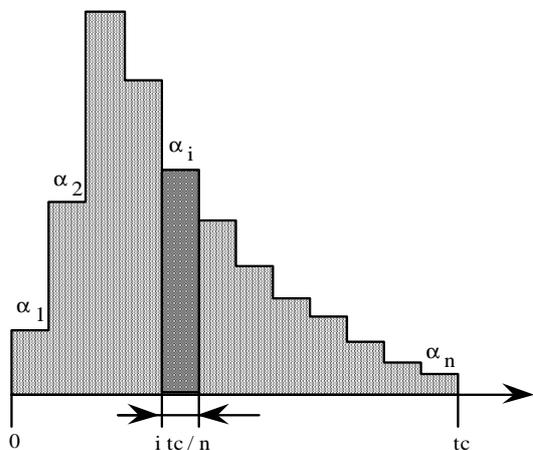
Il nous reste à trouver le noyau de convolution q (τ) et la durée de mémoire t_c du système. Ceci est un problème de déconvolution classique. Plusieurs méthodes sont utilisables :

- méthodes discrètes directes,
- méthodes par projection sur des fonctions,
- méthodes par transformations de Fourier,
- etc.

Les deux premières méthodes sont les plus employées en hydrologie. On peut les présenter de la façon suivante :

Hydrogramme unitaire à variation discrète :

On suppose que l'hydrogramme unitaire peut être représenté par une fonction constante par plage de durée t_c/n (n ≥ 10). On se donne t_c a priori ou on prend t'_c grand, nettement plus grand que le t_c probable.



$$q(t) = \alpha_i Cte \quad , \quad \text{avec } i = \text{partie entière de } \left[\frac{nt}{t_c} + 1 \right]$$

Pour que cet hydrogramme soit unitaire, on doit évidemment avoir la relation :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

De même, on admettra que l'évolution de l'intensité de la pluie nette r (t) peut être considérée comme une succession de valeurs constantes par durée t_c/n. Ayant observé la crue sur n pas de temps t_c/n = Δt ainsi que le ruissellement R, à un pas de temps quelconque j, le débit observé est Q_j et celui reconstitué par l'hydrogramme unitaire est :

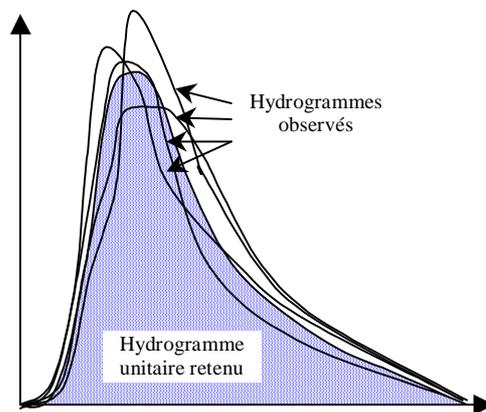
$$\hat{Q}_j = S \sum_{i=1}^n \alpha_i r_{j-i}$$

Les paramètres α₁, α₂, ... α_n sont déterminés par exemple en écrivant que la somme des carrés des écarts est

$$\text{minimale : } \sum_{j=1}^n (Q_j - \hat{Q}_j)^2 = \text{minimum}$$

En dérivant par rapport à chacune des n - 1 premières valeurs de ... (puisque α_n = 1 - ∑_{i=1}ⁿ α_i), on obtient n - 1 équations inconnues, système linéaire simple :

$$\frac{\partial \sum_{j=1}^n (Q_j - \hat{Q}_j)^2}{\partial \alpha_i} = 0$$

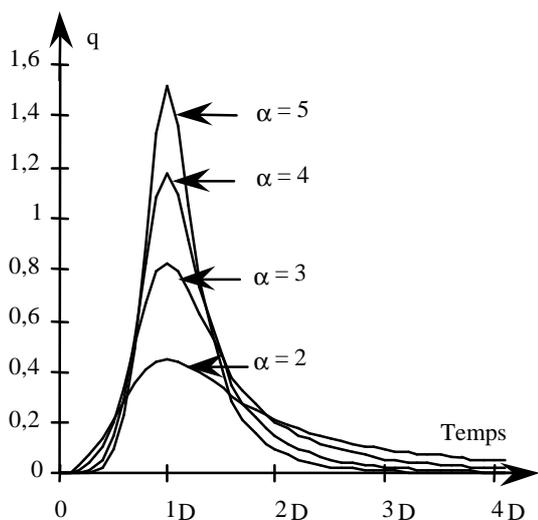
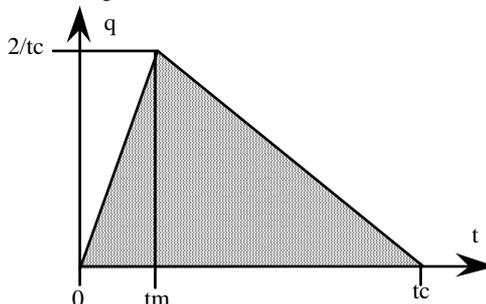


L'avantage de cette méthode est qu'elle ne préjuge en rien de la forme de l'hydrogramme unitaire. Par contre, elle débouche sur un système linéaire que l'on doit résoudre numériquement.

Hydrogramme unitaire de la formulation mathématique choisie à l'avance

Dans ces techniques, on choisit des formulations mathématiques plus ou moins complexes et dépendant d'un nombre de paramètres restreints. Ces différents paramètres sont ajustés au mieux par des techniques analogues à la précédente. Parmi les hydrogrammes-types choisis souvent, signalons :

+ l'H.U. triangulaire défini par deux paramètres : t_c et t_m
 La valeur maximale $2/t_c$ de $q(t)$ est atteinte à $t = t_m$.



+ un peu plus complexe mais plus proche des hydrogrammes naturels :

$$q(t) = \frac{2\alpha \sin\left[\frac{\alpha+1}{2\alpha} \pi\right]}{\pi D} \frac{\left[\frac{t}{D}\right]^\alpha}{1 + \left[\frac{t}{D}\right]^{2\alpha}}$$

Cette fonction ne dépend que de 2 paramètres α et D . D représentant le temps de montée de la crue est d'autant plus pointue que α est grand. D'ailleurs, le terme α est généralement de l'ordre de 4, valeur que l'on pourra admettre en première approximation.

+ enfin, citons le modèle de Nash où l'hydrogramme sortant de n réservoirs identiques en cascade, se vidangeant par des orifices poreux selon le schéma suivant.

L'équation de l'hydrogramme unitaire a alors pour expression :

$$q(t) = \frac{1}{k\Gamma(n)} e^{-t/k} (t/k)^{n-1}$$

où $\Gamma(n)$ est la fonction gamma d'ordre n :

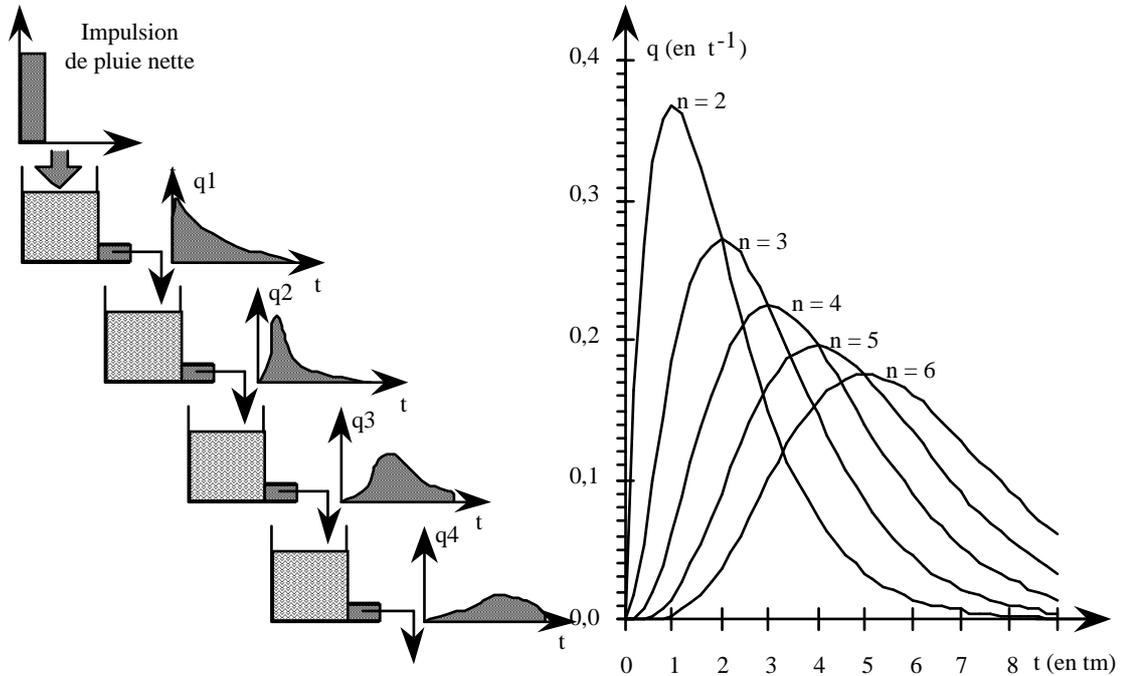
$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$$

n est un paramètre de calage adimensionnel
 k est un temps lié au temps de montée t_m par la relation $t_m = (n - 1) k$

[En général, n est de l'ordre de 4 à 5 ; les valeurs de $\Gamma(n)$ sont données dans les tables mais dans les cas simples, où n est entier : $\Gamma(n) = (n - 1) !$ De plus, on a dans tous les cas, $\Gamma(n) = (n - 1) \Gamma(n - 1)$].

Une formule approchée de $\Gamma(n + 1)$ pour $0 < n < 1$ est :

$$\Gamma(n + 1) \cong 1 - 0,5731 n + 0,9416 n^2 - 0,6797 n^3 + 0,4068 n^4 - 0,0956 n^5$$



X.4.3.3.2 Détermination empirique de l'hydrogramme unitaire

Lorsque l'on ne connaît pas d'hydrogramme de crue, on pourra utiliser par exemple, une des trois méthodes suivantes :

Hydrogramme unitaire du Soil Conservation Service (méthode du S.C.S.) :

Ce service utilise un hydrogramme triangulaire dont le temps de montée t_m est égal au 3/8 du temps de concentration t_c .

Hydrogramme unitaire du Ministère de l'Agriculture Français (méthode SOCOSE) :

Cet hydrogramme de temps de montée $t_m = D$ a pour expression :

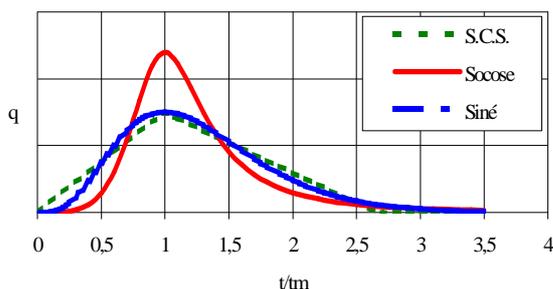
$$q(t) = \frac{2,35}{D} \frac{(t/D)^4}{1 + (t/D)^8}$$

Hydrogramme unitaire du Génie Rural Belge (méthode de Siné)

Il n'est autre que le modèle de Nash avec $n=4.7$:

L'H.U. a pour expression en fonction du temps de montée t_m :

$$q(t) = \frac{30}{t_m} e^{-3.7 \frac{t}{t_m}} \left(\frac{t}{t_m}\right)^{3.7}$$



La figure ci-contre montre ces trois hydrogrammes-types dans un système commun d'unité. Par construction, les hydrogrammes unitaires Siné et S.C.S. sont assez semblables. Par contre, l'H.U. de la méthode SOCOSE est

beaucoup plus pointu (dans le rapport $\frac{1,175}{0,75} \cong 1,6$).

Compte tenu des formulations choisies, le temps de concentration n'a de sens que pour l'H.U. du S.C.S. ($t_c = 8/3 t_m$). Pour les autres, t_c tendrait vers l'infini. Dans la pratique, ces trois hydrogrammes unitaires sont tels que $q(3 t_m)$ est sensiblement nul ; donc, en première approximation, on pourra retenir que les trois H.U. proposés ne dépendent que du temps de montée t_m qui est sensiblement égal à $\frac{t_c}{3}$.

X.4.3.3.3 Evaluation de t_m ou de t_c

t_c représente le temps mis par la particule d'eau la plus éloignée pour gagner l'exutoire. t_c est donc sensiblement proportionnel à la longueur de ce chemin. Par ailleurs, t_c est inversement proportionnel à la vitesse de l'eau. Or, celle-ci varie comme la racine carrée de la pente (forme de Strickler, de Chezy, etc.). PASSINI a proposé de

caractériser la longueur du chemin hydraulique le plus long par le paramètre $\sqrt[3]{SI}$, où S est la surface du bassin versant (en km²) et l la longueur du plus long thalweg (en km). Quant aux pentes, on utilise la pente moyenne I (en m/m) définie précédemment au paragraphe III.3.4.

La formulation proposée par PASSINI donne donc le temps t_c (en heures) par la relation :

$$t_c = \alpha \frac{\sqrt[3]{SI}}{\sqrt{I}} \approx 0.108 \frac{\sqrt[3]{SI}}{\sqrt{I}}$$

Le coefficient α est un coefficient régional variant entre 0,05 et 0,4 (h/km). Dans la pratique, on calculera α en inversant la formule de Passini sur un bassin versant analogue et où les crues sont connues.

D'autres formules sont parfois utilisées sans toutefois présentées de meilleurs fiabilités. La formule de KIRPICH utilise les mêmes paramètres mais sous une forme un peu différente :

$$t_c \approx 0.068 \frac{l^{0.77}}{I^{0.385}}$$

Il en est de même pour la formule de VENTURA :

$$t_c \approx 0.127 \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{I}}$$

Citons encore la méthode de calcul du temps de montée D ou t_m de la méthode SOCOSE :

$$\ln(D) = -0,69 + 0,32 \ln(S) + 2,2 \sqrt{\frac{P_a}{P} \frac{1}{t_a}}$$

avec les notations citées au §.X.2.4.3 (D est à la fois le temps de montée t_m de l'hydrogramme unitaire et la durée pendant laquelle le débit est supérieur à la moitié du débit de pointe durant une crue décennale.

Cette équation a été établie d'après environ 200 stations de l'ensemble de la France métropolitaine. Il est cependant prudent de la vérifier dans les conditions locales, par exemple en inversant cette formule de façon à utiliser un coefficient constant mieux adapté régionalement que le terme 0,69.

Enfin, signalons les études faites par l'O.R.S.T.O.M. sur une centaine de bassins, dans un régime sahélien subdésertique :

$$t_c = \alpha \sqrt{S} \quad (t_c \text{ en heures ; } S \text{ en km}^2)$$

avec α variant avec la classe de relief ($2 < S < 150 \text{ km}^2$) :

$$\alpha = 5,0 \quad \text{pour } R = 2 \quad \alpha = 1,5 \quad \text{pour } R = 4$$

$$\alpha = 2,3 \quad \text{pour } R = 3 \quad \alpha = 0,75 \quad \text{pour } R = 5$$

Ces différentes formules empiriques ne peuvent donner que l'ordre de grandeur de t_c ou de t_m . Il semble que cette imprécision soit telle que dans 70 % des cas, la véritable valeur de t_c (ou t_m) ne s'écarte pas plus de son estimation empirique \hat{t}_c que dans la fourchette :

$$\hat{t}_c/2 \leq t_{c\text{vrai}} \leq 2\hat{t}_c$$

X.4.3.4 Limites à la notion d'hydrogramme unitaire

Dès le début de l'étude des relations pluies-débits, nous avons souligné que cela n'était possible que sur des bassins versants de faible étendue. Plusieurs raisons à cela, en particulier, les pluies doivent pouvoir être considérées comme homogènes sur les bassins versants, et la nature du sous-sol doit être à peu près homogène.

Enfin, si le bassin est très grand, la notion d'hydrogramme unitaire est plus difficile à justifier ; en particulier, l'onde de crue subit, dans le réseau de surface, des déformations qui dépendent de la géométrie des cours d'eau mais aussi du débit.

Premier point : il n'est guère possible d'utiliser la notion d'hydrogramme unitaire que sur des bassins dont la surface va de quelques kilomètres-carrés à quelques centaines de kilomètres-carrés.

Une autre critique possible porte sur l'unicité de l'H.U. En effet, le temps de concentration varie avec la nature du sol et donc certainement avec l'état de la végétation. De même, une partie de l'écoulement se faisant dans des chenaux, le temps de propagation doit varier avec le débit donc avec l'intensité des pluies antérieures. Dans le cas d'étude où on dispose de suffisamment d'informations, on pourra établir des H.U. par saison et variant avec les conditions d'humectation.

X.4.4 - Reconstitution des crues à partir des précipitations

Le but poursuivi est donc toujours d'évaluer la crue de fréquence F quelconque. Nous supposons que nous avons déjà choisi une fonction de production et une fonction de transfert, soit à partir d'observations concomitantes des pluies et des débits, soit par des méthodes empiriques. Deux approches sont alors possibles :

X.4.4.1 - Passage des pluies aux débits pour chaque averse observée

Pour chaque averse importante que l'on a observée par le passé, on reconstitue la crue qui en a résulté. On étend ainsi (ou on crée) un échantillon de débits de crues.

A partir de cet échantillon, on effectue une analyse statistique classique de façon à estimer Q_F . L'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite la reconstitution d'un grand nombre de crues. Cette difficulté entre autres explique que l'on ne procède que rarement ainsi.

X.4.4.2 - Passage de "la pluie de fréquence F" à la crue de même fréquence

Il est raisonnable de penser que, sur un petit bassin versant où le ruissellement constitue l'essentiel du débit de crue, une averse de fréquence F génère une crue de même fréquence F ; et cela, d'autant mieux que F est proche de 1. La reconstitution de la crue par fonction de transfert et fonction de production est donc liée à la connaissance de l'H.U. [fonction $Q(t)$], à celle de la fonction de production [fonction $k_r(t)$] et aux conditions initiales d'humectation correspondant à la fréquence F :

$$Q(t) = S \int_0^{t_c} q(\tau) * k_r(t - \tau) * I(t - \tau) d\tau$$

Pour générer l'hydrogramme $Q(t)$ de fréquence F, il est donc nécessaire de se donner le hyétogramme $I(t)$ de même fréquence F.

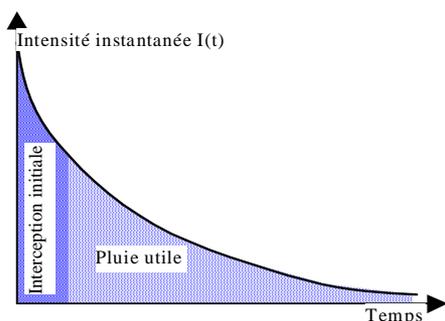
La première idée qui vient à l'esprit est d'utiliser les courbes intensité-durée-fréquence dont nous avons parlé au §.IX.4.2. Généralement, on constate que les "lois" de Montana se vérifient assez bien et que l'on a donc des relations du type :

$$I_{\Delta t} = \frac{a}{(\Delta t)^b} \quad (\text{pour une fréquence F donnée})$$

Dans cette expression, $I_{\Delta t}$ représente l'intensité moyenne de la pluie sur une durée Δt et pour la fréquence F. Ceci n'est absolument pas un hyétogramme qui lui, doit donner l'évolution de l'intensité instantanée en fonction du temps et pour une fréquence F.

Le problème est donc de reconstituer un hyétogramme-type de fréquence F que nous appellerons hyétogramme de projet. Il devra bien sûr être cohérent avec les formules de Montana.

X.4.4.2.1 Hyétogramme de projet de la méthode du S.C.S.



C'est la solution la plus simple mais qui présente des anomalies. On suppose que le hyétogramme de projet est une fonction puissance identique à la loi de Montana :

$$I(t) = \frac{a(1-b)}{t^b}, \quad I_{\Delta t} = \frac{a}{(\Delta t)^b}$$

L'inconvénient majeur est que ce hyétogramme n'a pas une forme naturelle. En effet, une averse classique ne débute pas par l'intensité la plus forte pour ne faire que décroître. Une averse voit en général son intensité croître puis décroître.

Cette remarque est très importante quand on se rappelle qu'il existe une interception initiale (le S. du §.X.4.2.3). En effet, c'est la partie de l'averse la plus intense qui servira à l'interception et jamais cette intensité maximale ne pourra provoquer du ruissellement. Cela est vraiment choquant ! Une amélioration possible serait donc de rendre cet hydrogramme symétrique, comme par exemple une expression du type :

$$I(t) = \frac{a(1-b)}{[\pi - 2t]^b}$$

Là encore, le problème ne serait pas parfaitement résolu puisque cette averse correspondrait à des intensités moyennes $I_{\Delta t}$ de fréquence F pour toutes les durées Δt . Or, il est évident que si l'intensité de la pluie sur une durée Δt est décennale, il n'en est pas forcément de même sur des durées $\Delta t'$ plus petites ou plus grandes que Δt .

X.4.4.2.2 Hyétogramme de la méthode SOCOSE

Compte tenu des remarques précédentes, la méthode SOCOSE adopte pour hyétogramme de projet une fonction qui ne donne une intensité moyenne $I_{\Delta t}$ de fréquence décennale que pour une certaine durée D.

Si la durée Δt est inférieure à D ou supérieure à D, l'intensité moyenne $I_{\Delta t}$ doit être de fréquence inférieure à 0,9. La forme analytique retenue est la suivante :

$$I(t = kD) = \frac{a(1-b)}{(2kD)^b} \frac{(4k^2 + 10/k - 14)}{7(4k^2 + 10/k - 2)^{(10-3b)/7}} \quad \text{pour } t > 0$$

$$I(t) \text{ est l'intensité instantanée à un instant } t \quad [I(-t) = I(t)].$$

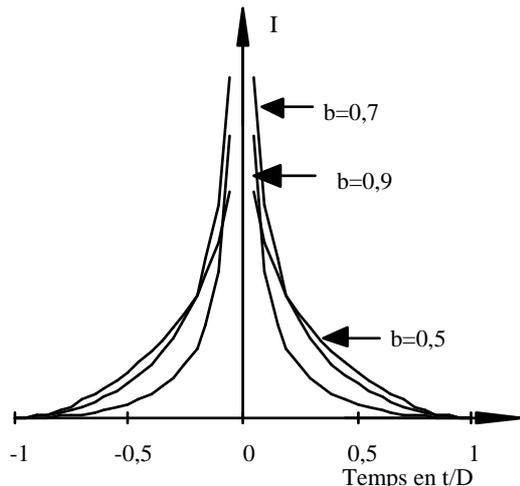
Si $P(t)$ est la quantité de pluie tombée durant la partie centrale de l'averse - $\frac{t}{2} < t < +\frac{t}{2}$, on aura aussi :

$$P(t) = 2 \int_0^{t/2} I(t) = a \left[\frac{t}{\left[\frac{t^2}{D} + 2\frac{D}{t} - 2 \right]^{3/7}} \right]^{1-b}$$

Ce hyétogramme est tel que l'intensité moyenne sur une durée D correspond à la loi de Montana :

$$I_D = \frac{a}{D^b} \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{+D/2} I(t) dt$$

Ce hyétogramme n'est défini que sur l'intervalle $-D, +D$. Il n'est pas possible d'en donner un schéma général mais dans le cas particulier de la région Est où les valeurs de a et b sont de l'ordre de 25 mm/h et 0,7, ces hyétogrammes ont les allures ci-contre.



Dans la méthode SOCOSE, le hyétogramme de projet est calculé pour la fréquence décennale (valeurs de a et b pour $F = 0,9$) et pour une durée du hyétogramme égale à $2D$, D étant le temps de montée de l'hydrogramme unitaire.

Dans des applications autres, on pourra garder la même formulation pour $I(t)$ mais en changeant les valeurs de a et b (changement de fréquence) et en faisant varier D de part et d'autre du temps de montée.

Si le bassin versant est petit, la pluie ponctuelle peut être confondue avec la pluie moyenne sur le bassin versant. Par contre, lorsque la surface S du bassin versant augmente, il faudra tenir compte de l'abattement des pluies. On pourra par exemple retenir la formule donnant le coefficient d'abattement K à partir de la surface D , de la durée D

et pour une fréquence décennale :

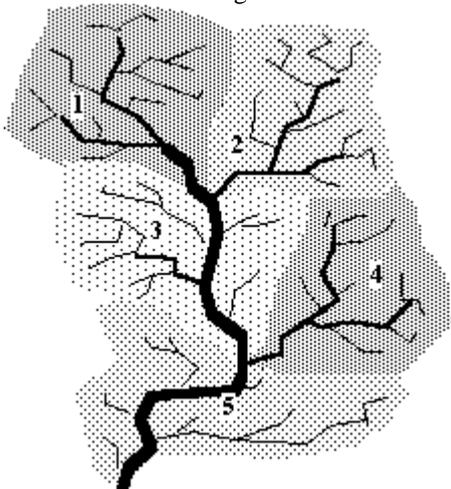
$$K = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{S}}{30\sqrt[3]{D}}} \quad S \text{ en km}^2 ; D \text{ en h}$$

On calculera K pour le temps de montée D et on multipliera les intensités $I(t)$ par K ($S, D, F = 0,9$).

X.4.5 - Généralisation à de grands bassins

La méthode de l'hydrogramme unitaire suppose implicitement que le bassin versant est de faible taille, puisque la pluie est homogène et l'infiltration également. Lorsque la taille augmente (supérieure à quelques dizaines de kilomètres-carré), ces hypothèses ne sont plus acceptables. On aura alors recours à des modèles hydrauliques plus ou moins complexes dont on peut ainsi résumer l'organisation :

- le bassin versant est découpé en sous-bassins élémentaires. Sur chaque sous-bassin, l'hydrogramme dû au ruissellement qui y prend naissance est évalué par la méthode de l'hydrogramme unitaire ;
- chaque sous-bassin constitue une maille qui reçoit éventuellement les débits en provenance d'autres mailles, et répartit différemment ces débits dans le temps avant de les transmettre à la variable suivante ;
- la modification des débits à la traversée d'une maille, c'est-à-dire dans un tronçon de rivière, dépend essentiellement de la géométrie du cours d'eau et de ses qualités hydrodynamiques.



Cette transformation des débits est évaluée par des méthodes dites de "flood Routing" comme celle de Muskingum, que nous verrons plus loin.

Soit un bassin versant pour lequel on puisse admettre que sur les cinq sous-bassins indiqués, la méthode de l'hydrogramme unitaire soit utilisable ; on calcule par cette méthode les trois hydrogrammes $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$, $q_4(t)$ et $q_5(t)$. Le débit entrant dans la maille 3 est $q_1(t) + q_2(t)$. Cet hydrogramme entrant est déformé par une méthode de flood routing en un débit sortant $q_{s3}(t)$ auquel on ajoute l'hydrogramme propre à la maille $q_3(t)$. Le débit entrant dans la maille 5 est donc celui sortant de 3 [$q_{s3}(t) + q_3(t)$] augmenté de celui sortant de 4 [$q_4(t)$]. Le débit [$q_{s3}(t) + q_3(t) + q_4(t)$] est déformé par une méthode de flood routing pour donner $q_{s5}(t)$ auquel on ajoute $q_5(t)$ pour obtenir le débit à l'issue de ce bassin.

Voici expliqué sommairement le principe des modèles hydrologiques dit "maillé". Ils sont en quelque sorte la juxtaposition de modèles de ruissellement, de modèles de l'hydrogramme unitaire et de modèles de propagation d'ondes de crues.

Selon la complexité des problèmes envisagés, les modèles peuvent être plus ou moins sophistiqués. Le problème essentiel est alors celui du calage du modèle. Ce calage est généralement fait "manuellement" en tâtonnant sur les différents paramètres jusqu'à pouvoir reconstituer aussi parfaitement que nécessaire les crues déjà observées.

X.5 - ESTIMATION DES CRUES DE FREQUENCE TRES RARE : LA METHODE DU GRADEX

L'ajustement des débits de crues observées ne permet guère d'extrapoler qu'à des périodes de retour de l'ordre de deux à trois fois la durée d'observation. Les méthodes empiriques telles que les courbes-enveloppes restent peu précises pour les fréquences rares et comme la recherche historique, elles ne restent utilisables que dans de rares conditions. Il existait donc un quasi-void pour l'estimation objective des crues de fréquence très rare jusqu'à l'apparition, en 1966, de la méthode dite du "gradex" et due à MM. GUILLOT et DUBAND de la Division Technique Générale de l'E.D.F. Cette méthode dans son principe est très simple. Son succès est très grand et finalement on la trouve utilisée un peu "à toutes les sauces", même parfois dans des situations totalement différentes de celles où elle est adaptée.

X.5.1 - Constatations justifiant la méthode du gradex

La méthode du gradex est basée sur quelques résultats simples que nous avons déjà présentés mais qu'il paraît utile de récapituler ici.

X.5.1.1 - Comportement asymptotiquement exponentiel des pluies extrêmes

De très nombreuses études menées sous différents climats ont montré, à quelques très rares exceptions, que les pluies maximales annuelles (ou saisonnières) se distribuaient selon des lois qui tendent, pour des fréquences rares, vers une loi exponentielle. Le plus souvent, c'est la loi de Gumbel qui est utilisée.

$$\text{Prenons par exemple la loi de Fuller ; on a : } F(x) = 1 - e^{-\frac{x-a}{b}} \Rightarrow x = a + b \operatorname{Ln} \left[\frac{1}{1-F} \right]$$

$$\text{Pour la loi de Gumbel, on a : } F(x) = e^{-e^{-\frac{x-x_0}{g}}} \Rightarrow x = x_0 + g \left[-\operatorname{Ln}[-\operatorname{Ln}(F)] \right]$$

Mais, lorsque F tend vers 1, on a Ln (F) qui est équivalent à F - 1. Donc :

$$x \cong x_0 + g \left[(-\operatorname{Ln} [-\operatorname{Ln} (F)]) \right] \text{ pour } F \text{ tendant vers } 1$$

$$x \cong x_0 + g \left[(-\operatorname{Ln} [-\operatorname{Ln} (1 - F)]) \right]$$

$$x = x_0 + g \operatorname{Ln} \frac{1}{1-F}$$

Le terme b de la loi de Fuller correspond au gradex g de la loi de Gumbel. Quelles que soient les périodes de retour T1 et T2, et quelles que soient les lois d'ajustement de ce type, on peut définir un gradex g (homogène à une hauteur de pluie) tel que :

$$P_{T2} - P_{T1} = g \operatorname{Ln} \frac{T2}{T1}$$

X.5.1.2 - Méthode d'estimation des gradex

Pour estimer les gradex, différentes approches sont possibles. Lorsque la série d'observation est longue (n>30 ans) le plus simple et le plus efficace est d'ajuster directement les pluies maximales annuelles à une loi de Gumbel. Lorsque la série est plus courte, il est souvent préférable de travailler sur les pluies supérieures à un seuil (nombre de pluie supérieures au seuil ajusté à une loi de poisson, hauteur de ces précipitation ajustée à une loi de Fuller). Généralement un seuil tel qu'il y ai 3 pluies par an en moyenne est un compromis satisfaisant.

Une étude de quelques postes pluviométriques disposant de longues séries montre que dans l'Est de la France, l'erreur-type σ_g sur l'estimation du gradex g varie avec le nombre n d'années d'observations, suivant la relation : $\sigma_g \cong$

$$0,8 \frac{g}{\sqrt{n}}$$

On admet généralement qu'une quinzaine d'années d'observation donne une estimation relativement fiable du gradex. Cette façon d'estimer les gradex permet d'extrapoler les précipitations jusqu'à des périodes de retour de plusieurs milliers d'années, sans noter de graves incohérences (les méthodes basées sur la notion de "stations années" permettent assez facilement d'évaluer des pluies de telles périodes de retour).

X.5.1.3 - Variation du gradex avec la durée

L'évolution des pluies en fonction de leur durée est représentée par des fonctions puissances (loi de Montana), tout au moins pour des durées variant de 1 h à 24 h :

$$P(t)_F = P(1)_F t^b$$

Mais, on peut supposer que P (t) et P (1) suivent des lois de Gumbel et que l'on a les relations :

$$P(t)_F = P_O(t) + U_F g(t)$$

$$P(1)_F = P_O(1) + U_F g(1)$$

g (t) et g (1) étant les gradex des pluies en t heures et en une heure.

On a donc à la fois les expressions ...

$$P(t)_F = [P_O(1) + U_F g(1)] t^b = P_O(1) t^b + U_F g(1) t^b$$

... et

$$P(t)_F = P_O(t) + U_F g(t)$$

Dans ces expressions, seuls les seconds termes varient en fonction de la fréquence ; il est donc normal d'avoir $g(t) = g(1) t^b$ ou tout au moins une relation empirique $g(t) \cong t^{b'}$ avec $b' \cong b$. Effectivement, de nombreux auteurs signalent que pour des durées de l'ordre de 1 à 24 h, les gradex suivent à peu près des lois de Montana.

X.I.5.4 - Tendances limites du ruissellement

Quelle que soit la nature du sol, nous avons vu que l'infiltration J instantanée dépendait du temps par une relation : $J = J_1 = (J_0 - J_1) e^{-\beta t}$

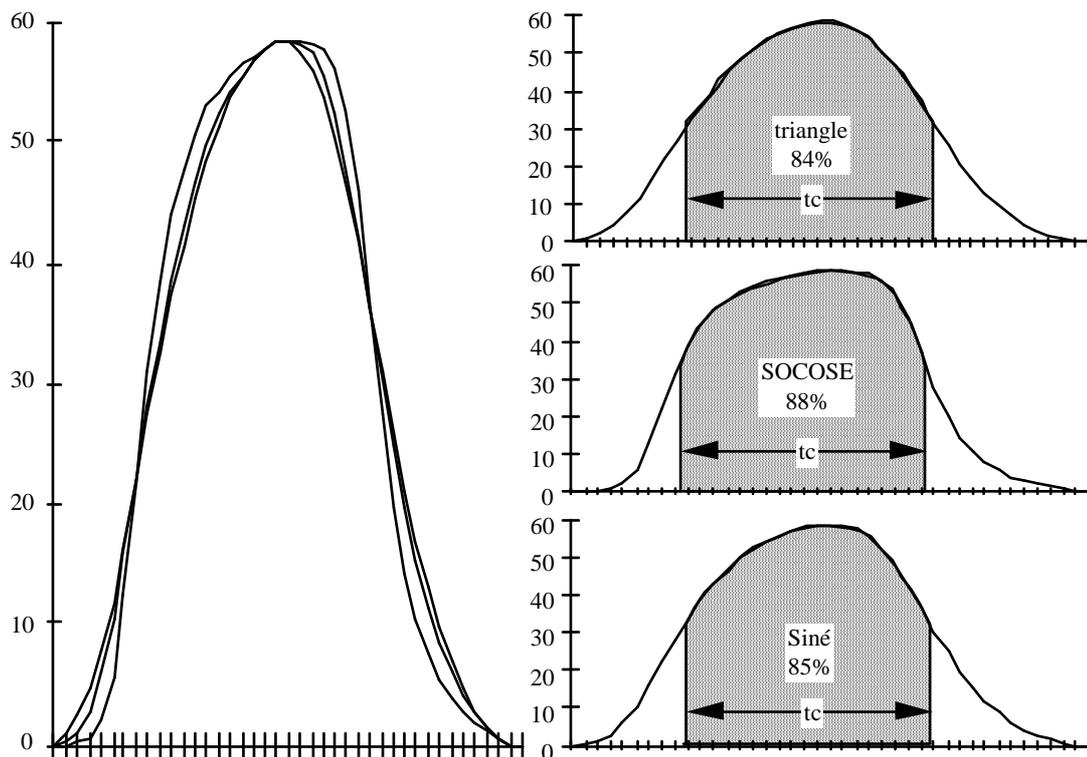
Ceci signifie que lorsque le temps augmente, l'infiltration J tend vers une limite J_1 . Supposons qu'un bassin versant ait reçu suffisamment de précipitations pour que J ait atteint cette limite J_1 . Dans ces conditions, une averse d'intensité instantanée $I(t)$ durant un instant dt donnera une pluie $I(t) dt$; durant cet instant, l'infiltration sera $J_1 (dt)$ et le ruissellement $[I(t) - J_1(t)]$. Si maintenant l'intensité de la pluie augmente et devient $I'(t)$, le surcroît de pluies en dt sera : $[I'(t) - I(t)]$, mais le surcroît de ruissellement sera également $[I'(t) - J_1(t)] dt - [I(t) - J_1(t)] dt = [I'(t) - I(t)] dt$, quel que soit J_1 .

Lorsqu'un bassin versant a atteint sa vitesse limite d'infiltration (on dira que le bassin est saturé), tout surcroît de pluies se transforme intégralement en surcroît de ruissellement. On admet généralement qu'un bassin versant atteint la saturation pour des conditions pluviométriques voisines de celles engendrant la crue décennale.

X.1.5.5 - Répartition des débits dans le temps

La méthode de l'hydrogramme unitaire montre que la portion ruisselant d'une pluie d'une durée t heures s'écoule sur une durée $t + t_c$ heures, t_c étant le temps de concentration du bassin.

Les auteurs de la méthode indiquent que généralement l'averse aux conséquences les plus graves pour une fréquence et un bassin donnés est celle de durée t_c . Or, une averse de durée t_c provoque un ruissellement de durée $2t_c$. Cependant, dans cette crue de durée $2t_c$, une part essentielle du volume s'écoule durant une durée t_c . (Cette part est d'environ 83 % si on prend l'H.. du S.C.S., de 85 % pour l'H.U. de Siné du G.R. Belge et de 88 % pour l'H.U. de la méthode SOCOSE).



Réponse à un ruissellement uniforme de durée $2t_c$ par produit de convolution suivant les 3 H.U. envisagés

Ceci justifie l'approximation suivante : lorsque le bassin est saturé, tout surcroît de pluies sur une durée t_c se transforme intégralement en un surcroît de débit sur une même durée t_c . Il faut noter que cette approximation ne peut qu'aller dans le sens de la sécurité en surestimant les surcroîts de débits.

Appelons $Q_{t_c}(T)$ le débit de crue moyen sur une durée t_c et de période de retour T . Soit S la surface du bassin versant et g_{t_c} le gradex des pluies de durée t_c heures. Lorsque l'on passe d'une période de retour T à une période de retour T' , le surcroît de pluies en t_c heures sur le bassin versant est de :

$$\Delta V = 1000 S \cdot g \cdot \ln \frac{T'}{T}$$

ΔV en m^3 ; S en km^2 et g en mm .

Le surcroît de débit moyen sur t_c heures est :

$$\Delta Q_{t_c} = Q_{t_c}(T') - Q_{t_c}(T) = \frac{Sg}{3,6t_c} \ln \frac{T'}{T}$$

Il est alors évident que la loi de distribution des débits moyens sur t_c a elle-aussi un comportement asymptotiquement exponentiel dont le gradex g_q , exprimé en m^3/s , dérive du gradex g des précipitations par la relation :

$$g_q = \frac{Sg}{3,6t_c}$$

X.5.1.6 - Passage du débit moyen sur une durée t_c au débit de pointe

Nous venons de voir qu'il est possible d'extrapoler la loi de distribution des débits moyens Q_{t_c} mais généralement, on s'intéresse au débit maximum instantané Q_i . Comme nous l'avons déjà vu au §.3.3, on étudiera le coefficient de point $r = \frac{Q_i}{Q_{t_c}}$ qui peut être considéré comme une variable aléatoire, et on obtiendra le débit $Q_i(T)$ pour

une période de retour T en fonction de $Q_{t_c}(T)$ par la relation : $Q_i(T) = Q_{t_c}(T) \cdot \bar{r} \approx \lambda$ (λ est généralement voisin de 1 et sa valeur exacte sera trouvée dans les tables fournies précédemment).

X.5.2 - Mise en oeuvre pratique de la méthode du gradex

X.5.2.1 - Choix de la durée t_c

Lorsque l'on dispose d'observations des crues aux sites envisagés, le plus simple est de déterminer t_c d'après les hydrogrammes réellement observés. On constate généralement que la valeur de t_c n'a pas besoin d'être connue avec une très grande précision et que l'on peut se contenter de valeurs arrondies telles que 1 h, 2 h, 4 h, 6 h, 12 h, 18 h, 24 h, etc.

Si on ne connaît pas de crues sur le site, on estimera t_c par analogie avec des bassins comparables (cf. §.X.4.3.3). Dans tous les cas qui paraissent douteux, il n'est pas interdit, et est même conseillé, d'appliquer la méthode avec plusieurs hypothèses sur t_c .

X.5.2.2 - Etude du gradex des précipitations sur une durée t_c

Lorsque l'information pluviométrique le permet (pluviographes), on étudiera directement la statistique des précipitations sur t_c heures.

Bien souvent, le contraste pluviométrique entre différentes saisons justifie une étude saisonnière des gradex : par exemple, on découpe l'année en un "été" et un "hiver", et pour chaque saison, on ajuste les pluies maximales mensuelles sur une durée t_c à des lois de Gumbel. Or, comme nous l'avons déjà vu (cf. §.IX.2.4), les gradex mensuels et saisonniers sont identiques.

Si on ne dispose que des observations sur des durées journalières (de 6 h à 6 h T.U.), on évaluera les gradex annuels ou saisonniers des pluies journalières. Pour passer des gradex sur 24 heures origines fixes au gradex sur une durée t_c , on utilisera les "Lois de Montana) en admettant que les paramètres b mis en évidence sur les pluviographes disponibles sont une représentativité régionale (cf. §.IX.4.2.2) (penser à effectuer éventuellement la correction de Weiss). A la fin de cette phase, on doit donc disposer d'un gradex annuel (ou de gradex saisonniers) sur une durée t_c (ou sur plusieurs durées t_{c1} , t_{c2} , ...).

X.5.2.3 - Etude des crues

Si on dispose d'observations suffisantes, on étudiera la distribution statistique des débits de crues moyens sur t_c (ou t_{c1} , t_{c2} , ...) maximaux annuels. La loi de distribution pour des valeurs faibles de F (par exemple $0,1 < F < 0,9$ n'a pas de raison particulière d'être gumbelienne.

Dans le cas général, on déterminera donc le Q_{t_c} (10 ans) à partir duquel on préjuge que la loi de distribution devient asymptote à une loi de Gumbel. Par ailleurs, pour toutes les crues observées, on calculera le coefficient de point

r dont on étudiera la distribution statistique (en particulier \bar{r}). Notons tout de suite que si les r sont particulièrement dispersés, cela est souvent l'indice que l'estimation de t_c est trop forte. Si les pluies justifient un travail saisonnier, il faudra bien sûr étudier les crues par saison.

Notons que l'on peut aussi bien travailler sur les Q_{t_c} origines variables qu'origines fixes. En effet, l'écart est à peu près compensé au niveau des valeurs du coefficient de pointe r.

Dans le cas où on n'a pas d'observations des crues, on estimera Q_{t_c} (10 ans), soit par analogie avec des bassins comparables, soit par des méthodes empiriques (par exemple, on pourrait prendre la méthode SOCOSE qui permet d'évaluer D et Q_i (10 ans)).

On fera alors l'approximation $t_c \cong D$, Q_{t_c} (10 ans) $\cong \frac{Q_i(10 \text{ ans})}{2}$ et $\bar{r} \cong 2$.

X.5.2.4 - Extrapolation aux fréquences rares

Dans le cas général où on a obtenu une crue décennale sur t_c , Q_{t_c} (10 ans) et un gradex g des pluies sur t_c , on

calcule le gradex g_q des débits sur t_c : $g_q = \frac{Sg}{3,6t_c}$ (S en km^2 , g en mm, t_c en heures, g_q en m^3/s)

Puis, on extrapole les débits moyens sur t_c pour des périodes de retour T, par la relation...

$$Q_{t_c}(T) = Q_{t_c}(10) + g_q \text{Ln} \frac{T}{10}$$

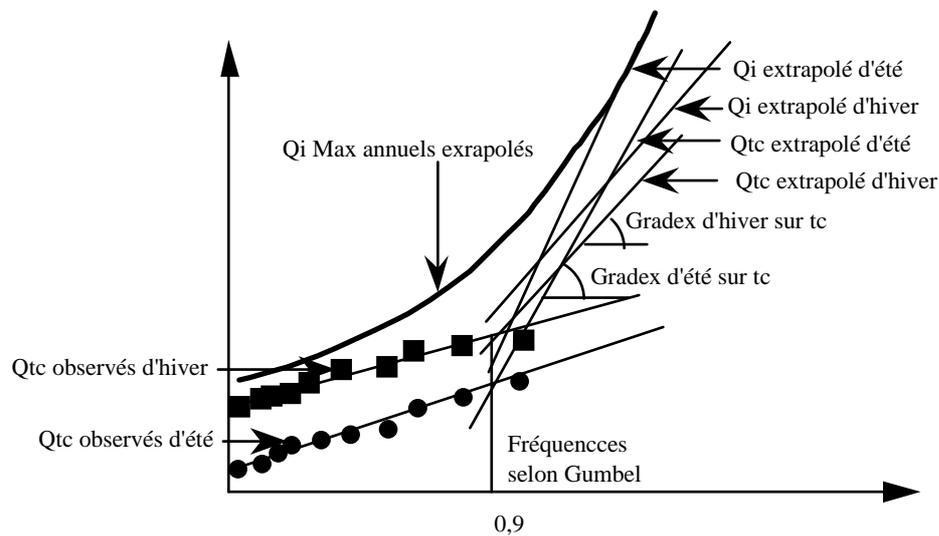
... ou par, ce qui est préférable :

$$Q_{t_c}(T) = Q_{t_c}(10 + g_q(-\text{Ln} - \text{Ln} F - 2,25)) \text{ avec } F = \frac{1}{1-T}$$

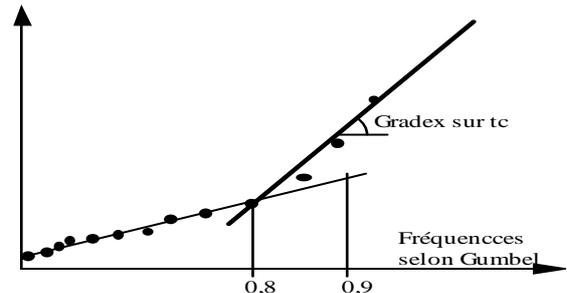
Ces formules reviennent à admettre que si on reporte les crues Q_{t_c} dans un graphique de Gumbel, la loi de distribution, au-delà de $F = 0,9$, est confondue avec une droite passant par le point $F = 0,9$, Q_{t_c} (10 ans) et de pente g_q .

Ayant extrapolé les Q_{t_c} , on passe au Q_i en multipliant par le coefficient de pointe moyen \bar{r} et éventuellement par le terme correctif λ ($\lambda \cong 1$).

Si l'étude a été menée par saison, on extrapolera jusqu'aux lois de distribution des Q_i saisonnières, puis on composera ces lois saisonnières pour obtenir la loi des Q_i annuels, comme l'indique la figure suivante.



Dans certains cas particuliers où les observations de débits de crue sont particulièrement abondantes, il est possible de déceler graphiquement, à partir de quelle fréquence le bassin est suffisamment saturé pour que la loi de distribution des débits tende vers une loi de Gumbel dont le gradex est estimé à partir des pluies. C'est ce qu'illustre la figure ci-contre où il semble préférable d'extrapoler à partir d'une fréquence 0,8 plutôt qu'à partir de 0,9.



Enfin, signalons que si l'on a dû tester plusieurs estimations t_{c1} , t_{c2} , ... du temps de concentration, il convient de faire ces constructions autant de fois que nécessaire, puis de retenir le résultat le plus pessimiste.

X.5.3 - Limites de la méthode

Très souvent, la méthode du gradex a été utilisée pour des bassins versants dont la surface était de l'ordre de 1.000 km² ou moindre. Comme nous venons de le voir, on peut toujours utiliser cette méthode pour des surfaces plus petites, car les hypothèses de saturation sur l'ensemble du bassin sont encore plus faciles à vérifier. La seule difficulté dans le cas de petits bassins est d'évaluer les gradex sur des temps de concentrations faibles ; il faut donc disposer d'observations pluviographiques.

Le nombre n de pluviographes ou de pluviomètres nécessaires peut s'évaluer sommairement par la relation

$$n = \sqrt{\frac{S}{100}}, \text{ ce qui donne un pluvio si } S < 100 \text{ km}^2, 2 \text{ pluvio si } 100 < S < 400 \text{ km}^2, 3 \text{ pluvio si } 400 < S < 900 \text{ km}^2, \text{ etc.}$$

C'est plutôt vers les grandes surfaces qu'il convient de se méfier d'une application brutale de la méthode du gradex. En effet, plus le bassin est grand, moins il y a de chance qu'il soit saturé partout à la fois. D'autre part, tant que les surfaces sont raisonnables, on peut admettre que les coefficients d'abattement sont voisins de 1 et admettre que le gradex des pluies moyennes sur le bassin est égal à la moyenne des gradex ponctuels.

Au-delà de 5.000 km² de surface, on ne peut plus utiliser la méthode telle qu'elle vient d'être exposée. Cependant, on pourra s'en inspirer pour tous les problèmes sur un modèle maillé.

X.6 ESTIMATION DES CRUES DE FREQUENCE TRES RARE : APPROCHE PUREMENT STATISTIQUE

A partir de 1984, l'Ecole italienne d'hydrologie a élaboré une méthode basée sur l'approche statistique directe de la variable intéressant le projeteur, à savoir le débit de crue. Sans trop déformer la pensée des auteurs, on peut résumer ainsi leur approche.

Les crues sont le résultat à travers les particularités de chaque bassin de deux types principaux de phénomènes météorologiques. Les uns très fréquents donnent ce que l'on pourrait appeler des "crues banales", c'est-à-dire observées plusieurs fois par an ; les autres au contraire, seraient beaucoup plus rares et provoqueraient les "crues extrêmes". Ces phénomènes extrêmes n'apparaîtraient qu'un nombre réduit de fois, même dans des séries de plusieurs dizaines d'années d'observations.

Faisons l'hypothèse que les phénomènes extrêmes (indités E) arrivent chaque année en nombre k_E distribué selon une loi de Poisson de paramètre moyen λ_E :

$$\text{Prob}(k_E) = \frac{e^{-\lambda_E} \lambda_E^{k_E}}{k_E!}$$

et que les débits des crues qui en résultent sont distribués selon une loi exponentielle d'expression :

$$F_E(x) = 1 - e^{-x/g_E}$$

Avec les mêmes hypothèses, pour les crues "banales" (notées B) on aura :

$$\text{Prob}(k_B) = \frac{e^{-\lambda_B} \lambda_B^{k_B}}{k_B!} \text{ et } F_B(x) = 1 - e^{-x/g_B}$$

On peut montrer que la loi des distribution des crues maximales annuelles est alors de la forme :

$$F_A(x) = e^{-(\lambda_B e^{-x/g_B} + \lambda_E e^{-x/g_E})}$$

ou encore :

$$F_A(x) = e^{-e^{-\frac{x-x_{0B}}{g_B}}} * e^{-e^{-\frac{x-x_{0E}}{g_E}}}$$

avec :

$$x_{0B} = g_B \text{ Ln}(\lambda_B) \text{ et } x_{0E} = g_E \text{ Ln}(\lambda_E)$$

Ainsi présentée la loi de distribution des crues maximales annuelles devrait être le produit de deux distributions gumbeliennes et comme dans la méthode du gradex, les crues extrêmes se "doivent" d'avoir un comportement asymptotiquement exponentiel de gradex g_E .

Cette analogie dans la formulation ne doit pas faire oublier la différence fondamentale : G ne dérive plus du gradex des précipitations (évaluée à partir de plusieurs dizaines ou centaines de points) mais il est un des 4 paramètres à ajuster sur quelques dizaines de points.

Le calage des 4 paramètres g_E , g_B , λ_E et λ_B peut se faire par méthode du maximum de vraisemblance appliquée aux crues supérieures à un seuil ou aux crues maximales annuelles x_i . Dans ce dernier cas, on obtient un système de quatre équations à quatre inconnues :

$$\lambda_E = \frac{\lambda_E \sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i}{g_E}}}{g_E \sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i}{g_E}}} \text{ et } \lambda_B = \frac{\lambda_B \sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i}{g_B}}}{g_B \sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i}{g_B}}}$$

$$g_E = \frac{\sum_{i=1}^n x_i e^{-\frac{x_i}{g_E}}}{\sum_{i=1}^n x_i e^{-\frac{x_i}{g_E}} + \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{x_i}{g_E}}}{\psi(x_i)}} \quad \text{et} \quad g_B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i e^{-\frac{x_i}{g_B}}}{\sum_{i=1}^n x_i e^{-\frac{x_i}{g_B}} + \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{x_i}{g_B}}}{\psi(x_i)}}$$

avec :

$$\psi(x_i) = \frac{\lambda_E}{g_E} e^{-\frac{x_i}{g_E}} + \frac{\lambda_B}{g_B} e^{-\frac{x_i}{g_B}}$$

Ce système un peu lourd peut néanmoins se résoudre par les algorithmes classiques. Malheureusement, les résultats ne sont pas fiables en particulier les paramètres "extrêmes" ne sont déterminés que par leur nombre très réduit de points à poids forts ($\lambda_E \ll \lambda_B$, $g_E \gg g_B$).

Le problème se simplifie si, comme l'observent les italiens, il existe des relations valables régionalement entre ces quatre paramètres.

En effet, sur 39 stations de jaugeage, représentatives des différents cours d'eau italiens, on constate que les rapports :

$$\frac{g_E}{g_B} \approx c^{te} \approx 2,6 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_E}{(\lambda_E)g_B/g_E} \approx c^{te} \approx 0,16$$

Avec cette nouvelle hypothèse, l'ajustement statistique redevient plus aisée, il suffit en effet d'estimer en un site particulier g_B et λ_B à partir des données disponibles puis d'évaluer g_E et λ_E par des relations régionales.

Cette méthode est par certains côtés séduisante puisqu'elle permet d'obtenir assez directement les débits recherchés, mais elle ne s'appuie que sur les seuls débits qui sont moins souvent et depuis moins longtemps observés que les pluies. Par ailleurs, la mise en œuvre nécessite d'admettre par exemple $g_E/g_B = C^{te}$ régionale ce qui se vérifie peut être mais n'a pas de signification physique évidente.

Cette approche récente n'a pas encore été testée en France, mais les italiens prétendent qu'elle donne des résultats un peu analogues à ceux de la méthode du gradex sous climat méditerranéen.

X.7 - ETUDE DES ECOULEMENTS EN REGIME TRANSITOIRE ET APPLICATIONS A L'ETUDE DE LA PROPAGATION DES ONDES DE CRUE

Parmi les méthodes de prévision des crues, on peut faire un découpage grossier en deux types principaux :

- les méthodes "statistiques" d'étude des corrélations entre le débit en un point à un instant donné et différents facteurs explicatifs mesurés à un instant antérieur ;
- les méthodes "déterministes" de résolution des équations de l'hydraulique en régime transitoire en fonction de conditions aux limites et de conditions initiales connues.

Nous n'envisagerons ici que certaines des méthodes du deuxième type, choisies en raison de leur facilité de mise en œuvre.

X.7.1 - Equations générales

Comme c'est le cas de la plupart des problèmes de l'ingénieur, l'étude du mouvement en régime transitoire dans un cours d'eau naturel est excessivement complexe, mais moyennant certaines hypothèses simplificatrices, on pourra se ramener à un modèle simple représentant en gros ce qui se passe dans la réalité.

Cette simplification est justifiable si on prend soin, dans l'utilisation des résultats, de tenir compte de l'imperfection du modèle par un coefficient de sécurité, ou mieux, de confronter les résultats théoriques avec des observations sur le terrain.

X.7.1.1 - Hypothèses simplificatrices

Les principales hypothèses que nous ferons dès à présent sont les suivantes :

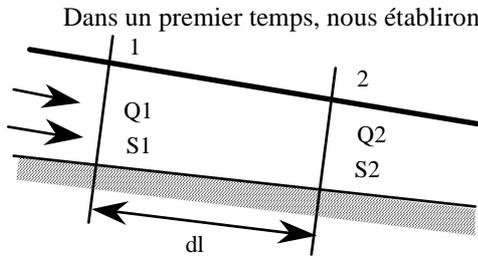
- écoulement bidimensionnel,
- répartition uniforme des vitesses dans une section,
- accélérations verticales négligeables,
- loi des pertes de charge par frottement et par turbulences identique à celle du régime permanent.

X.7.1.2 - Mise en équation

Soit l l'abscisse le long d'un cours d'eau, S la section mouillée, H la hauteur d'eau, Q le débit, V la vitesse moyenne, z la cote de la surface libre, P la pression et t le temps.

Connaissant en tout point la loi de variation de S avec H et certaines conditions initiales et aux limites, on se propose de déterminer les fonctions :

$$S(l, t) \quad \text{et} \quad H(l, t)$$



Dans un premier temps, nous établirons l'équation de continuité qui traduit la conservation des masses :

Soit deux sections 1 et 2 qui limitent un tronçon de cours d'eau de longueur dl :

$$S_2 = S_1 + \frac{\partial S}{\partial l} dl$$

$$Q_2 = Q_1 + \frac{\partial Q}{\partial l} dl$$

La différence entre les débits entrant et sortant durant un intervalle de temps dt provoque une variation du volume contenu entre les sections 1 et 2.

Si dl est petit, la section mouillée moyenne peut être prise égale à $S_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial l} dl$.

L'égalité de ces volumes se traduit ainsi :

$$\left[Q_1 - \left(Q_1 + \frac{\partial Q}{\partial l} dl \right) \right] dt = \left[dS_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial l} dl \right] dl$$

La variation de S s'écrit : $dS = \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial l} dl$

d'où :
$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial l} \frac{dl}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial l}$$

En faisant l'hypothèse que la courbure des filets fluides est faible, on peut négliger le terme en $\frac{\partial S}{\partial l}$ d'où :

$$\frac{dS}{dt} \cong \frac{\partial S}{\partial t}$$

L'égalité des volumes devient alors : $\frac{\partial Q}{\partial l} dl dt = d \left[S_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial l} \right] dl$

$$\cdot \frac{\partial Q}{\partial l} dt = dS_1 \text{ (en négligeant les termes en } \partial^2 \text{)}$$

$$\cdot \frac{\partial Q}{\partial l} dt \cong \frac{\partial S}{\partial t} dt$$

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial l} = 0}$$

Si on désire faire apparaître la vitesse $V = \frac{Q}{S}$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(VS)}{\partial l} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial V}{\partial l} + V \frac{\partial S}{\partial l} = 0}$$

N.B. Ces deux équations ne sont valables que si les apports latéraux dans le tronçon sont nuls (sinon apparaîtrait à droite le débit latéral).

Etablissons maintenant l'équation dynamique qui traduit la conservation des énergies. L'énergie d'une particule d'eau peut se mesurer par l'expression suivante :

$$H = \frac{V_2}{2g} + z + \frac{P}{rg} \quad \text{(Bernouilli)}$$

énergie cinétique
énergie de position
énergie de pression

Durant un intervalle de temps dt, cette particule se déplace d'une longueur dl. Soit J la perte de charge linéaire ; la perte d'énergie de cette particule doit être égale à Jdl :

$$- d \left[\frac{V^2}{2g} + z + \frac{P}{rg} \right] = Jdl$$

La répartition des vitesses étant uniforme, la répartition des pressions est hydrostatique. Dans une section, le terme $z + \frac{P}{rg}$ est constant. En prenant par convention 0 pour la pression atmosphérique, on a : $- d \left[\frac{V^2}{2g} + z \right] = Jdl$

Mais, en remarquant que $z = z_f + H$ (z = cote de la surface libre, z_f = cote du fond et H tirant d'eau) :

$$-d \left[\frac{V^2}{2g} + zf + H \right] = Jdl$$

$$\frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial l} dl + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial zf}{\partial l} dl + \frac{\partial zf}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial l} dl + \frac{\partial H}{\partial t} dt = -Jdl$$

Dans cette expression, $\frac{\partial zf}{\partial t} = 0$ puisque le fond est supposé stable et $-\frac{\partial zf}{\partial l} = I$, I étant par définition la pente du radier.

$$\frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial l} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} - I + \frac{\partial H}{\partial l} + \frac{1}{V} \frac{\partial H}{\partial t} = -J$$

En général, pour les crues évoluant lentement, le terme $\frac{1}{V} \frac{\partial H}{\partial t}$ est négligeable et l'expression précédente se met sous la forme :

$$\frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial l} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial l} = I - J$$

X.7.1.3 - Modes d'intégrations et méthodes de Flood-Routing

Les deux équations que nous venons d'établir sont connues sous le nom d'équations de Barré de St Venant :

$$\frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial l} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial l} = I - J$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial V}{\partial l} + V \frac{\partial S}{\partial l} = 0$$

Ce système d'équations différentielles ne connaît en général pas de solutions analytiques (ou alors les hypothèses sont par trop restrictives). L'intégration ne peut donc se faire que par voie rapprochée : numérique, analogique, graphique...

Le développement des moyens de calcul fait que l'intégration numérique complète ne présente théoriquement plus guère de difficulté.

Cependant, l'intégration complète (deux équations) dans le cas de cours d'eau naturels (non uniformes), conduit à des calculs longs et complexes nécessitant des moyens de calcul puissants.

Ceci est contradictoire avec les buts poursuivis en prévision de crues où il faut obtenir des résultats rapidement à partir de données simples, et bien souvent avec des moyens de calcul faibles.

Ces remarques justifient la persistance de techniques d'études simplifiées mais mieux adoptées à ce problème: les méthodes de "Flood Routing".

Ces méthodes que nous allons décrire, sont basées sur une intégration simplifiée de l'équation de continuité. L'équation dynamique n'est pas prise en considération.

X.7.2 - Méthode de Puls

Cette méthode s'appuie sur l'hypothèse où le débit qui sort d'un tronçon de cours d'eau ne dépend que du volume stocké dans ce tronçon. Elle s'applique surtout au transit des crues dans un réservoir et beaucoup moins bien aux cours d'eau naturels.

X.7.2.1 - Mise en équation

Soit les relations suivantes :

I	débit entrant dans le tronçon (inflow)
Q	débit sortant du tronçon (outflow)
S	volume stocké dans le tronçon (storage)

L'équation de continuité, établie sur un intervalle de temps Δt où on peut considérer que I et Q varient linéairement, s'écrit : $\frac{I_1 + I_2}{2} \Delta t - \frac{Q_1 + Q_2}{2} \Delta t = S_2 - S_1$

Par hypothèse, S ne dépend que de Q : $s = k(Q)$; l'équation précédente peut donc se mettre sous la forme : $f(I_1, I_2, Q_1, Q_2) = 0$

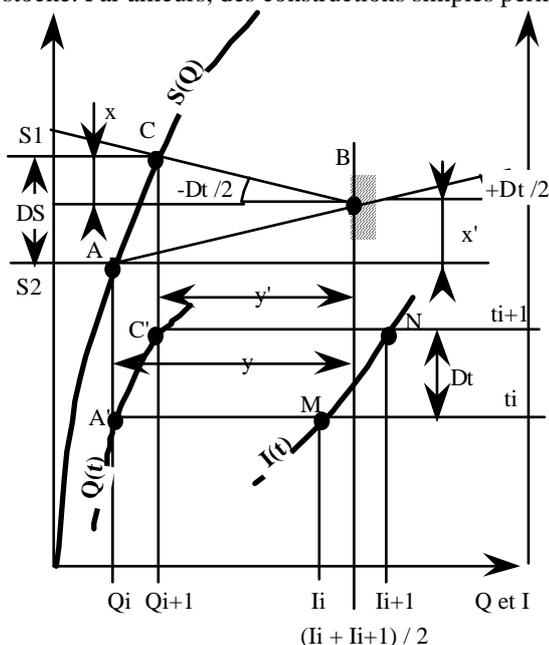
ou encore : $Q_2 = f(I_1, I_2, Q_1)$

X.7.2.2 - Intégration graphique

Cette méthode s'applique assez mal à des tronçons de rivières ; par contre, elle est parfaite pour l'étude de la traversée d'un barrage-réservoir.

En général, la fonction $k(Q)$ est connue (loi de débit du réservoir). Si cela n'était pas le cas, il faudrait reconstituer cette fonction par comparaison d'un ou plusieurs couples de crues entrantes et sortantes, réellement observées.

L'estimation de Q_2 à partir de I_1 , I_2 et Q_1 peut se faire par voie graphique ou numérique. La voie numérique nécessite de mettre la relation débit-volume stocké sous une forme mathématique, mais les calculs sont aisés à programmer. Par voie graphique, elle ne nécessite aucune hypothèse sur le type de relation entre débit et volume stocké. Par ailleurs, des constructions simples permettent une approche assez fine de la solution.



Comme le montre le schéma ci-contre, on utilise la méthode dite des "directions alternées" ou encore "épure de Blackmore" :

$$S_2 - S_1 = \frac{I_1 + I_2}{2} \Delta t - \frac{Q_1 + Q_2}{2} \Delta t$$

$$S_2 - S_1 = \frac{\Delta t}{2} (I_1 - Q_1) + \frac{\Delta t}{2} (I_2 - Q_2)$$

Le graphique représenté comporte deux graduations indépendantes en ordonnées S et t et une graduation en débit (Q et I) en abscisses. En trait d'axe : la courbe $S(Q)$ dans le graphique $S - Q$. En pointillés : l'hydrogramme d'entrée $I(t)$ et de sortie $Q(t)$ dans le graphique $t(Q, I)$.

Supposons qu'à un instant donné t_i , on connaisse le débit sortant Q_i (figuré en A dans S, Q et en A' dans t, Q). Entre les instants t_i et t_{i+1} , nous connaissons les débits entrants I_i et I_{i+1} (M et N dans I, t).

En supposant que Δt est suffisamment petit pour que la variation de I puisse être considérée comme linéaire, il est aisé de tracer une verticale ayant pour abscisse le débit moyen entrant durant

$$\text{l'intervalle de temps } \Delta t = t_{i+1} - t_i : \frac{I_i + I_{i+1}}{2}$$

Dans le graphique S, Q , les droites ont des pentes qui sont homogènes à des temps :

$$m = \frac{\Delta S}{\Delta Q} = \frac{\Delta m^3}{\Delta m^3 / s} = s$$

Traçons donc, à partir de A , une droite de pente $\frac{\Delta t}{2}$; elle coupe la verticale d'abscisse $\frac{I_i + I_{i+1}}{2}$ au point B . La pente $m = \frac{\Delta t}{2}$ de cette droite est telle que :

$$m = \frac{\Delta t}{2} \Rightarrow x = y \frac{\Delta t}{2}$$

$$\text{Or : } y = \frac{I_i + I_{i+1}}{2} - Q_i \quad \text{donc} \quad x = \left[\frac{I_i + I_{i+1}}{2} - Q_i \right] \frac{\Delta t}{2}$$

Partant de B , traçons une droite de pente $-\frac{\Delta t}{2}$. Elle coupe la courbe $S(Q)$ en un point C d'abscisse Q ; nous avons

alors :

$$m = \frac{\Delta t}{2} = \frac{x'}{y'} \Rightarrow x' = y' \frac{\Delta t}{2}$$

$$y' = Q - \frac{I_i + I_{i+1}}{2} \quad \text{donc} \quad x' = \left[\frac{I_i + I_{i+1}}{2} - Q \right] \frac{\Delta t}{2}$$

On remarque que le débit Q correspondant au point C n'est autre que Q_{i+1} puisque l'on a :

$$\Delta S = x + x'$$

$$S_{i+1} - S_i = \left[\frac{I_i + I_{i+1}}{2} - Q_i \right] \frac{\Delta t}{2} + \left[\frac{I_i + I_{i+1}}{2} - Q_{i+1} \right] \frac{\Delta t}{2}$$

$$S_{i+1} - S_i = \left[\frac{I_i + I_{i+1}}{2} \Delta t \right] + \left[\frac{Q_i + Q_{i+1}}{2} \right] \Delta t$$

Il suffit alors pour le pas de temps suivant (t_{i+1}, t_{i+2}), de recommencer la construction à partir de C .

X.7.2.3 - Résultats pratiques pour quelques cas simples

En 1976, le C.T.G.R.E.F., dans le cahier n° 24 d'informations techniques, a publié les résultats d'une intéressante étude technique de synthèse sur l'amortissement d'une crue à la traversée d'un réservoir. Nous en repreneons ici les résultats essentiels.

Comme nous venons de le voir, la méthode de Puls nécessite de connaître la courbe de remplissage du barrage, la loi de débit du réservoir et enfin, l'hydrogramme de la crue entrante.

En ce qui concerne la crue entrante, deux formes d'hydrogrammes ont été envisagés :

- une crue d'hydrogramme triangulaire ;
- une crue d'hydrogramme dit "arrondi".

Ces deux types d'hydrogrammes, comme ils sont illustrés ci-après, ne dépendent que de deux paramètres : le temps de montée t_m (exprimé en secondes) et le débit de pointe de crue entrant I .

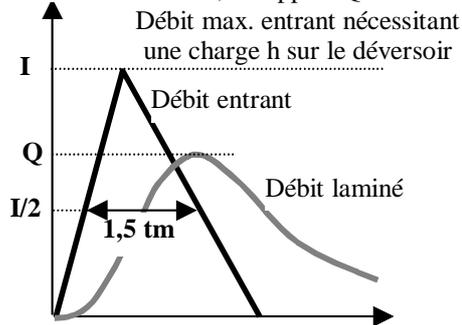
Pour la crue "arrondie", l'évolution supposée du débit entrant est : $q(t) = I t/t_m e^{-t/t_m}$.

Pour la loi de débit du déversoir, on fera l'hypothèse classique que le débit Q passant sur le déversoir est lié à la charge h sur le déversoir par une fonction $Q = k h^{2/3}$. Manifestement, il suffit de connaître la charge h qui permettrait le passage du débit I pour connaître la loi de débit.

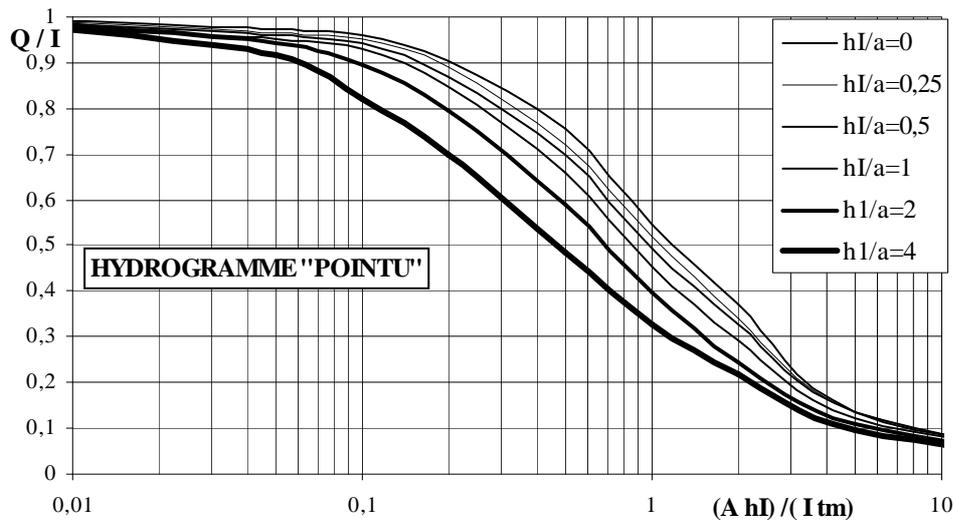
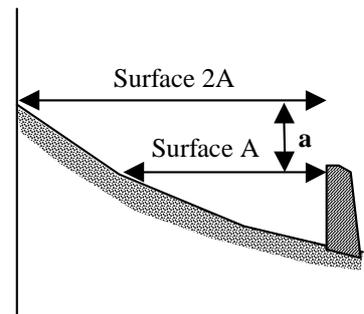
Pour la courbe de remplissage, on fera l'hypothèse simple que la surface du plan d'eau varie linéairement avec la charge h . On prendra donc deux valeurs caractéristiques : A = surface du réservoir (en m^2) lorsque le barrage est plein à ras bord ($h = 0$) ; et a = charge sur le déversoir nécessaire pour que la surface de la retenue soit de $2A$.

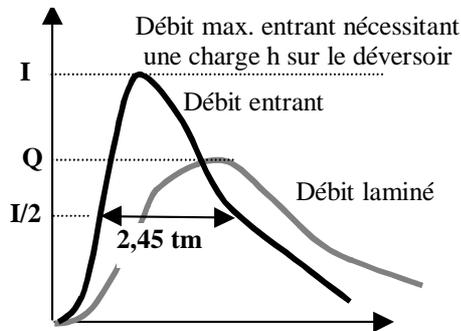
A partir de ces différents paramètres, on calcule les nombres sans dimension : $\frac{A * h_I}{I * t_m}$ et $\frac{h_I}{a}$

Les deux abaques suivants donnent, selon la forme de l'hydrogramme et les valeurs particulières de ces nombres sans dimension, le rapport Q/I du débit de pointe de crue sortante Q au débit de pointe de crue entrante I .

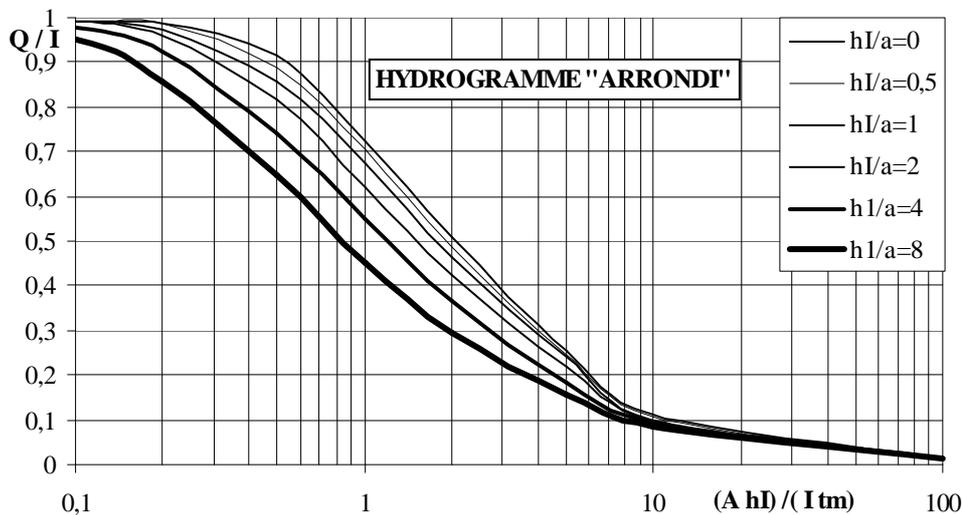
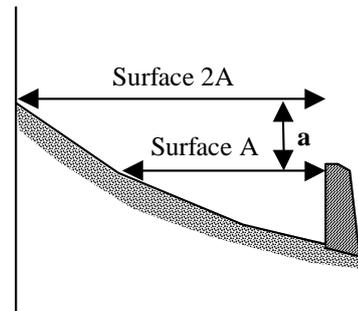


Pour estimer t_m sur un hydrogramme réel, prendre les 2/3 de la durée pendant laquelle $q > I/2$.





Pour estimer t_m sur un hydrogramme réel la durée pendant laquelle $q > I/2$ divisée par 2,45.



Comme on vient de le voir, la formule de Puls permet principalement d'étudier l'amortissement d'une crue connue *a priori*, à la traversée d'un réservoir. Son utilisation comme méthode de prévision est moins fréquente et on peut se poser à ce sujet la question suivante : peut-on "prévoir" ce qui va sortir à l'instant $t_i + 1$, alors qu'il faut connaître pour cela, outre Q_i et I_i , le débit I_{i+1} ?

Cela est paradoxalement possible car, comme vous le verrez dans l'application pratique, l'influence I_{i+1} sur Q_{i+1} est faible (le modèle garde en mémoire Q_i et I_i). Aussi peut-on faire des hypothèses sur l'évolution probable de I sans que cela ne perturbe beaucoup la prévision sur Q . (Evidemment, on rajuste à chaque pas de temps la prévision antérieure sur le débit qui est réellement arrivé).

X.7.3 - Méthode de Muskingum

Contrairement à la méthode Puls, nous envisageons à présent l'hypothèse où S ne dépend plus seulement de Q mais de Q et de I .

X.7.3.1 - Mise en équation

Comme précédemment et sur un pas de temps Δt suffisamment court, l'équation de continuité a pour expression :

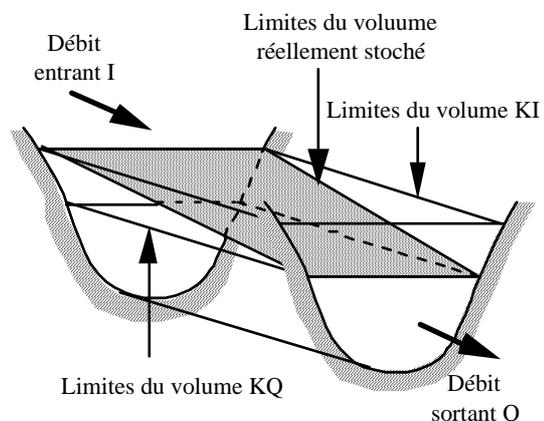
$$\left[\frac{I_1 + I_2}{2} \right] \Delta t - \left[\frac{Q_1 + Q_2}{2} \right] \Delta t = S_2 - S_1$$

Dans un premier temps, nous admettrons que K est une constante. La méthode de Puls peut encore s'expliquer si le régime est uniforme. Comme le suggère la figure ci-contre, le volume stocké, si le débit était partout Q , serait :

$$S = K Q$$

Si le débit était partout I , le volume stocké serait :

$$S = K I$$



En régime transitoire, I est différent de Q et nous admettrons que le volume stocké dans le tronçon devient :

$$S = K Q + x (K I - K Q)$$

Cette équation, appelée généralement équation de Muskingum, se met sous la forme suivante :

$$S = K [xI + (1-x)Q]$$

où x est un terme sans dimension lié à l'amortissement de la crue dans le tronçon (coefficient d'atténuation) et où K est un temps lié au temps de propagation de la crue dans le tronçon.

L'équation de continuité devient alors :

$$S_2 - S_1 = K \left[x(I_2 - I_1) + (1-x)(Q_2 - Q_1) \right] = \frac{\Delta t}{2} \left[(I_1 + I_2) - (Q_1 + Q_2) \right]$$

d'où :

$$K = \frac{\frac{\Delta t}{2} \left[(I_1 + I_2) - (Q_1 + Q_2) \right]}{x(I_2 - I_1) + (1-x)(Q_2 - Q_1)} \quad (1)$$

Explicitons Q_2 à partir de Q_1, I_1, I_2, x et k :

$$\begin{aligned} Q_2 \left[K(1-x) + \frac{\Delta t}{2} \right] &= (I_1 + I_2) \frac{\Delta t}{2} - Q_1 \frac{\Delta t}{2} - Kx(I_2 - I_1) + K(1-x)Q_1 \\ &= (I_2 - I_1) \left[\frac{\Delta t}{2} - Kx \right] + I_1 \Delta t + Q_1 \left[K(1-x) + \frac{\Delta t}{2} \right] - Q_1 \Delta t \end{aligned}$$

$$S_2 = Q_1 + \frac{\frac{\Delta t}{2} - Kx}{K(1-x) + \frac{\Delta t}{2}} (I_2 - I_1) + \frac{\Delta t}{K(1-x) + \frac{\Delta t}{2}} (I_2 - I_1)$$

$$Q_2 = Q_1 + A(I_1 - Q_1) + B(I_2 - I_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\Delta t}{K(1-x) + \frac{\Delta t}{2}} \\ B = \frac{\frac{\Delta t}{2} - Kx}{K(1-x) + \frac{\Delta t}{2}} \end{array} \right. \quad (2)$$

Sous cette forme, on constate que A et B sont des constantes ne dépendant que de $\Delta t, x$ et K .

X.7.3.2 - Mise en œuvre

X.7.3.2.1 Choix du pas de temps

Comme précédemment, Δt doit être suffisamment petit pour que l'approximation de la variation linéaire des débits est admissible. Par ailleurs, pour la stabilité des calculs, il est conseillé de s'assurer que l'on vérifie bien les inégalités suivantes :

$$2 K x < \Delta t < K$$

Si ce n'était pas le cas, il conviendrait de revoir Δt ou le découpage en tronçons.

X.7.3.2.1 Détermination de K et x dans le cas d'un tronçon unique

La pratique la plus sûre consiste à déterminer K et x par l'étude du passage d'une crue réellement observée. Le tableau suivant présente les débits enregistrés en deux stations jour par jour.

Dates	Station amont	Station aval	Dates	Station amont	Station aval
1	93	83	15	609	650
2	137	102	16	577	635
3	208	141	17	534	610
4	320	203	18	484	580
5	412	299	19	426	540
6	516	380	20	366	488
7	630	470	21	298	430
8	678	539	22	235	363
9	691	591	23	183	300
10	692	627	24	137	233
11	684	648	25	103	178
12	671	660	26	81	132
13	657	664	27	73	100
14	638	660	28	70	75

Dans ce cas particulier, on pourrait tenter de prendre $\Delta t = 1$ jour (ce qui correspond à la fréquence des observations) puis tester sur toute la crue la variation de K (formule 1) en fonction de différentes valeurs de x .

- pour $x = 0,10$, $\bar{K} = 167.500$ secondes ,

$$\sigma_K = 53\,150 \text{ secondes} , \frac{\sigma_K}{K} = 0,32$$

- pour $x = 0,15$, $\bar{K} = 169\,500$ secondes ,

$$\sigma_K = 51\,350 \text{ secondes} , \frac{\sigma_K}{K} = 0,30$$

- pour $x = 0,20$, $\bar{K} = 181\,900$ secondes ,

$$\sigma_K = 74\,750 \text{ secondes} , \frac{\sigma_K}{K} = 0,31$$

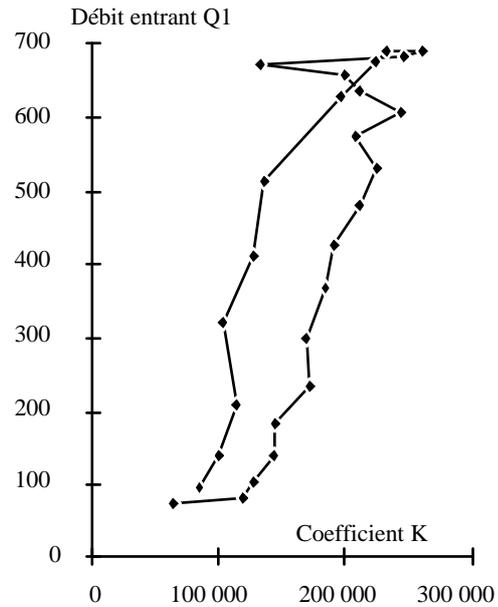
En prenant $K = Cte$, il serait préférable de retenir la valeur de 0,15 pour x et prendre un K de 168.000 secondes. Si K n'est pas constant comme c'est ici le cas, on pourra admettre que K est une fonction linéaire de Q_1 . On optimisera alors x sur le coefficient de régression de K en Q_1 ou sur la variance résiduelle de K .

On obtiendrait ici :

$$- x = 0,10 , \rho_{K Q_1} = 0,696$$

$$- x = 0,15 , \rho_{K Q_1} = 0,806$$

$$- x = 0,20 , \rho_{K Q_1} = 0,744$$



Comme précédemment, les résultats les meilleurs sont obtenus pour $x = 0,15$, mais on admettrait maintenant que K est une fonction linéaire de Q_1 :

$$K \cong 240 * Q_1 + 80.000 \quad (K \text{ en secondes, } Q_1 \text{ en m}^3/\text{s})$$

On étudierait de même $A(Q_1)$ et $B(Q_1)$.

Prise en compte des apports latéraux :

En général, la méthode de Muskingum s'applique à un cours d'eau en le divisant en plusieurs tronçons. On enchaîne alors les calculs d'un tronçon à l'autre, de l'amont vers l'aval. Tant qu'il n'y a pas d'affluents majeurs, on peut se contenter de majorer les débits à la sortie d'un tronçon au prorata des surfaces (hypothèse de débit spécifique constant). Si les apports sont bien connus, on pourra organiser le réseau hydrographique en différents tronçons ramifiés. On composera alors les hydrogrammes aux confluent.

Prévisions :

Apparemment, il n'est pas possible de faire des prévisions puisque pour calculer Q_2 , il faut connaître I_2 . Cependant, si on considère une succession de plusieurs tronçons, une hypothèse sur le I_2 à venir affecte peu l'estimation du Q_2 . Mais au tronçon suivant, ce Q_2 devient le débit d'entrée I_2 . Ainsi, le débit sortant Q_2 du deuxième tronçon est encore moins affecté par la première hypothèse, etc. En fonction du nombre de tronçons, il est donc possible raisonnablement de faire de la prévision à plusieurs pas de temps à l'avance. Bien entendu, il conviendra à chaque Δt , de réajuster les débits prévus sur ceux réellement observés.

X.7.4 - Méthode dite Hayami

Nous avons vu que la propagation d'une crue se faisait selon les équations de Saint-Venant. Dans le cas où la crue évolue très lentement (cas des rivières de plaines), ces équations se simplifient car on peut négliger les termes

d'inertie en $V = \frac{\partial V}{\partial l}$ et en $\frac{\partial V}{\partial t}$. Les équations de Saint-Venant sans les termes d'inerties, sont :

$$\begin{cases} B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial l} = 0 \quad (B : \text{largeur au miroir}) \\ \frac{\partial z}{\partial x} = -J \end{cases}$$

On les appelle alors équations de l'onde de crue diffusante. Si on élimine z de ces deux équations et que l'on exprime la perte de charge J par la formule de Chezy ($J = Q^2/C^2/S^2/RH$), on obtient une équation différentielle du second ordre en Q :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial l} - B \frac{\partial^2 Q}{\partial l^2} = 0$$

Normalement, C et B varient en fonction de z et de Q , mais si ces variations sont suffisamment lentes, on pourra considérer C et B comme des constantes et cette équation s'intègre pour donner l'équation d'Hayami :

$$Q(t) = \int_0^t I(\tau) K(t - \tau) d\tau$$

Dans cette expression, on reconnaît bien que le débit sortant d'un tronçon $Q(t)$ dépend du débit entrant $I(t)$ par un produit de convolution dont le noyau K ne dépend que de B , de C et de la longueur du tronçon L :

$$K(t) = \frac{L}{2\sqrt{\pi B}} e^{-(L - Ct)^2 / 4Bt}$$

X.7.5 - Propagation de l'onde de rupture d'un barrage - méthode simplifiée

L'intérêt de cette étude est évident car il est nécessaire de connaître les risques encourus ainsi que les mesures de sécurité qui découlent de la construction d'un barrage et, quelles que soient les précautions prises dans sa conception, qui présente un risque, certes faible, de rupture.

Prévoir ce qui se passerait en cas de rupture est très difficile pour différentes raisons :

- on ne sait pas comment se fera la rupture (instantanée, progressive, etc.) ;
- la géométrie des vallées en aval de l'ouvrage est difficile à prendre en compte ;
- la résolution des équations hydrauliques est en elle-même difficile (à l'amorce de l'écoulement, le front est très raide et les équations de Saint-Venant ne sont plus valables).

Dans la quasi-totalité des cas, il est nécessaire de passer par un modèle numérique hydraulique. De tels programmes sont disponibles mais leur mise en oeuvre est lourde. Cependant, dans des cas particuliers simples où on peut se contenter des ordres de grandeur, on pourra utiliser les résultats d'une méthode simplifiée proposée dans les années 1970 par le Ministère de l'Agriculture.

X.7.5.1 - Les hypothèses de base

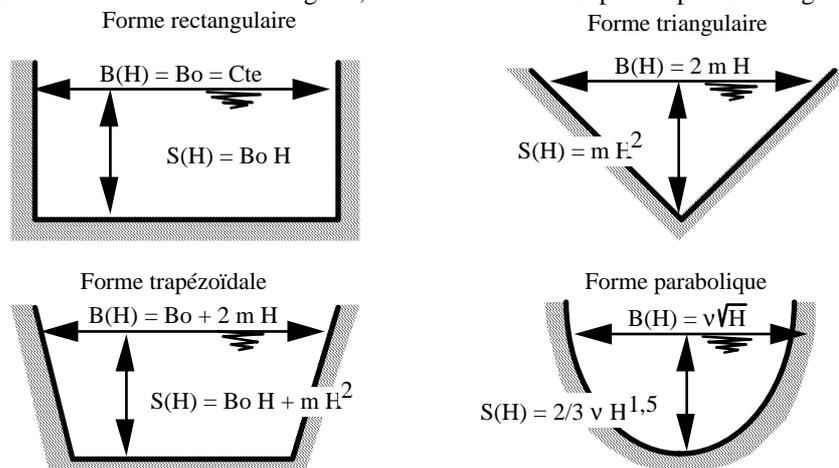
L'étude a été menée en faisant un certain nombre d'hypothèses, en particulier :

- la rupture du barrage est instantanée (condition défavorable) ;
- l'écoulement s'effectue dans une vallée au sol initialement sec ;
- le profil en travers de la vallée en aval du barrage peut être assimilé à une forme géométrique simple ; cette vallée a une pente I uniforme ;
- le débit maximum est atteint lorsque la hauteur est elle-même maximum et on peut alors supposer que l'équation du régime uniforme est réalisée : $I = J$.

A partir de ces hypothèses, des simulations sur modèle numérique ont permis de mettre en évidence des relations empiriques liant le débit (ou la hauteur) maximum atteint, et le temps d'arrivée de l'onde, aux caractéristiques géométriques et hydrodynamiques.

X.7.5.2 - Définition des paramètres utilisés

Quatre formes de section ont été envisagées ; elles se caractérisent par les paramètres géométriques suivants:



Soit H_0 la hauteur d'eau (en mm) dans le barrage avant la rupture ; on appelle Q_b le débit (m^3/s) maximum instantané au droit du barrage et au début de la rupture.

La retenue est caractérisée par sa capacité C (exprimée en millions de m^3) et par sa plus grande longueur L (exprimée en km).

La vallée en aval du barrage est caractérisée par sa forme déjà décrite mais aussi par sa pente I et par son coefficient de Strickler moyen K .

Cette estimation du coefficient K de Strickler est assez subjective. Dans la pratique, K varie grossièrement de 10 à 40. Le coefficient est fonction de la rugosité et il intègre également les méandres :

- . $K = 10$: végétation abondante et haute, méandrement à faible rayon de courbure ;
- . $K = 20$: végétation abondante ou fort méandrement ;
- . $K = 30$: végétation basse et peu de méandrement ;
- . $K = 40$: végétation faible et méandrement très progressif.

Enfin, les paramètres donnés pour les abaques seront :

- . $Q_{\max}(x)$ qui est le débit maximum (m^3/s) atteint à la distance x (km) ;
- . $H_{\max}(x)$: hauteur (m) correspondant à ce débit ;
- . $t_a(x)$: temps d'arrivée (mn) du front d'onde à l'abscisse x (km).

X.7.5.3 - Mise en oeuvre pratique

A) On choisit la forme de la section aval la plus approchante et on évalue le débit maximum Q_b (en m^3/s) :

- rectangle $Q_b = 0,93 B_o (H_o)^{3/2}$
- triangle $Q_b = 0,72 m (H_o)^{5/2}$
- parabole $Q_b = 0,54 v (H_o)^2$
- trapèze $Q_b = 0,72 m (H_o)^{5/2} + 0,93 B_o (H_o)^{3/2}$

(B_o et H_o en m ; v en $m^{1/2}$ et m sans unité)

B) On évalue un débit Q'_b (m^3/s) corrigé de l'effet de la retenue :

$$Q'_b = \mu Q_b$$

où μ est un facteur correctif tenant compte de la géométrie de la retenue :

- . $\mu = 1,2$: retenue très "compacte" ;
- . $\mu = 1,0$: retenue "normale" ;
- . $\mu = 0,8$: retenue "très allongée".

On peut également évaluer μ par la relation empirique :

$$\mu = 1 + \frac{1}{2} \log \frac{C * 1000}{S(H_o)L}$$

C : capacité de la retenue (en millions de m^3)

S : surface mouillée au droit du barrage pour la retenue pleine (en m^2)

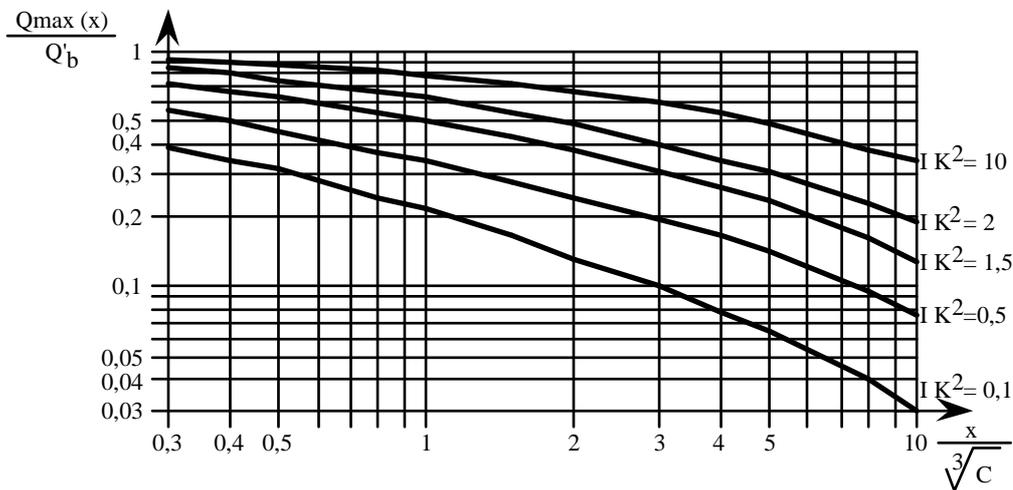
L : longueur de la retenue en km

C) On calcule un indice caractérisant les pertes de charges relatives : $I K^2$

(I : pente du thalweg, K : coefficient de Strickler moyen entre le barrage et le point d'abscisse x)

D) L'abaque ci-dessous lie les valeurs addimensionnelles $\frac{Q_{\max}(x)}{Q'_b}$, $\frac{x}{\sqrt[3]{C}}$ et $I K^2$. Donc, connaissant les deux dernières

et la valeur de Q'_b , on en tire $Q_{\max}(x)$:



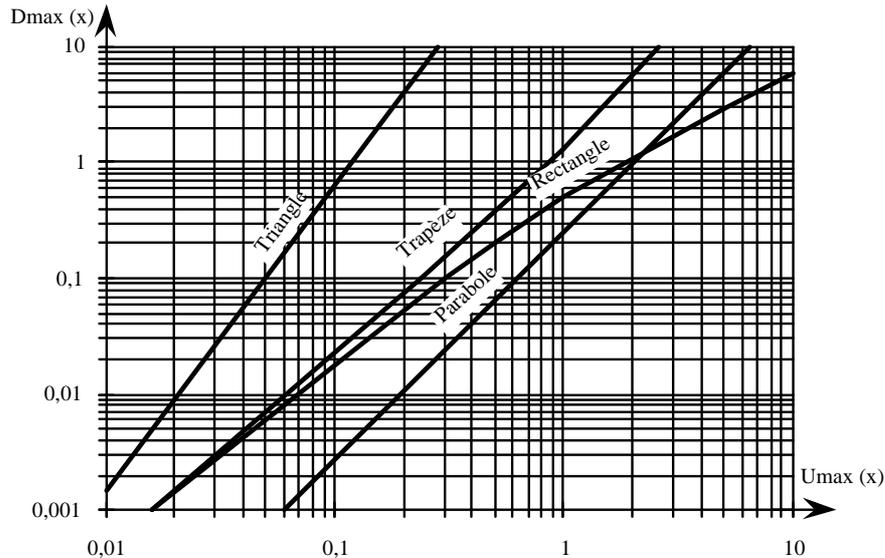
E) Passage du débit $Q_{\max}(x)$ à la hauteur $H_{\max}(x)$:

Si à la distance x du barrage on se donne la section de la vallée, on peut passer des débits aux hauteurs. Les hauteurs maximales atteintes $H_{\max}(x)$ à la distance x sont liées à une valeur $U_{\max}(x)$ dépendant elle de $D_{\max}(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \cdot \text{forme triangulaire } D_{\max}(x) &= \frac{Q_{\max}(x) (1+m^2)^{1/3}}{K \sqrt{I} m^{5/3}} \\ \cdot \text{forme trapézoïdale } D_{\max}(x) &= \frac{Q_{\max}(x)}{K \sqrt{I}} \frac{m^{5/3}}{B_0^{8/3}} \\ \cdot \text{forme rectangulaire } D_{\max}(x) &= \frac{Q_{\max}(x)}{K \sqrt{I}} \frac{1}{B_0^{8/3}} \\ \cdot \text{forme parabolique } D_{\max}(x) &= \frac{Q_{\max}(x)}{K \sqrt{I}} \frac{1}{v^{16/3}} \end{aligned} \right\} (*)$$

(*) Forme, K et I pente de la rivière au point d'abscisse x. Toutes les unités en S.I.

Ayant calculé $D_{\max}(x)$, l'abaque suivant permet de tirer $U_{\max}(x)$:



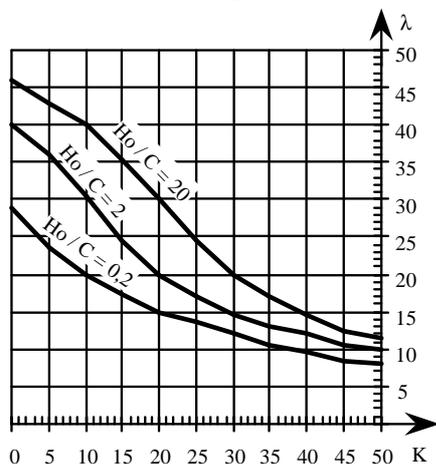
Extrapolation pour les $D_{\max}(x) < 10^{-3}$:

$$\begin{aligned} \cdot \text{triangle} & \quad U_{\max}(x) = 0,12 D_{\max}(x)^{3/8} \\ \cdot \text{trapèze et rectangle} & \quad U_{\max}(x) = D_{\max}(x)^{3/5} \\ \cdot \text{parabole} & \quad U_{\max}(x) = 1,46 D_{\max}(x)^{6/13} \end{aligned}$$

Enfin, on passe des $U_{\max}(x)$ aux $H_{\max}(x)$ par les relations :

$$\begin{aligned} \cdot \text{triangle} & \quad H_{\max}(x) = 10 U_{\max}(x) \\ \cdot \text{trapèze} & \quad H_{\max}(x) = \frac{B_0}{m} U_{\max}(x) \\ \cdot \text{rectangle} & \quad H_{\max}(x) = B_0 U_{\max}(x) \\ \cdot \text{parabole} & \quad H_{\max}(x) = v^2 U_{\max}(x) \end{aligned}$$

F) Evaluation du temps $t_a(x)$ d'arrivée du front d'onde à l'abscisse x :



L'abaque ci-contre permet d'évaluer un coefficient λ qui dépend du coefficient de Strickler K et du rapport $\frac{H_0}{C}$ (H_0 en m, C en 10^6 m^3). Soit ΔH la différence de cote entre le niveau dans le barrage avant la rupture et le niveau au sol à l'abscisse x ; le temps d'arrivée du front d'onde sera :

$$t_a(x) = \lambda \frac{x^2}{\Delta H}$$

[x en km, ΔH en m, $t_a(x)$ en mn]

X.7.5.4. - Limites de la méthode

Dans la mesure où les hypothèses que l'on a été amenées à faire ne sont pas trop éloignées de la réalité, on peut penser que les différentes estimations $Q_{\max}(x)$, $H_{\max}(x)$ et $t_a(x)$ sont entachées d'une incertitude de l'ordre de ± 30 à 40% .

Il est recommandé de n'utiliser cette méthode que pour fixer les ordres de grandeur dans les cas de vallées aux profils réguliers (pas de rétrécissement ou élargissement brusque, pas de changement de pente...). Dans tous les autres cas, on aura recours à un modèle hydraulique classique complet.

X.8- PROTECTION DES OUVRAGES - CHOIX DE LA FREQUENCE DE LA CRUE DE PROJET ET DE LA CRUE DE CHANTIER

On appelle crue de projet, la crue maximale que l'ouvrage est capable d'évacuer sans dommage grave. En général, on se fixe la fréquence (ou période de retour) de la crue du projet puis on évalue le débit de crue (ou l'hydrogramme) à l'entrée dans l'ouvrage ; enfin, on étudie l'éventuel laminage de la crue à la traversée de l'ouvrage afin de déterminer les capacités d'évacuation nécessaires au transit de la crue : c'est le débit de la crue évacué par le déversoir qui intéresse le calcul de l'évacuateur. La crue de chantier quant à elle, est celle pour laquelle on calcule les ouvrages de protection du chantier. En général, la période de retour de cette crue est beaucoup plus faible (de l'ordre de quelques années) que pour la crue de projet (de l'ordre de quelques milliers d'années).

X.8.1 - Crue de projet

Le choix de la fréquence de la crue de projet est très important ; en effet, il influe directement sur le débit à évacuer donc sur la taille de l'évacuateur. Le coût de l'évacuateur de crue représente une part non négligeable du coût total d'un barrage ; en augmentant la période de retour, on augmente donc le coût total de l'ouvrage. Par contre, l'augmentation de la période de retour de la crue de projet diminue le risque de voir arriver des dommages à l'ouvrage au cours de sa durée de vie. Le choix de la période de retour peut donc s'aborder par le biais de la comparaison du coût en regard du risque. Les risques de rupture ne sont pas négligeables et dans 30% des cas de rupture, elle a été provoquée par des crues.

X.8.1.1 - Ouvrages présentant un risque pour les populations en cas de rupture

C'est le cas des grands barrages (on range sous ce vocable les barrages de plus de 20 m de haut ou de plus de 15 millions de mètres-cube de retenue), ou des petits barrages lorsque la propagation de l'ordre de rupture risque de provoquer des pertes en vie humaine. Dans ces cas, une étude plus ou moins économique du coût de l'ouvrage par rapport au coût des dommages n'est pas philosophiquement envisageable car elle ne pourrait se faire qu'en attribuant un certain "prix" aux vies humaines. En conséquence, on adopte pour fréquence de la crue de projet, une valeur telle que les risques de rupture du fait des crues deviennent nuls ou tout au moins négligeables. En général, les périodes de retour retenues sont de l'ordre de 10.000 ans.

X.8.1.2 - Ouvrages ne menaçant pas la sécurité publique

On peut alors mettre en oeuvre un calcul économique. En effet, le prix de l'évacuateur de crue peut être considéré comme une prime d'assurance contre les dégâts provoqués par une crue. Il suffit alors d'étudier la rentabilité maximum en fonction du coût de l'ouvrage par rapport au coût des dégâts et à leur fréquence.

Cette étude économique dépend à chaque fois du cas de figure mais quelques simplifications permettent de généraliser les résultats d'une étude synthétique menée par le Centre Technique du Génie Rural des Eaux et des Forêts. Reprenons les aspects essentiels de cette étude :

- si une crue a un débit maximal Q inférieur au débit x , il se produit des dommages dont le montant est évalué à R francs. Ce coût représente le montant des dégâts subis par le barrage et les dégâts en aval de l'ouvrage. On admettra que R est indépendant de Q (dans la mesure où $Q > x$) donc de la fréquence de la crue ayant provoqué les dégâts.

Le principe est donc de minimiser la somme de deux coûts qui varient en sens inverse en fonction de la période de retour T du débit x pour lequel est dimensionné l'évacuateur :

- coût de l'ouvrage,
- espérance mathématique du coût des dommages éventuels.

Soit C le coût de l'ouvrage à l'année 0 , T la période de retour de la crue de débit x et α le taux d'actualisation ; l'investissement à l'année 0 sera C . Chaque année, la probabilité pour avoir $Q > x$ est sensiblement $1/T$. Pour la i ème

année, s'il y a rupture, le coût des dégâts sera : $\frac{R}{(1+a)^i}$ (coût actualisé à l'année 0). L'espérance mathématique du coût

des dégâts sur une durée de vie très longue (voisine de l'infini) sera : $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{T} \frac{R}{(1+a)^i} = \frac{R}{aT}$

Il suffit donc de minimiser la somme des coûts à l'année 0 par rapport à T :

$$C + \frac{R}{aT} = \text{minimum} \quad \frac{\partial(C + \frac{R}{aT})}{\partial T} = 0$$

Le coût C de l'ouvrage dépend du débit x de l'évacuateur, donc de T. Il est donc logique de décomposer le coût C en une partie D représentant le coût de la digue seule (indépendant de T) et une partie E, coût de l'évacuateur de crue en fonction de T : $C = D + E$

Appelons :

- . h la hauteur maximale de charge sur le déversoir
- . $H + h$ la hauteur totale de la digue
- . a le gradex des débits (en général, les débits sont gumbeliens surtout pour T grand, cf. méthode du gradex).

On admet alors les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la modification de x se fait en modifiant h ;
- le coût D de la digue est proportionnel à $(H + h)^2$ (donc à son volume) ;
- le coût E de l'évacuateur est proportionnel à $(H + h) \propto h$;
- les débits suivent une loi de Gumbel telle que : $Q = C^{te} + a \log T$;
- la loi de débit x du réservoir est du type : $x = C^{te} \propto h^{3/2}$.

Soit Q le débit maximum entrant dans la retenue et x le débit laminé qui en sort ; la relation entre Q et x est du

type :
$$x = \frac{Q}{1 + 1Q^{-0,44}} (1 = C^{te})$$

Soit R les dégâts causés ; ils se décomposent en un coût fixe des dégâts aval plus le prix de la reconstruction.

La validité de ces hypothèses n'est nécessaire qu'à proximité de certaines valeurs indicées ou prises pour chaque variable pour un dimensionnement de référence correspondant à la période de retour T_0 .

On a donc la relation suivante :

$$\frac{D}{D_0} = \left[\frac{H+h}{H+h_0} \right]^2 ; \frac{E}{E_0} = \left[\frac{(H+h)h}{(H+h_0)h_0} \right] ; Q = Q_0 + a \log \frac{T}{T_0}$$

$$Q^{0,44} \frac{Q}{x-1} = Q_0^{0,44} \frac{Q_0}{x_0-1} = h ; \frac{x}{x_0} = \left[\frac{h}{h_0} \right]^{3/2}$$

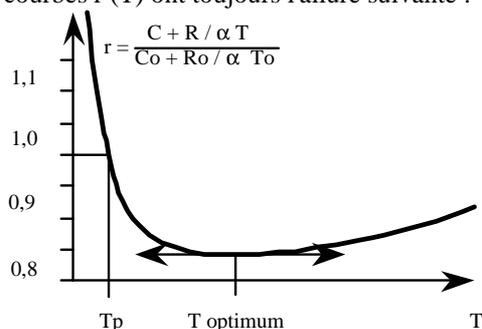
Reste à évaluer le coût total actualisé $C + \frac{R}{aT}$ en fonction de T. D et E s'exprime en fonction de h ; or, $C = D +$

E s'exprime en fonction de x, x en fonction de Q en enfin Q en fonction de T.

$$\frac{C+R}{aT}$$

On peut donc former le rapport $r = \frac{aT}{C_0 + R_0}$; celui-ci ne dépend que des valeurs initiales ($E_0, D_0, x_0, h_0, R_0, T_0$), des constantes a et H et de la période de retour T.

T sera optimum si r est minimum et ce calcul serait à faire dans chaque cas de figure. Cependant, l'expression r (T) a été calculée pour un certain nombre de barrages caractéristiques des différents cas de figures rencontrés. Les courbes r (T) ont toujours l'allure suivante :



Il s'en dégage les principes généraux suivants :

- le T optimum est toujours élevé, supérieur à 100 ans, même pour les petits ouvrages, et couramment supérieurs à 1.000 ans ;

- la branche de gauche est beaucoup plus abrupte que la branche de droite, ce qui indique que dans le cas où on s'éloigne du T optimum, le surcoût sera bien moindre en surévaluant T qu'en le sous-évaluant. Dans la mesure du possible, il est donc préférable de faire un ouvrage "trop-bien protégé" qu'un ouvrage à risque plus fort.

Afin de préciser encore l'ordre de grandeur de la période de retour optimum de la crue de projet, on peut simplifier le problème en cas de très petits ouvrages.

Dans le cas d'un petit barrage de style retenue collinaire, on peut fréquemment négliger l'amortissement de la crue à la traversée de la retenue $\left[x = Q_0 \frac{Q}{Q_0} = \left(\frac{h}{h_0} \right)^{3/2} \right]$. Dans le cas des petits cours d'eau, on constate souvent que le rapport de la crue centennale à la crue décennale, et on a pour débit Q, quelle que soit sa période de retour T :

$$\frac{Q}{Q_{100}} = 1 + 0,179 \text{ Ln} \left[\frac{T}{100} \right]$$

Supposons de plus que lorsque la crue emporte le barrage, les réparations financières consistent essentiellement à reconstruire l'ouvrage :

$$C + \frac{R}{aT} = C \left[1 + \frac{1}{aT} \right]$$

Appelons y_{100} le coût relatif de l'évacuateur de crue pour les conditions de la crue centennale :

$$E_{100} = Y_{100} C_{100}, \quad D_{100} = (1 - Y_{100}) C_{100}$$

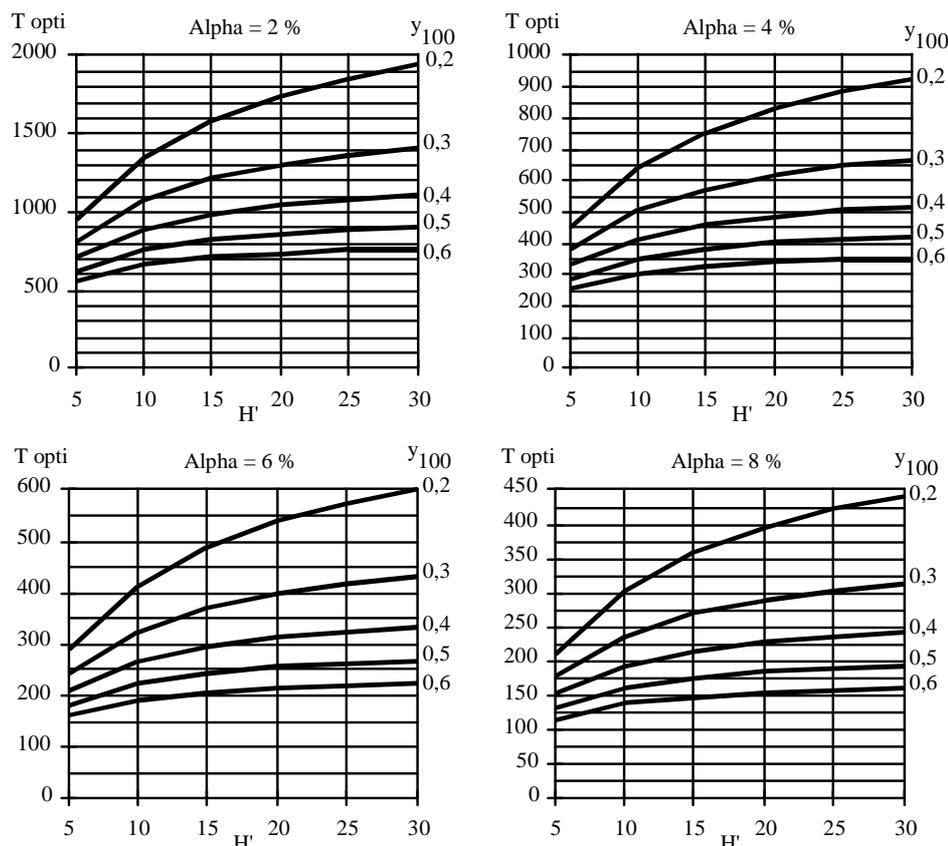
$$\frac{E}{E_{100}} = \frac{H+h}{H+h_{100}} \frac{h}{h_{100}}, \quad \frac{D}{D_{100}} = \frac{(H+h)^2}{H+h_{100}}$$

En posant $H' = \frac{H}{h_{100}}$ et $h' = \frac{h}{h_{100}}$, on obtient l'expression suivante de r :

$$r = \frac{C(1+1/aT)}{C_{100}(1+1/100 a)} = \left[Y_{100} \frac{H'+h'}{H'+1} h'+(1-Y_{100}) \frac{H'-h'}{H'+1} \right] \frac{(1+1/aT)}{(1+1/100 a)}$$

Mais dans cette expression, $h' = \frac{h}{100}$ est lié à T : $h' = \left[1 + 0,179 \text{Ln} \frac{T}{100} \right]^{2/3}$

Manifestement, la période de retour optimum T_0 qui minimise r , ne dépend que de H' , H_{100} et α . Les graphiques suivants donnent les valeurs optimales de la période de retour T en année, en fonction du taux d'actualisation α (2 %, 4 %, 6 % et 8 %), du coefficient Y_{100} (0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5 et 0,6) et de la valeur de H' (de 5 à 30).



Supposons que l'on se propose de construire une retenue dont le radier de l'évacuateur est à la cote 5 m par rapport au pied du barrage : $H = 5$ m.

On dimensionne l'évacuateur pour la crue centennale en ménageant par exemple une charge de 0,5 m sur le déversoir : $H' = \frac{H}{h_{100}} = \frac{5}{0,5} = 10$.

Dans ces conditions, on peut estimer que cet évacuateur représenterait environ 40 % du prix total de l'ouvrage : $Y_{100} = 0,4$.

En admettant que le taux d'actualisation est de 4 %, on trouve dans le graphique précédent, un T optimum de 420 ans.

X.8.2 - Crue de chantier

Pour des chantiers devant durer plusieurs années, le problème est analogue au précédent. Il n'en diffère que par le fait qu'il n'y a pas d'amortissement de la crue. Dans ce cas, il n'y a généralement pas de risque pour la sécurité des personnes et le coût des dégâts au chantier est relativement faible devant le coût des ouvrages de dérivation ; aussi prend-on généralement des périodes de retour assez faibles, de l'ordre d'une dizaine d'années.

Dans le cas de chantier de moindre durée, il est possible de limiter la période des travaux à un certain nombre de mois où les risques d'apparition de crues sont plus faibles. Le même calcul économique pourra être établi mais on n'introduira que la statistique des crues saisonnières de la période considérée.

TABLES STATISTIQUES

Loi de Student

n/P	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,365	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,373	1,812	2,228	2,764	3,163
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,483	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
100	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

La table ci-dessus donne la valeur du t de Student ayant la probabilité P d'être dépassée en valeur absolue, en fonction du nombre de degré de liberté v. Exemple: pour v=20 il y a moins de 5% de chance d'avoir $|t| > 2,528$

Pour tester l'estimation ρ d'un coefficient de corrélation totale ou de corrélation partielle, on sait que si le véritable coefficient de corrélation r inconnu est nul, alors la variable t suit une

loi de Student à $n - k - 1$, avec : $t = \rho \sqrt{\frac{n - k - 1}{1 - \rho^2}}$ et n nombre d'observations, k nombre de variables explicatives.

v/P	5%	2%	1%												
1	1,00	1,00	1,00	8	0,63	0,72	0,76	20	0,42	0,49	0,54	40	0,30	0,36	0,39
2	0,95	0,98	0,99	9	0,60	0,69	0,73	22	0,40	0,47	0,52	50	0,27	0,32	0,35
3	0,88	0,93	0,96	10	0,58	0,66	0,71	24	0,39	0,45	0,50	60	0,25	0,29	0,32
4	0,81	0,88	0,92	12	0,53	0,61	0,66	26	0,37	0,44	0,48	70	0,23	0,27	0,30
5	0,75	0,83	0,87	14	0,50	0,57	0,62	28	0,36	0,42	0,46	80	0,22	0,26	0,28
6	0,71	0,79	0,83	16	0,47	0,54	0,59	30	0,35	0,41	0,45	90	0,21	0,24	0,27
7	0,67	0,75	0,80	18	0,44	0,52	0,56	35	0,32	0,38	0,42	100	0,19	0,23	0,25

Il peut être plus simple alors d'utiliser le tableau ci-dessus qui donne directement la valeur de ρ ayant les probabilités 10%, 5% ou 1% d'être dépassées en valeur absolue alors que le véritable coefficient de corrélation serait nul.

Loi de Gauss

u	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8483	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9013
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9662	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Ce tableau donne la fréquence F au non-dépassement associée à une variable réduite de Gauss U. Dans la première colonne en gras on trouve les unités et dixième de la valeur de U et dans la première ligne les centièmes de la valeur de U. Exemple : Pour U=2.33 (ligne 2,3 et colonne 0,03) on trouve F=0,9901 ; il y a donc 99,01% de chance d'avoir U<2,33.

Pour les valeurs de U négatives, il suffit de remplacer U par U'=-U et de remplacer le F trouver par F'=1-F. Exemple : pour U=-1.28 on trouve 0.1003 (1-0.8997) ; il y a donc 10,03% de chance d'avoir U<-1.28.

Si au contraire on connaît la fréquence au non dépassement F et que l'on cherche le U correspondant il suffit de faire la démarche inverse : On fait la somme des valeurs de U correspondant à la ligne et la colonne où l'on a trouver F. Exemple : pour F=0.975 on trouve U=1,96 (ligne 1,9, colonne 0,06).

Pour les valeurs de F<0.5, on remplace F par F'=1-F et le U trouver par U'=-U. Exemple : pour F= 0.05 on trouve U=-1.645

Loi du κ^2

v/P	0,010	0,025	0,050	0,100	0,250	0,500	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3
4	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3
5	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1
6	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8
7	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5
8	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1
9	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7
10	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2
11	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7
12	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2
13	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7
14	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1
15	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6
16	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0
17	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4
18	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8
19	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2
20	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6
21	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9
22	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3
23	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6
24	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0
25	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3
26	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6
27	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0
28	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3
29	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6
30	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9
40	22,2	24,4	26,5	29,1	33,7	39,3	45,6	51,8	55,8	59,3	63,7
50	29,7	32,4	34,8	37,7	42,9	49,3	56,3	63,2	67,5	71,4	76,2
60	37,5	40,5	43,2	46,5	52,3	59,3	67,0	74,4	79,1	83,3	88,4
70	45,4	48,8	51,7	55,3	61,7	69,3	77,6	85,5	90,5	95	100
80	53,5	57,2	60,4	64,3	71,1	79,3	88,1	96,6	102	107	112
90	61,8	65,6	69,1	73,3	80,6	89,3	98,6	108	113	118	124
100	70,1	74,2	77,9	82,4	90,1	99,3	109	118	124	130	136

La table ci-dessus donne la valeur de κ^2 ayant la probabilité P d'être non-dépassée en fonction du nombre de degré de liberté v. Exemples de lecture :

v=18 et P=0,95 → $\kappa^2=28,9$ v=30 et P=0,10 → $\kappa^2=20,6$

Pour v = 18, il y a donc 80% de chance d'avoir : $20,6 < \kappa^2 < 4,3$

Lorsque v est supérieur à 30, on a sensiblement : $\kappa^2 = \frac{(u + \sqrt{2v-1})^2}{2}$ où u est la variable

réduite de Gauss correspondant à la fréquence au non-dépassement P :

(P=0,9 → u=1,2816, P=0,95 → u=1,6449, P=0,975 → u=1,96, P=0,99 → u=2,3263)

Exemple : v=61 et P=0,95 → $\kappa^2 = \frac{(1,649 + \sqrt{122-1})^2}{2} = 79,95$

Loi de Fisher Snédécov

vl/v2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	Inf.
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,1	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,552	9,277	9,117	9,013	8,941	8,845	8,745	8,638	8,526
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,041	5,912	5,774	5,628
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,818	4,678	4,527	4,365
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,147	4,000	3,841	3,669
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,726	3,575	3,410	3,230
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,438	3,284	3,115	2,928
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,230	3,073	2,900	2,707
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,072	2,913	2,737	2,538
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	2,948	2,788	2,609	2,404
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,849	2,687	2,505	2,296
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,767	2,604	2,420	2,206
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,699	2,534	2,349	2,131
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,641	2,475	2,288	2,066
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,591	2,425	2,235	2,010
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,548	2,381	2,190	1,960
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,510	2,342	2,150	1,917
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,477	2,308	2,114	1,878
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,447	2,278	2,082	1,843
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,420	2,250	2,054	1,812
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,397	2,226	2,028	1,783
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,375	2,204	2,005	1,757
24	4,260	3,403	3,009	2,776	2,621	2,508	2,355	2,183	1,984	1,733
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,337	2,165	1,964	1,711
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,321	2,148	1,946	1,691
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,305	2,132	1,930	1,672
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,291	2,118	1,915	1,654
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,278	2,104	1,901	1,638
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,266	2,092	1,887	1,622
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,180	2,003	1,793	1,509
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,097	1,917	1,700	1,389
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,016	1,834	1,608	1,254
Inf.	3,841	2,996	2,605	2,372	2,214	2,099	1,938	1,752	1,517	1,000

La table ci-dessus donne la valeur de F ayant 5% de chance d'être dépassée en fonction des nombres de degré de liberté v_1 et v_2

$$: F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\text{Plus forte var.}}{\text{Plus faible var.}}$$

(v_1 nombre de degré de liberté de la plus forte variance ; v_2 pour la plus faible).

Pour tester un coefficient de corrélation multiple R obtenu avec n observations et k variables explicatives on sait quela variable F suit une loi de Fischer Snédécov à $v_1=k$ et

$$v_2=n-h-1 \text{ degrés de liberté avec : } F = \frac{n-k-1}{k} \frac{R^2}{1-R^2} \text{ Si la valeur de F obtenue est}$$

supérieure à la valeur lue dans la table, on peut rejeter l'hypothèse selon laquelle le véritable coefficient de corrélation multiple est nul avec un risque d'erreur inférieur à 5%. On dira que le R expérimental est significativement différent de 0 au seuil de 5%.