

# Hidrologia urbana

## Conceitos básicos

Coordenação científica:  
**João Pedroso de Lima**

Autoria:

**Cristina Maria Tavares Martins**  
**Maria da Graça Temido Mendes**  
**José Manuel Abreu**  
**José Paulo Lopes de Almeida**  
**João Pedroso de Lima**  
**Isabel Pedroso de Lima**



# Hidrologia urbana

## Conceitos básicos

Coordenação científica:

**João Pedroso de Lima**

Autoria:

**Cristina Maria Tavares Martins**

**Maria da Graça Temido Mendes**

**José Manuel Abreu**

**José Paulo Lopes de Almeida**

**João Pedroso de Lima**

**Isabel Pedroso de Lima**



C



Comissão Portuguesa



Programa  
Hidroológico  
Internacional



Entidade Reguladora dos Serviços de Águas e Resíduos

# FICHA TÉCNICA

**Título:**

Hidrologia urbana – Conceitos básicos

**Coordenação científica:**

*João Pedroso de Lima* (Universidade de Coimbra)

**Autoria:**

*Cristina Maria Tavares Martins*

(Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra)

*Maria da Graça Temido Mendes*

(Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra)

*José Manuel Abreu*

(Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra)

*José Paulo Lopes de Almeida*

(Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra)

*João Pedroso de Lima*

(Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra)

*Isabel Pedroso de Lima*

(Escola Superior Agrária do Instituto Politécnico de Coimbra).

**Comissão técnica de apreciação:**

Jaime Melo Baptista, João Almeida e Edgar Carvalho

**Edição:**

Entidade Reguladora dos Serviços de Águas e Resíduos

Universidade de Coimbra

**Concepção gráfica:**

Dimensão 6, comunicação, design, publicidade, Lda.

**Revisão linguística:**

Elisabete Morita Rodrigues

**Composição e paginação:**

Cor Comum – Serviços Gráficos, Lda.

**Impressão e acabamentos:**

Cor Comum – Serviços Gráficos, Lda.

**Tiragem:**

1300 exemplares

**Local e data de edição:**

Lisboa, Junho de 2010

**ISBN:**

978-989-8360-03-8

**Depósito legal:**

314737/10

## PREFÁCIO DA ERSAR

A Entidade Reguladora dos Serviços de Águas e Resíduos, enquanto entidade reguladora, é responsável pela sensibilização e orientação das entidades gestoras dos serviços de abastecimento público de água, saneamento de águas residuais urbanas e gestão de resíduos urbanos. Nesse quadro, tem seguido uma estratégia de permanente apoio às entidades gestoras na procura de uma melhor qualidade do serviço prestado aos consumidores, sendo de destacar as diversas publicações já editadas, nomeadamente as séries “Guias Técnicos” e “Recomendações”.

Identificou-se agora a necessidade de complementar a actual linha editorial com uma nova série de publicações, destinada a apoiar a formação dos actuais e futuros quadros técnicos das entidades gestoras em temáticas relacionadas com a concepção, a gestão e a exploração dos sistemas de águas e resíduos, que se designou “Cursos técnicos”.

Este primeiro número, elaborado pela Universidade de Coimbra, aborda os conceitos básicos da hidrologia urbana e integra um conjunto de quatro módulos, que visam fornecer competências nas áreas da hidrologia urbana e da drenagem pluvial urbana, nomeadamente: conceitos básicos; águas pluviais em ambiente urbano; sistemas sustentáveis de drenagem urbana; gestão e reabilitação de sistemas de drenagem pluvial urbana.

A pertinência desta publicação é reforçada pela urgência de um elevado investimento ao nível das novas redes de recolha e drenagem de águas residuais urbanas e da renovação das existentes, reconhecida no Plano Estratégico de Abastecimento de Águas e Saneamento de Águas Residuais 2007-2013 (PEAASAR II). As necessidades do País nesta área exigem um esforço significativo nos próximos anos para cumprir o objectivo de fornecer a pelo menos noventa por cento da população nacional um serviço de drenagem e tratamento de águas residuais urbanas com adequada qualidade e a necessária acessibilidade económica.

A ERSAR procura assim dar mais um contributo para a melhoria da qualidade dos serviços de águas, como forma de promover a sustentabilidade das entidades gestoras e defender os interesses dos utilizadores destes serviços públicos essenciais.

Jaime Melo Baptista (Presidente do Conselho Directivo da ERSAR)  
Fernanda Maças (Vogal do Conselho Directivo da ERSAR)  
João Simão Pires (Vogal do Conselho Directivo da ERSAR)



## PREFÁCIO DA COORDENAÇÃO CIENTÍFICA

O presente Guia é o primeiro de uma série dedicada à Hidrologia Urbana, intitula-se “Hidrologia urbana – Conceitos básicos” (Cursos técnicos da Entidade Reguladora dos Serviços de Águas e Resíduos – ERSAR), e tem por objectivo apresentar, de forma resumida, conceitos básicos de hidrologia urbana. Estes conceitos servem de base às matérias versadas nos restantes volumes desta série da ERSAR, em que serão abordados os seguintes temas: águas pluviais em ambiente urbano; sistemas sustentáveis de drenagem urbana; gestão e reabilitação de sistemas de drenagem pluvial urbana.

Faz sentido uma breve resenha do processo que conduziu ao aparecimento desta obra, fruto de uma solicitação do então Presidente da empresa Águas de Coimbra, E. M., Prof. Jorge Temido, ao Laboratório de Hidráulica, Recursos Hídricos e Ambiente do Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra: a criação de um programa de formação pós-graduada em Hidrologia Urbana, por módulos, para ser leccionado aos seus técnicos, que fosse ao encontro das necessidades actuais daquela empresa. Pretendia-se uma formação avançada de cariz prático, que melhorasse o desempenho dos técnicos nesta área do conhecimento.

Contactos posteriores sugeriram que esta necessidade de formação avançada não se restringia à empresa Águas de Coimbra, E. M., sendo também sentida por várias congéneres igualmente incumbidas de gerir as águas pluviais nas áreas urbanas da sua responsabilidade. Acredita-se, assim, que esta formação irá interessar a outras empresas com competências na drenagem pluvial urbana.

Infelizmente, a drenagem de águas pluviais em ambiente urbano não foi uma prioridade durante décadas, o que de certo modo até é compreensível dado o baixo grau de atendimento público que se verificava em Portugal nas áreas do abastecimento de água, drenagem de águas residuais domésticas e resíduos sólidos urbanos. Hoje, essa situação alterou-se de forma radical, e o nosso país apresenta níveis de atendimento bastante satisfatório, com elevado grau de fiabilidade de serviço.

O primeiro módulo do programa de formação pós-graduada em Hidrologia Urbana (Módulo I – Conceitos Básicos) foi leccionado em Coimbra durante os meses de Maio e Junho de 2008 (16 horas de

formação em sala de aula), tendo sido frequentado maioritariamente por técnicos da empresa Águas de Coimbra, E.M. Atendendo aos comentários feitos pelos alunos, aproveitou-se esta oportunidade para melhorar os textos de apoio ao curso, evoluiu-se assim para a versão incluída neste Guia. Importa também referir as várias sugestões avançadas pelos técnicos da ERSAR e pelos seis revisores que muito ajudaram a melhorar os textos.

O texto, eminentemente de carácter didáctico, tenta sistematizar e sintetizar, num único volume, conceitos considerados fundamentais para a hidrologia urbana que, por norma, não se encontram juntos com este grau de profundidade e de preocupação com a ilustração prática. Noções de estatística, cálculo numérico, hidráulica e hidrologia são apresentadas ao longo de quatro capítulos, que incluem exemplos e exercícios resolvidos ilustrativos dos conceitos apresentados, ao mesmo tempo que traduzem a experiência de anos de docência dos autores nos temas em análise. Penso que o conteúdo deste guia proporcionará uma sólida fundação para o conhecimento da hidrologia urbana, tanto para técnicos como para outros interessados nestas matérias.

Para mim, foi um privilégio trabalhar com os autores dos vários capítulos, tanto na preparação deste Guia como na leccionação do programa de formação pós-graduada em Hidrologia Urbana (Módulo I – Conceitos Básicos).

João L. M. Pedroso de Lima (Universidade de Coimbra)

# ÍNDICE GERAL

	pág.
1 INTRODUÇÃO .....	1
2 MÉTODOS ESTATÍSTICOS .....	5
3 CÁLCULO NUMÉRICO .....	43
4 HIDRÁULICA .....	107
5 CONCEITOS BÁSICOS DE HIDROLOGIA .....	143
BIBLIOGRAFIA .....	177
SOBRE OS AUTORES .....	181



# ÍNDICES DETALHADOS

## ÍNDICE DE TEXTO

	pág.
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Conteúdo do guia.....	3
2. MÉTODOS ESTATÍSTICOS.....	5
2.1 Nota introdutória.....	5
2.2 Conceitos básicos.....	6
2.2.1 Probabilidade.....	6
2.2.2 Variáveis aleatórias e distribuições de probabilidade.....	9
2.2.3 Valor médio, desvio-padrão e quantis.....	12
2.3 Lei normal ou de Gauss.....	16
2.3.1 Definição e propriedades.....	16
2.3.2 Validação de uma lei de Gauss.....	20
2.3.3 Lei da soma de variáveis aleatórias independentes.....	24
2.4 Leis de valores extremos.....	25
2.4.1 Elementos da teoria de extremos.....	25
2.4.2 Leis de máximos.....	27
2.4.3 Leis de mínimos.....	34
2.5 Exercícios.....	36
3. CÁLCULO NUMÉRICO.....	43
3.1 Nota introdutória.....	43
3.2 Erros na resolução numérica de problemas de Engenharia.....	44
3.2.1 Fonte e tipo de erros.....	44
3.2.2 Erros de arredondamento e aritmética computacional.....	45
3.2.2.1 Aritmética de ponto fixo (inteiros).....	46
3.2.2.2 Aritmética de ponto flutuante (reais).....	47
3.2.2.3 Erros na aritmética de ponto flutuante.....	49
3.2.2.4 Propagação de erros. Erros nas operações aritméticas.....	51
3.2.3 Erros de truncatura.....	55
3.2.3.1 Série de Taylor.....	55
3.2.3.2 Discretização.....	57
3.2.3.3 Métodos iterativos.....	58
3.3 Resolução de equações não lineares.....	60
3.3.1 Método da bissecção.....	62
3.3.2 Método do ponto fixo.....	64
3.3.3 Método de Newton-Raphson.....	68
3.3.4 Método da secante.....	71

3.4	Aproximação de funções .....	72
3.4.1	Interpolação polinomial .....	72
3.4.1.1	Fórmula interpoladora de Lagrange .....	73
3.4.1.2	Fórmula interpoladora de Newton .....	75
3.4.1.3	Erro da interpolação .....	78
3.4.2	Aproximação. Método dos mínimos quadrados .....	79
3.4.2.1	O critério dos mínimos quadrados .....	81
3.4.2.2	Regressão linear .....	82
3.4.2.3	Modelo geral de dois parâmetros .....	84
3.4.2.4	Linearização .....	87
3.5	Diferenciação e integração numéricas .....	89
3.5.1	Aproximação de derivadas por diferenças finitas .....	89
3.5.2	Integração numérica .....	93
3.5.2.1	Fórmulas de integração .....	94
3.5.2.2	Fórmulas de Newton-Cotes .....	96
3.6	Exercícios .....	103
4.	HIDRÁULICA .....	107
4.1	Nota introdutória .....	107
4.2	Conceitos básicos de hidráulica .....	107
4.3	Escoamentos com superfície livre .....	113
4.3.1	Definições e noções elementares .....	113
4.3.2	A energia específica .....	118
4.3.3	Os regimes lento, crítico e rápido .....	120
4.4	Dimensionamento de canais .....	125
4.4.1	Regime permanente/Análise na secção transversal .....	125
4.4.2	Regime permanente e uniforme/Análise incorporando a inclinação longitudinal e a natureza parietal do canal .....	129
4.5	Considerações finais .....	138
4.6	Exercícios .....	138
5.	CONCEITOS BÁSICOS DE HIDROLOGIA .....	143
5.1	Nota introdutória .....	143
5.2	Balanço hidrológico .....	145
5.3	Bacia de drenagem urbana .....	148
5.3.1	Conceito e delimitação .....	148
5.3.2	Características fisiográficas .....	152
5.3.3	Coefficiente de escoamento .....	160
5.3.4	Tempo de concentração .....	163
5.4	Considerações finais .....	169
5.5	Exercícios .....	169
	BIBLIOGRAFIA .....	177
	SOBRE OS AUTORES .....	181

# ÍNDICE DE FIGURAS

	pág.
<b>Figura 2.1:</b> Representação gráfica da probabilidade $P(a \leq X \leq b)$ , com $X$ contínua de densidade $f$ .....	12
<b>Figura 2.2:</b> Esboço do gráfico da densidade de uma lei $N(m, \sigma)$ .....	17
<b>Figura 2.3:</b> Função de distribuição da lei $N(0, 1)$ .....	18
<b>Figura 2.4:</b> Histograma correspondente à amostra de precipitações totais anuais registada no Quadro 2.2 .....	21
<b>Figura 2.5:</b> Papel de probabilidade normal correspondente à amostra de precipitações totais anuais registada no Quadro 2.2 .....	22
<b>Figura 2.6:</b> Resultado do teste de Kolmogorov-Smirnov referente à amostra de precipitações totais anuais registada no Quadro 2.2 .....	23
<b>Figura 2.7:</b> Esboço dos gráficos das funções densidade das leis de Gumbel ( $\lambda = 0, \delta = 1$ ), Fréchet ( $\lambda = -3, \delta = 1, \alpha = 2$ ) e Weibull ( $\lambda = 3, \delta = 1, \alpha = 2$ ) .....	28
<b>Figura 2.8:</b> Possíveis configurações das curvas a ajustar a um papel de probabilidade de Gumbel .....	28
<b>Figura 2.9:</b> Papel de probabilidade de Gumbel relativo à amostra de caudais máximos anuais do Exemplo 2.4 .....	29
<b>Figura 2.10:</b> Papel de probabilidade de Gumbel relativo à amostra de máximos da altura significativa da onda do Exemplo 2.7 .....	33
<b>Figura 2.11:</b> Papel de probabilidade de Gumbel relativo à amostra de caudais máximos anuais instantâneos do Exercício 2.1 .....	38
<b>Figura 2.12:</b> Papel de probabilidade de Gumbel relativo à amostra de precipitações máximas anuais do Exercício 2.3 .....	41
<b>Figura 3.1:</b> Tipos de erros nas diferentes fases de resolução de um problema de Engenharia .....	44
<b>Figura 3.2:</b> Inteiros representáveis numa palavra de 32 <i>bits</i> .....	47
<b>Figura 3.3:</b> Reais positivos que fazem parte do sistema $F(2, 3, -1, 2)$ .....	49
<b>Figura 3.4:</b> Gráficos da função $f(x) = \cos x$ e das aproximações obtidas por (3.19) para $k=1, 2$ e $3$ .....	57
<b>Figura 3.5:</b> Determinação aproximada do perímetro de um círculo: (a) discretização efectuada; (b) convergência para o valor exacto quando $n$ aumenta .....	58
<b>Figura 3.6:</b> Implementação de um algoritmo iterativo .....	61
<b>Figura 3.7:</b> Método da bissecção .....	63

<b>Figura 3.8:</b> Método do ponto fixo: (a) convergente; (b) divergente.....	65
<b>Figura 3.9:</b> Ilustração gráfica da convergência do método do ponto fixo.....	68
<b>Figura 3.10:</b> Ilustração gráfica do método de Newton-Raphson.....	69
<b>Figura 3.11:</b> Ilustração gráfica do método da secante.....	71
<b>Figura 3.12:</b> Ilustração gráfica das oscilações experimentadas por um polinómio $p_s(x)$ ao interpolar a função de Runge.....	79
<b>Figura 3.13:</b> Curva de tendência de um conjunto de pontos.....	80
<b>Figura 3.14:</b> Definição do critério de ajuste para o caso de uma recta. (a) Critério de minimizar a soma dos desvios; (b) Critério de minimizar a soma dos módulos dos desvios.....	81
<b>Figura 3.15:</b> Regressão linear do escoamento e precipitação anuais.....	84
<b>Figura 3.16:</b> Ajuste dos valores de um ensaio de infiltração.....	88
<b>Figura 3.17:</b> Ilustração gráfica da aproximação da primeira derivada.....	90
<b>Figura 3.18:</b> Ilustração da estratégia usada na integração numérica.....	94
<b>Figura 3.19:</b> Interpretação geométrica das regras: (a) rectângulo à esquerda; (b) ponto médio.....	97
<b>Figura 3.20:</b> Interpretação geométrica da regra do trapézio.....	98
<b>Figura 3.21:</b> Aproximação de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ através da regra do trapézio.....	98
<b>Figura 3.22:</b> Interpretação geométrica da regra de Simpson.....	99
<b>Figura 3.23:</b> Ilustração da aplicação da regra do trapézio composta.....	102
<b>Figura 3.24:</b> Ilustração gráfica da regra de Simpson composta ( $n = 6$ ).....	102
<b>Figura 3.25:</b> Exemplo de área de uma linha poligonal fechada.....	106
<b>Figura 4.1:</b> Exemplo de secção transversal <i>composta e mista</i> .....	114
<b>Figura 4.2:</b> Esquema do perfil longitudinal de um canal.....	115
<b>Figura 4.3:</b> Geometria da secção transversal de um canal.....	116
<b>Figura 4.4:</b> Referencial adoptado na análise do efeito da curvatura do fundo na distribuição de pressões.....	117
<b>Figura 4.5:</b> Visualização dos termos das Equações (4.25) e (4.26).....	119
<b>Figura 4.6:</b> $E = E(h)$ , com $Q = C^{nc}$ e $B_{iii} > B_{ii} > B_i$ .....	121
<b>Figura 4.7:</b> $E = E(h)$ , com $B = C^{nc}$ e $Q_{iii} > Q_{ii} > Q_i$ .....	121
<b>Figura 4.8:</b> Comporta controlando em simultâneo um escoamento lento por jusante e um escoamento rápido por montante.....	125

<b>Figura 4.9:</b> Equilíbrio entre forças de atrito e forças de gravidade.....	130
<b>Figura 4.10:</b> Secção trapezoidal hidraulicamente mais eficiente.....	136
<b>Figura 4.11:</b> Secção circular hidraulicamente mais eficiente.....	137
<b>Figura 4.12:</b> Secção composta da vala de drenagem.....	139
<b>Figura 5.1:</b> Variabilidade espacial das características fisiográficas e hidrológicas das bacias urbanas.....	144
<b>Figura 5.2:</b> Sequência de fases de um projecto de drenagem urbana.....	145
<b>Figura 5.3:</b> Idealização do balanço hidrológico.....	146
<b>Figura 5.4:</b> Componentes do balanço hidrológico a considerar no estudo de uma bacia de retenção urbana.....	148
<b>Figura 5.5:</b> Definição da linha divisória topográfica de uma bacia de drenagem numa carta topográfica (adaptado de Gribbin, 2002).....	149
<b>Figura 5.6:</b> Linha divisória topográfica e linha divisória freática (corte transversal em três bacias adjacentes).....	150
<b>Figura 5.7:</b> Delimitação de bacias de drenagem através da linha divisória topográfica: bacia exorreica (à esquerda) e bacia endorreica (à direita).....	151
<b>Figura 5.8:</b> À esquerda: tipos de escoamento numa bacia de drenagem; à direita: componentes básicas do escoamento numa dada secção de uma linha de água.....	151
<b>Figura 5.9:</b> Caminhos preferenciais da água na zona não saturada do solo dando lugar a ressurgências.....	151
<b>Figura 5.10:</b> Influência da forma da bacia de drenagem (alongada, arredondada e mista) na forma dos hidrogramas de uma bacia urbana (adaptado de Singh, 1992).....	153
<b>Figura 5.11:</b> Influência da forma da bacia de drenagem na resposta hidrológica de uma dada bacia.....	153
<b>Figura 5.12:</b> Influência do sistema de drenagem na resposta hidrológica das bacias de drenagem.....	154
<b>Figura 5.13:</b> Hidrogramas de secções transversais de cursos de água: perene (à esquerda), intermitente (ao centro), e efémero (à direita)....	155
<b>Figura 5.14:</b> Curvas de duração de caudais para linhas de água efémeras, intermitentes e perenes.....	155
<b>Figura 5.15:</b> Bacias de drenagem de igual área e com idêntico comprimento total das linhas de água, mas com eficiências de drenagem diferentes, apesar da densidade de drenagem ser a mesma.....	156
<b>Figura 5.16:</b> Distinção entre o comprimento axial de uma bacia de drenagem e o comprimento da linha de água principal.....	157

<b>Figura 5.17:</b> As curvas hipsométricas representam o relevo das bacias de drenagem: <b>A</b> – bacia de drenagem de um vale aluvionar e <b>B</b> – bacia de drenagem de meseta.....	158
<b>Figura 5.18:</b> Possíveis interacções entre linhas de água e a toalha freática, a tracejado (adaptado de Singh, 1992.....)	159
<b>Figura 5.19:</b> Ilustração de como o aumento da actividade biológica no solo e a profundidade da zona radicular das plantas diminuem o caudal de ponta, aumentam a resposta hidrológica da bacia e diminuem o volume total escoado (adaptado de Macleod <i>et al.</i> , 2007).....	160
<b>Figura 5.20:</b> Valores médios da velocidade do escoamento superficial em função do declive do terreno e da ocupação do solo (adaptado de Kent, 1972).....	168
<b>Figura 5.21:</b> Componentes do ciclo hidrológico a considerar no estudo de uma bacia hidrográfica .....	170
<b>Figura 5.22:</b> Carta hipsométrica de uma bacia urbana, em Coimbra.....	172
<b>Figura 5.23:</b> Rectângulo equivalente da bacia urbana da Figura 5.22 (Exercício 5.2).....	173
<b>Figura 5.24:</b> Curva hipsométrica da bacia urbana da Figura 5.22 (Exercício 5.2).....	173
<b>Figura 5.25:</b> Distribuição de frequências altimétricas da bacia urbana da Figura 5.22 (Exercício 5.2).....	173
<b>Figura 5.26:</b> Caracterização das condições de escoamento da água superficial numa bacia urbana para determinação do tempo de concentração da bacia, $t_c$ .....	174

## ÍNDICE DE QUADROS

	pág.
<b>Quadro 2.1:</b> Valores da função de distribuição da lei $N(0, 1)$ .....	19
<b>Quadro 2.2:</b> Precipitações totais anuais (mm) .....	21
<b>Quadro 2.3:</b> Caudais máximos anuais (l/s) .....	29
<b>Quadro 2.4:</b> Altura significativa da onda máxima anua .....	33
<b>Quadro 2.5:</b> Caudais médios e caudais máximos anuais .....	37
<b>Quadro 2.6:</b> Precipitações totais anuais (mm) em dois postos udométricos .....	39
<b>Quadro 2.7:</b> Precipitações máximas anuais .....	40
<b>Quadro 3.1:</b> Resultados do processo iterativo (método da bissecção) .....	64
<b>Quadro 3.2:</b> Resultados do processo iterativo para a raiz $\alpha_1 = -2$ .....	67
<b>Quadro 3.3:</b> Resultados do processo iterativo para a raiz $\alpha_2 = -1$ .....	67
<b>Quadro 3.4:</b> Diferenças finitas divididas (notação e definição) .....	76
<b>Quadro 3.5:</b> Tabela de diferenças divididas .....	77
<b>Quadro 3.6:</b> Exemplo de regressão linear .....	84
<b>Quadro 3.7:</b> Exemplos de linearização de alguns modelos não lineares .....	89
<b>Quadro 3.8:</b> Constantes das fórmulas fechadas de Newton-Cotes .....	101
<b>Quadro 3.9:</b> Resultados do processo iterativo do ponto fixo .....	103
<b>Quadro 3.10:</b> Resultados do processo iterativo (método de Newton) .....	104
<b>Quadro 4.1:</b> Características geométricas das secções transversais .....	116
<b>Quadro 4.2:</b> Valores do coeficiente de Manning apresentados em Hamill (1995) .....	132
<b>Quadro 5.1:</b> Tipos de cursos de água quanto à constância do escoamento .....	155
<b>Quadro 5.2:</b> Exemplos de características fisiográficas de bacias de drenagem, e a forma como afectam o coeficiente de escoamento superficial, $C$ .....	162
<b>Quadro 5.3:</b> Valores do coeficiente de escoamento $C$ usados em superfícies específicas .....	162
<b>Quadro 5.4:</b> Valores do coeficiente de escoamento $C$ usados em zonas urbanas e periurbanas .....	163
<b>Quadro 5.5:</b> Factor de correcção $C_f$ do coeficiente de escoamento superficial $C$ para vários períodos de retorno adoptados no dimensionamento de obras .....	163

<b>Quadro 5.6:</b> Tempos de concentração em zonas urbanas, em minutos, em função do grau de impermeabilização e declive das superfícies .....	169
<b>Quadro 5.7:</b> Características geométricas da bacia urbana da Figura 5.22 .....	171
<b>Quadro 5.8:</b> Áreas correspondentes a vários escalões de altitude da bacia urbana da Figura 5.22 .....	172

## ÍNDICE DE EXEMPLOS

	pág.
<b>Exemplo 2.1:</b> Histograma de precipitações totais anuais .....	21
<b>Exemplo 2.2:</b> Papel de probabilidade norma .....	22
<b>Exemplo 2.3:</b> Resultado do teste de Kolmogorov-Smirnov .....	23
<b>Exemplo 2.4:</b> Aplicação da lei de Gumbel a caudais máximos – papel de probabilidade .....	29
<b>Exemplo 2.5:</b> Aplicação da lei de Gumbel a caudais máximos – teste de Gumbel .....	30
<b>Exemplo 2.6:</b> Aplicação da lei de Gumbel a caudais máximos – quantil elevado e período de retorno .....	32
<b>Exemplo 2.7:</b> Aplicação da lei de Weibull ao máximo da altura significativa da onda .....	33
<b>Exemplo 3.1:</b> Representação de números inteiros .....	46
<b>Exemplo 3.2:</b> Representação de números reais .....	48
<b>Exemplo 3.3:</b> Erro absoluto .....	49
<b>Exemplo 3.4:</b> Erro na soma de números de diferente grandeza .....	53
<b>Exemplo 3.5:</b> Cancelamento subtrativo .....	54
<b>Exemplo 3.6:</b> Problema mal condicionado .....	54
<b>Exemplo 3.7:</b> Aproximação de uma função .....	56
<b>Exemplo 3.8:</b> Exemplo simples do conceito de discretização .....	58
<b>Exemplo 3.9:</b> Método da bissecção .....	63
<b>Exemplo 3.10:</b> Funções de iteração do método do ponto fixo .....	66
<b>Exemplo 3.11:</b> Convergência/divergência do método do ponto fixo .....	66
<b>Exemplo 3.12:</b> Polinómio interpolador de Lagrange .....	74
<b>Exemplo 3.13:</b> Polinómio interpolador de Newton .....	78
<b>Exemplo 3.14:</b> Regressão linear .....	83
<b>Exemplo 3.15:</b> Modelo linear de dois parâmetros .....	86
<b>Exemplo 3.16:</b> Modelo não linear .....	86
<b>Exemplo 3.17:</b> Linearização de um modelo não linear .....	87
<b>Exemplo 3.18:</b> Aproximação numérica de uma derivada .....	91

<b>Exemplo 3.19:</b> Regra do trapézio .....	98
<b>Exemplo 3.20:</b> Regra de Simpson .....	100
<b>Exemplo 4.1:</b> Comparação das características dos regimes lento, crítico e rápido em dois dispositivos de drenagem urbana: um canal de secção rectangular e um colector circular .....	125
<b>Exemplo 4.2:</b> Comparação das características do escoamento num canal de drenagem urbana em betão, considerando crescentes inclinações longitudinais .....	132
<b>Exemplo 4.3:</b> Determinação da altura molhada num escoamento permanente e uniforme, conhecidas as características físicas do canal e o caudal a escoar .....	134
<b>Exemplo 5.1:</b> Balanço hidrológico numa bacia de retenção urbana .....	147

## ÍNDICE DE EXERCÍCIOS

	pág.
<b>Exercício 2.1:</b> Aplicação da lei normal e da lei de Gumbel a caudais médios e máximos.....	36
<b>Exercício 2.2:</b> Aplicação da lei normal a precipitações totais anuais.....	38
<b>Exercício 2.3:</b> Aplicação da lei de Gumbel a precipitações máximas anuais.....	40
<b>Exercício 3.1:</b> Método do ponto fixo aplicado ao cálculo da altura uniforme.....	103
<b>Exercício 3.2:</b> Método de Newton-Raphson aplicado ao cálculo da altura uniforme.....	104
<b>Exercício 3.3:</b> Regra do trapézio composta.....	104
<b>Exercício 4.1:</b> Cálculo do coeficiente de energia na secção transversal <i>composta</i> de um canal que atravessa uma zona urbana.....	138
<b>Exercício 4.2:</b> Cálculo da capacidade de transporte da secção transversal <i>composta</i> de uma vala de drenagem de uma zona verde urbana.....	139
<b>Exercício 4.3:</b> Determinação das dimensões da secção transversal rectangular hidraulicamente mais eficiente de uma vala de drenagem.....	140
<b>Exercício 5.1:</b> Balanço hidrológico numa bacia urbana.....	169
<b>Exercício 5.2:</b> Determinação das características do relevo de uma bacia de drenagem urbana.....	171
<b>Exercício 5.3:</b> Determinação do tempo de concentração de uma bacia de drenagem urbana.....	174



# 1 INTRODUÇÃO

*João L. M. Pedroso de Lima*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra.

<sup>2</sup> Instituto do Mar – Centro do Mar e Ambiente.

A água tem-se projectado no cenário mundial como tema central na agenda política dos países de todos os continentes, face aos desafios relacionados com a sua escassez e a ocorrência de eventos extremos, tais como secas e inundações.

A cheia urbana é tão antiga como o aglomerado urbano. Ocorre quando águas dos cursos de água ou dos sistemas de drenagem de águas pluviais transvazam das suas secções de escoamento e ocupam áreas urbanas (e. g., arruamentos, passeios, habitações, zonas comerciais, áreas industriais). A perigosidade da cheia depende das características fisiográficas e climáticas da bacia hidrográfica, mas é igualmente condicionada por factores antropogénicos, como a ocupação do solo da bacia e o grau de ocupação das áreas inundáveis por equipamentos urbanos.

Nas últimas décadas, têm ocorrido precipitações intensas que se traduziram em inundações severas um pouco por todo o lado. As análises de modelos de alterações climáticas projectam um aumento na frequência e intensidade destes eventos, trazendo transtornos e prejuízos às populações. As modificações previstas da precipitação terão impactos no ciclo urbano da água (e. g., quantidade de água interceptada, precipitada, infiltrada, escoada), sendo necessário incorporá-las no planeamento e gestão da água nas áreas urbanas, especialmente no que diz respeito à concepção e gestão de sistemas de drenagem. Contudo, as incertezas sobre o impacto dessas mudanças da precipitação vão continuar ainda durante muito tempo.

Assim, torna-se imperioso um conhecimento profundo do comportamento das águas superficiais nas áreas urbanas e da interacção destas com os sistemas de drenagem. As cheias podem ocorrer em bacias urbanizadas de quaisquer dimensões (e. g., bacias de 1 a 100 km<sup>2</sup>).

Nos últimos dois séculos, o crescimento das cidades tem modificado drasticamente a paisagem nos arredores destes centros urbanos, sendo evidente a interferência da urbanização nos processos envolvidos no ciclo hidrológico. A evolução observada na migração de populações para os centros urbanos é uma realidade que se manterá no futuro e, à luz do

que se passa hoje, cada vez mais a maioria da população viverá nos grandes centros urbanos e cada vez menos nas zonas rurais.

A alteração das condições naturais, resultante da remoção da vegetação a favor da construção urbana, diminui o potencial de infiltração do solo e, conseqüentemente, a recarga dos aquíferos subterrâneos, ao mesmo tempo que aumenta o escoamento superficial. Superfícies impermeáveis, tais como telhados, ruas e estacionamentos pavimentados, apresentam uma rugosidade hidráulica menor, aumentando a velocidade com que se processa o escoamento superficial e os transportes associados (e. g., arrastamento de poluentes, erosão hídrica).

A Hidrologia, enquanto ciência da Terra que estuda a ocorrência, a distribuição, o movimento e as propriedades da água na atmosfera, na superfície e no subsolo, tem procurado uma abordagem interdisciplinar, envolvendo-se em outras áreas do saber. O objectivo é expandir o conhecimento existente das diversas fases do ciclo da água, em particular nas áreas de maior densidade populacional, uma vez que são particularmente complexas. Surge, assim, a hidrologia urbana – ramo da hidrologia que estuda as zonas metropolitanas analisando, em particular, o impacto do desenvolvimento das cidades no ciclo urbano da água e as formas de minimizar os seus efeitos negativos.

A grande maioria dos estudos de hidrologia urbana incide na análise do escoamento superficial, que por sua vez se relaciona estreitamente com a protecção contra os fenómenos catastróficos provocados pelo movimento da água à superfície do solo (e. g., cheias, deslizamento de taludes). Os escoamentos superficiais em aglomerados populacionais tem fundamentalmente origem na precipitação atmosférica, mas também resultam da rega de jardins e zonas verdes, ruptura de condutas de abastecimento de água, extinção de incêndios, cheias fluviais que transvazem do leito, ou da água de infiltração que circula sob forma de escoamento hipodérmico ou subterrâneo e depois aflora à superfície do solo.

A crescente construção de zonas edificadas, vias de acesso e todo o tipo de equipamentos provoca alterações no escoamento superficial, que evidenciam a necessidade da implantação de um novo sistema de drenagem de águas pluviais que acompanhe a urbanização, ou a reabilitação do sistema preexistente, de modo a fazer face às exigências a que está sujeito.

Trata-se de uma temática de indiscutível importância, cada vez mais actual, que se traduz na imprescindível existência de planos gerais de drenagem de águas pluviais eficazes, para um melhor controlo da água em meio urbano.

## 1.1 Conteúdo do guia

O texto introduz conceitos básicos fundamentais para a Hidrologia Urbana no âmbito da estatística, métodos numéricos, hidráulica e hidrologia – temas abordados do Capítulo 2 ao Capítulo 5, respectivamente.

Dada a natureza probabilística do fenómeno hidrológico, a Estatística é uma área de conhecimento importante na hidrologia urbana, utilizada na avaliação do comportamento dos processos hidrológicos, nomeadamente na estimativa de precipitações e caudais para determinados períodos de retorno, com base em séries históricas. É nesse âmbito que no Capítulo 2 é feita uma apresentação sobre a aplicação das leis de Gauss, Gumbel, Fréchet e Weibull.

A complexidade dos processos envolvidos obriga à necessidade de recorrer ao cálculo numérico para resolução de uma grande quantidade de problemas e questões. No Capítulo 3, são revistas as metodologias usuais relacionadas com a estimativa de erros, a resolução de equações não lineares, a aproximação de funções, e a integração e diferenciação numérica.

É impossível não recorrer à hidráulica para o dimensionamento e a gestão dos sistemas de drenagem. No Capítulo 4, recordam-se alguns conceitos fundamentais da hidráulica utilizados nesta área. Forçosamente, a maior ênfase vai para os escoamentos com superfície livre, dada a natureza dos escoamentos envolvidos e a forma como são captados e transportados pelos sistemas de drenagem pluvial tradicionais.

O último capítulo é dedicado à hidrologia, abordando-se, de modo sucinto, alguns aspectos e conceitos básicos com relevância para o estudo de sistemas de drenagem de águas pluviais. Dá-se especial atenção aos aspectos relacionados com o balanço hidrológico, a caracterização fisiográfica da bacia hidrográfica, e aos conceitos de coeficiente de escoamento e tempo de concentração. O volume seguinte desta série incidirá especificamente nos processos hidrológicos de precipitação e escoamento superficial e nos modelos de precipitação-escoamento usados em hidrologia urbana.

Em todos os capítulos há exemplos e exercícios, aplicados tanto quanto possível ao tema da hidrologia urbana, para que seja mais fácil ao leitor compreender a necessidade e a aplicabilidade dos conceitos apresentados.



## 2 MÉTODOS ESTATÍSTICOS

Cristina Martins<sup>1</sup>; Maria da Graça Temido<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Matemática – Universidade de Coimbra.

<sup>2</sup> Centro de Matemática da Universidade de Coimbra.

### 2.1 Nota introdutória

Este capítulo é dedicado aos métodos estatísticos fundamentais em estudos de hidrologia urbana, nomeadamente aos que se referem a fenómenos aleatórios que são bem modelados à custa das leis normal, Gumbel, Fréchet e Weibull. Com efeito, a lei normal surge na modelação de inúmeros fenómenos, quer pelas características probabilísticas de tais fenómenos, quer pelo seu simples tratamento matemático. De realçar ainda a força do teorema do limite central que permite, *grosso modo*, que médias e somas de atributos independentes possam ser modeladas, de forma aproximada, por uma lei normal. Por outro lado, a necessidade de modelar fenómenos raros, cuja ocorrência pode ter um efeito significativo ou mesmo destruidor, esteve na génese da teoria de extremos. A regularidade encontrada em alguns destes fenómenos permitiu estabelecer que o comportamento probabilístico do máximo de atributos independentes seja descrito por uma das três leis: Gumbel, Fréchet ou Weibull. Usa-se o método dos máximos anuais, com o qual se gera e explora uma amostra de valores máximos a partir da amostra inicial da variável em estudo, e estimam-se quantidades de importância primordial na caracterização de tais fenómenos raros, como quantis elevados e períodos de retorno de níveis de referência.

Os métodos estatísticos assentam na teoria das probabilidades, pelo que há que relembrar antes de mais os conceitos básicos de uma teoria essencial ao desenvolvimento do texto e à completa compreensão das aplicações apresentadas. Para um estudo mais aprofundado destes e de outros conceitos da teoria das probabilidades, o leitor poderá consultar, por exemplo, Guimarães e Sarsfield-Cabral (2007), Moore (2003) e Gonçalves e Mendes-Lopes (2000).

Ao longo do texto são indicadas outras referências bibliográficas associadas às matérias específicas em estudo.

## 2.2 Conceitos básicos

### 2.2.1 Probabilidade

De um modo geral, o objectivo da teoria das probabilidades é encontrar modelos matemáticos que descrevam certos fenómenos naturais em que se supõe intervir o acaso, ou seja, fenómenos para os quais não é possível, a partir do passado, prever deterministicamente o futuro. Estes fenómenos têm a designação de fenómenos aleatórios.

Neste contexto surge também a noção de experiência aleatória, que aqui se define como um processo ou conjunto de circunstâncias sujeitas a factores casuais, capaz de produzir efeitos observáveis, mas incertos. São exemplos de experiências aleatórias a observação e o registo da temperatura, a avaliação e o registo de um caudal, a contagem do número de dias em que a precipitação excede determinada altura. Denomina-se espaço fundamental, representado por  $\Omega$ , o conjunto de todos os resultados possíveis de obter ao realizar uma experiência aleatória. Por exemplo, se se considerar a experiência aleatória que consiste na contagem do número de dias num ano, em que a precipitação excede determinada altura  $x$ , obtém-se  $\Omega = \{0, 1, \dots, 365\}$ . No contexto da experiência anterior, considere-se o acontecimento “a precipitação excede a altura  $x$  quando muito em 20 dias por ano”, correspondendo-lhe o subconjunto  $\{0, 1, 2, \dots, 20\}$  de  $\Omega$ . Assim, entende-se por acontecimento associado a uma experiência aleatória qualquer subconjunto de  $\Omega$ ; em particular, um acontecimento elementar corresponde a qualquer subconjunto de  $\Omega$  que contenha apenas um elemento.

Diz-se que o acontecimento  $A$  se realiza ou ocorre se, ao efectuar a experiência aleatória, o resultado obtido pertencer a  $A$ . O acontecimento contrário de  $A$ , que se realiza se e só se  $A$  não se realiza, representa-se por  $\bar{A}$ .

Dois acontecimentos  $A$  e  $B$  são *incompatíveis* se a sua realização em simultâneo for impossível. Representa-se este facto por  $A \cap B = \emptyset$ , onde  $\emptyset$  representa o conjunto vazio.

A questão que se coloca agora é saber como calcular as probabilidades de acontecimentos.

As experiências aleatórias que estiveram na origem da teoria das probabilidades apresentavam um número finito de resultados e a equipossibilidade de todos eles, originando a chamada definição clássica ou de Laplace, que se apresenta a seguir.

### Definição clássica de probabilidade (Laplace)

Se  $\Omega$  é finito e todos os seus elementos têm a mesma possibilidade de ocorrência, então a probabilidade de um acontecimento  $A$  é o quociente entre o número de casos favoráveis à ocorrência de  $A$  e o número de casos possíveis de obter ao realizar a experiência.

$$\text{Simbolicamente, } P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega}$$

Para exemplificar, considere-se a experiência aleatória que consiste na escolha, ao acaso, de dois dias úteis da semana para trabalhar num determinado projecto. É claro que  $\Omega$  é finito, tendo-se  $\# \Omega = 10$ , e qualquer conjunto de dois dias tem a mesma possibilidade de ocorrência. Pode-se então aplicar a definição clássica de Laplace para calcular a probabilidade de qualquer acontecimento relacionado com esta experiência aleatória. Ao acontecimento “a segunda-feira é um dos dias escolhidos” corresponde o subconjunto  $A = \{\{2^a, 3^a\}, \{2^a, 4^a\}, \{2^a, 5^a\}, \{2^a, 6^a\}\}$  de  $\Omega$  e tem-se  $P(A) = 4/10 = 0.4$ .

No entanto, na maioria das situações que ocorrem na prática, o espaço dos resultados  $\Omega$  não é finito (nem sequer é discreto!). Se se pensar no maior período de tempo, em horas, em que chove continuamente num determinado dia, tem-se  $\Omega = [0,24]$ . Neste exemplo, o conjunto  $\Omega$  é limitado, o que nem sempre acontece, como é o caso da altura de precipitação diária num determinado local, situação em que se pode considerar  $\Omega = [0, +\infty[$ .

Em 1933, o matemático russo Kolmogorov apresentou uma definição de probabilidade que inclui todo o tipo de espaços fundamentais, em particular intervalos de números reais. Sendo  $\Omega$  o espaço fundamental associado a uma experiência aleatória, Kolmogorov define a probabilidade como uma função definida sobre um conjunto  $\Gamma$  de acontecimentos de  $\Omega$ , com valores em  $[0,1]$  e satisfazendo determinadas condições (axiomas). Assim, a probabilidade de um acontecimento  $A$  não é definida através de uma determinada expressão matemática que dependa de  $A$  (como acontece no caso da definição clássica).

Para que os axiomas da definição de probabilidade segundo Kolmogorov tenham consistência, o conjunto  $\Gamma$  tem que obedecer a três requisitos: tem que incluir  $\Omega$ , bem como o contrário de qualquer acontecimento  $A$  que seja elemento de  $\Gamma$  e, sendo  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  acontecimentos de  $\Gamma$ , a sua união tem que pertencer a  $\Gamma$ . Um conjunto  $\Gamma$  que verifique tais condições chama-se *tribo sobre  $\Omega$*  (Gonçalves e Mendes-Lopes, 2000).

### Definição axiomática de probabilidade (Kolmogorov)

Sendo  $\Gamma$  uma *tribo sobre*  $\Omega$ , uma probabilidade é uma função  $P$  definida em  $\Gamma$  com valores em  $[0,1]$  que verifica  $P(\Omega) = 1$  e tal que, para qualquer sucessão de elementos de  $\Gamma$ ,  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ , dois a dois incompatíveis, o valor da função  $P$  calculado para a união de todos eles é igual à soma dos valores da função  $P$  calculado para cada um deles, isto é,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

**Nota:** A realização da união de acontecimentos corresponde à realização de pelo menos um deles.

Da definição anterior resultam algumas propriedades, muito úteis na prática, que se apresentam de seguida.

1.  $P(\emptyset) = 0$

2. Se  $A$  e  $B$  são acontecimentos incompatíveis, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. Se  $A$  e  $B$  são acontecimentos tais que  $A \subseteq B$ , então  $P(A) \leq P(B)$

4. Se  $A$  e  $B$  são acontecimentos quaisquer, então

a)  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

b)  $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$ , onde  $A - B = A \cap \bar{B}$

c)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5. Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são  $n$  acontecimentos quaisquer, então a probabilidade da ocorrência de pelo menos um deles é inferior ou igual à soma das  $n$  probabilidades correspondentes, isto é,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

**Nota:** A ocorrência do acontecimento  $A - B$  corresponde à ocorrência de  $A$  sem que ocorra  $B$ .

## 2.2.2 Variáveis aleatórias e distribuições de probabilidade

Em muitos casos, os elementos de  $\Omega$  são, à partida, números reais ou vectores de números reais. Contudo, pode suceder que cada elemento do espaço fundamental não seja um número real ou um vector real, podendo ser, por exemplo, uma molécula de um gás ou um ser humano. Nestes casos, só é possível proceder a cálculos numéricos atribuindo um valor real ou um vector de valores reais a cada elemento de  $\Omega$ . De facto, em geral, não são os próprios elementos do espaço fundamental o alvo de estudo, mas sim valores numéricos que lhes estão associados. Há todo o interesse em trabalhar com funções que associem a cada resultado de uma experiência aleatória um valor numérico e, posteriormente, avaliar a probabilidade de tais valores pertencerem a determinados conjuntos de números reais ou de vectores reais. Em particular, se se pretender fazer estudos que envolvam o caudal de um rio, pode ser importante considerar o caudal médio anual registado num determinado posto hidrométrico. Representando por  $X$  o referido caudal,  $X(\omega)$  representa o caudal médio do rio registado nesse posto hidrométrico no ano  $\omega$ . É importante, por exemplo, conhecer a probabilidade de o caudal médio exceder determinado valor elevado associado a cheias. Apresenta-se, assim, a definição de variável aleatória real.

Seja  $\Omega$  o espaço fundamental associado a uma experiência aleatória. Dá-se o nome de variável aleatória real a uma função  $X$  que atribui um valor real,  $X(\omega)$ , a cada elemento  $\omega$  de  $\Omega$  e para a qual é sempre possível calcular

$$P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$$

para qualquer número real  $x$ .

Note-se que, fazendo variar  $x$  em  $\mathfrak{R}$ , a expressão  $P(X \leq x)$  define uma função de domínio  $\mathfrak{R}$  e com valores em  $[0, 1]$ .

À função  $F$  dada por  $F(x) = P(X \leq x)$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ , chamamos *função de distribuição* da variável aleatória  $X$ .

A grande importância da função de distribuição de uma variável aleatória  $X$  advém do facto de esta resumir toda a informação relevante relativa a  $X$ , do ponto de vista do cálculo das probabilidades. Isto é, a partir da função

de distribuição de  $X$ , calcula-se as probabilidades de qualquer tipo de acontecimentos definidos à custa de  $X$ . Por exemplo:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

Quando se estuda uma variável aleatória, a primeira questão que se coloca é saber quais são os valores que esta assume para que, posteriormente, se possa analisar a forma como estes se distribuem. Para exemplificar, considerem-se as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  que representam, respectivamente, o número de dias por ano em que a precipitação excede um determinado valor e o tempo que decorre entre duas dessas excedências. Claramente,  $X$  e  $Y$  assumem valores em conjuntos com características diferentes; de facto, enquanto  $X$  toma valores num conjunto de números naturais,  $Y$  toma valores num intervalo real. Esta diferença condiciona o tipo de distribuição (ou lei) das variáveis aleatórias, as quais, do ponto de vista das aplicações relevantes em Estatística, se dividem em discretas e contínuas.

Uma variável aleatória real  $X$  diz-se discreta (ou que tem distribuição, ou lei, discreta) se assume todos os seus valores num conjunto finito ou infinito numerável  $S$ , tendo-se portanto  $P(X \in S) = 1$

Ao menor dos conjuntos  $S$  que verificam esta condição chama-se suporte de  $X$  ou da distribuição de  $X$  e representa-se por  $S_X$

O número de dias por ano em que a precipitação num determinado local excede um valor previamente fixado é um exemplo de variável aleatória discreta.

Uma variável aleatória real  $X$  diz-se contínua (ou que tem distribuição, ou lei, contínua) se  $P(X = x) = 0$ , para qualquer número real  $x$ .

Do ponto de vista das aplicações estatísticas, no conjunto das variáveis contínuas, interessa o subconjunto especial constituído pelas *variáveis aleatórias absolutamente contínuas* (ou com distribuição absolutamente contínua). Deve-se mesmo afirmar que, no contexto de tais aplicações e no âmbito em que se insere o presente texto, as variáveis que são contínuas, mas não absolutamente contínuas, perdem a sua importância.

Como exemplos de variáveis aleatórias absolutamente contínuas refiram-se a velocidade do vento, a precipitação e o caudal de um rio. Estas variáveis aleatórias assumem valores em intervalos de números reais.

Em rigor, uma variável aleatória absolutamente contínua é definida a partir de uma função com determinadas características, designada função densidade.

Dá-se o nome de função densidade (ou apenas densidade) sobre  $\mathfrak{X}$  a uma função real de variável real,  $f$ , cujo gráfico está acima do eixo das abcissas, podendo coincidir com este nalguns intervalos, de tal forma que a medida da área entre este eixo e o gráfico de  $f$  seja igual a 1, i. e.,  $f$  é não negativa e  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Uma variável aleatória real  $X$  diz-se *absolutamente contínua* se existir uma densidade  $f$  tal que a função de distribuição de  $X$  calculada no ponto  $u$  corresponda à medida da área entre o eixo das abcissas e o gráfico de  $f$ , limitada à direita pela recta vertical  $x = u$ , i. e.,  $F(u) = \int_{-\infty}^u f(x) dx = 1, u \in \mathfrak{X}$

Para variáveis absolutamente contínuas, define-se o suporte como sendo o conjunto onde a correspondente densidade é estritamente positiva. Continua a usar-se a notação  $S_x$  para o suporte da variável aleatória  $X$ .

Uma vez que, como já foi referido, no âmbito das aplicações estatísticas as variáveis que são contínuas, mas não absolutamente contínuas, não têm relevância, doravante usar-se-á a designação “contínua” para significar “absolutamente contínua”.

As variáveis contínuas verificam as propriedades que se apresentam a seguir.

1. A função de distribuição  $F$  de uma variável aleatória contínua é contínua.
2.  $f(x) = F'(x)$ , nos pontos onde a derivada existe.
3.  $P(X \in [a, b]) = P(X \in ]a, b]) = P(X \in [a, b[) = P(X \in ]a, b[)$   
 $= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$

Esta última propriedade traduz-se da seguinte forma: se  $X$  for uma variável aleatória contínua, a probabilidade de  $X$  pertencer ao intervalo  $[a, b]$  é a medida da área limitada inferiormente pelo eixo das abcissas, superiormente pelo gráfico de  $f$  e, lateralmente, pelas rectas de equações  $x = a$  e  $x = b$ . Este facto é ilustrado na Figura 2.1, onde a medida da área a sombreado corresponde à referida probabilidade.

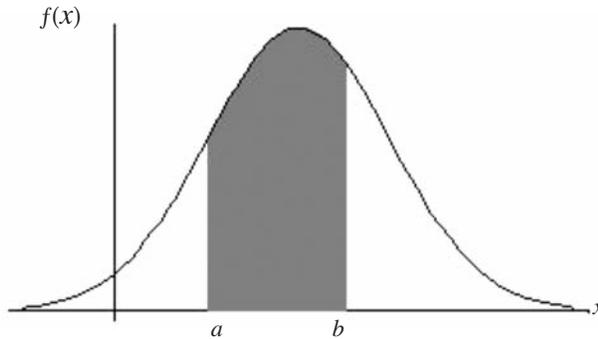


Figura 2.1 – Representação gráfica da probabilidade  $P(a \leq X \leq b)$ , com  $X$  contínua de densidade  $f$ .

Por vezes, na prática, surgem duas ou mais variáveis aleatórias para serem estudadas em simultâneo. Um dos conceitos mais importantes a ter em conta nesta situação é o de variáveis aleatórias independentes.

Duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  dizem-se *independentes* se

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) P(Y \leq y)$$

para quaisquer  $x$  e  $y$  reais. A notação  $P(X \leq x, Y \leq y)$  significa “probabilidade de se ter, em simultâneo,  $X \leq x$  e  $Y \leq y$ ”.

Analogamente, as variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  definem-se como *independentes* se  $P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \dots P(X_n \leq x_n)$  para quaisquer  $x_1, \dots, x_n$  reais.

As variáveis aleatórias correspondentes a caudais médios anuais, ou a precipitações totais anuais, podem ser consideradas independentes.

### 2.2.3 Valor médio, desvio-padrão e quantis

Para uma variável aleatória real (ou para uma distribuição), podem definir-se determinadas quantidades, designadas por *parâmetros*, que fornecem informação resumida sobre os valores por ela assumidos, em particular a sua localização e a sua dispersão.

O primeiro parâmetro a definir é o valor médio, média ou esperança matemática de uma variável aleatória real que, no caso discreto, é obtido somando as parcelas da forma  $xP(X=x)$  para todos os valores  $x$  do suporte de  $X$ . Cada uma destas parcelas pode interpretar-se como sendo um

valor  $x$  “afectado” de um peso que corresponde à probabilidade da sua ocorrência. Quando o suporte de  $X$  é infinito (numerável), esta soma pode não existir e, nesse caso, diz-se que não existe a média de  $X$ .

Perante uma variável aleatória contínua, não faz sentido fazer a soma acima referida, passando a média de  $X$  a ser definida através de um integral.

Seja  $X$  uma variável discreta de suporte  $S_X$ .

A *média* (esperança matemática ou valor médio) de  $X$  é definida por

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} xP(X = x) \text{ desde que o somatório exista (i. e., desde que}$$

$$\sum_{x \in S_X} |x|P(X = x) \text{ seja convergente).}$$

Seja  $X$  uma variável contínua com densidade  $f$ . A *média* (esperança

$$\text{matemática ou valor médio) de } X \text{ é definida por } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

desde que o integral exista (i. e., desde que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx$  seja convergente).

A média de uma variável aleatória é um parâmetro de localização, sendo o ponto de equilíbrio (centro de massa) da sua distribuição.

Note-se que a média de uma variável aleatória não é necessariamente um dos valores que esta assume.

Indicam-se abaixo algumas propriedades úteis na prática.

Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias definidas sobre o mesmo espaço  $\Omega$  e tais que  $E(X)$  e  $E(Y)$  existem.

1. Se  $P(X \geq 0) = 1$ , então  $E(X) \geq 0$
2.  $E(aX + b) = aE(X) + b, \forall a, b \in \Re$
3.  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
4. Se  $X$  e  $Y$  são independentes, então  $E(XY) = E(X)E(Y)$

As propriedades 2, 3 e 4 são facilmente generalizáveis a um número finito de variáveis aleatórias. Concretamente tem-se:

- $E(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n + b) = a_1 E(X_1) + \dots + a_n E(X_n) + b$ , para quaisquer números reais  $a_1, \dots, a_n$  e  $b$ .
- Se as variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$  são independentes, então  $E(X_1 \times \dots \times X_n) = E(X_1) \dots E(X_n)$

Dada a lei de  $X$ , pode-se também calcular o valor médio de qualquer função de  $X$  que seja ainda uma variável aleatória, como é o caso de  $X^2$ ,  $\ln X$  (quando  $S_X \subseteq \mathfrak{R}^+$ ), etc.

Seja  $X$  uma variável aleatória e  $h: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  uma função tal que  $h(X)$  é ainda uma variável aleatória.

1. Se  $X$  é uma variável discreta, a média de  $h(X)$  é dada por

$$E(h(X)) = \sum_{x \in S_X} h(x) P(X = x), \text{ desde que o somatório exista.}$$

2. Se  $X$  é uma variável contínua com densidade  $f$ , a média de  $h(X)$  é dada por  $E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x) dx$ , desde que o integral exista.

Como exemplo, considere-se uma variável  $X$ , contínua, com densidade dada por  $f(x) = 0.5$ , se  $x \in [0,2]$  e  $f(x) = 0$ , caso contrário. A média da variável aleatória  $h(X) = X^2$  é dada por  $E(h(X)) = E(X^2) = \int_0^2 0.5x^2 dx = 4/3$ .

Além do valor médio de uma variável aleatória, é também importante o conhecimento de medidas de dispersão dessa variável (dois conjuntos de valores podem ter a mesma média e dispersões muito diferentes, como é o caso de  $\{-0.01, 0.01\}$  e  $\{-100, 100\}$ , se considerarmos estes valores igualmente pesados).

As medidas de dispersão mais usadas são a variância e o desvio-padrão, que se baseiam no quadrado da distância de cada valor tomado por  $X$  à sua média  $E(X)$ .

A *variância* de  $X$  é dada por  $V(X) = E((X - E(X))^2)$ , desde que exista  $E(X^2)$ .

O *desvio-padrão* de  $X$  é definido por  $\sqrt{V(X)}$

O uso do desvio-padrão é mais conveniente do que o da variância pelo facto de o seu valor ser dado na unidade de medida de  $X$  enquanto que a variância é dada no quadrado dessa unidade. Note-se que tanto a variância como o desvio-padrão são quantidades superiores ou iguais a zero. Apresentam-se a seguir algumas propriedades da variância.

Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias definidas sobre o mesmo espaço  $\Omega$  e tais que  $E(X^2)$  e  $E(Y^2)$  existem.

1.  $V(aX + b) = a^2V(X)$ ,  $\forall a, b \in \mathfrak{R}$
2. Se as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são independentes, então  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
3.  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$  (Fórmula de Koenig)
4.  $V(X) = 0$  se e só se  $X$  toma um único valor com probabilidade igual a 1. Uma variável aleatória nestas condições diz-se *quase certa*.

Da primeira propriedade resulta:

- $V(aX) = a^2V(X)$ ,  $\forall a \in \mathfrak{R}$  (em particular,  $V(-X) = V(X)$ )
- $V(X + b) = V(X)$ ,  $\forall b \in \mathfrak{R}$

Além disso, a propriedade 2 é generalizável a qualquer número finito de variáveis aleatórias.

Os quantis, que se definem de seguida, são parâmetros que permitem estudar em simultâneo a localização e a dispersão dos valores assumidos por uma variável aleatória.

O quantil mais usado é a mediana. *Grosso modo*, diz-se que a mediana de uma variável aleatória  $X$  é o valor que divide a distribuição de  $X$  “ao meio”. Numa distribuição contínua, esta ideia é muito simples de visualizar. De facto, relembando que a área entre o eixo das abcissas e o gráfico da densidade é igual a 1, a mediana, representada por  $Med$ , é o valor do eixo das abcissas tal que à esquerda da recta vertical  $x = Med$  fica metade daquela área e à direita fica, obviamente, a outra metade.

Sendo  $X$  uma variável aleatória contínua, a *mediana* da lei de  $X$  (ou mediana de  $X$ ) é um número real  $Med$  que verifica  $P(X \leq Med) = 1/2$  ou, de modo equivalente,  $F(Med) = 1/2$ .

Na verdade, nem sempre é assim tão simples definir a mediana pois pode não existir um valor  $x$  tal que  $F(x) = 1/2$  (variáveis discretas), ou pode existir um intervalo de valores reais verificando esta condição (variáveis discretas ou contínuas). Neste caso, como a mediana pode ser qualquer um destes valores, considera-se habitualmente este parâmetro igual ao ponto médio de tal intervalo.

Uma vez que as distribuições usadas neste texto são contínuas com função de distribuição estritamente crescente, apresentam-se as definições de mediana e quantis apenas neste caso.

Saliente-se que, ao contrário da média, a mediana existe sempre.

Sendo  $X$  uma variável aleatória contínua com função de distribuição estritamente crescente, o *quantil de probabilidade  $p$*  da lei de  $X$  (ou quantil de probabilidade  $p$  de  $X$ ),  $p \in ]0,1[$ , é o número real  $Q(p)$  que verifica  $P(X \leq Q(p)) = p$  ou, equivalentemente,  $F(Q(p)) = p$ .

Alguns quantis têm particular importância nas aplicações, nomeadamente os *quartis*, os *decis* e os *percentis*. Os quartis correspondem a  $p = 1/4$ ,  $p = 1/2$  e  $p = 3/4$  e designam-se, respectivamente, por primeiro quartil, segundo quartil (que coincide com a mediana) e terceiro quartil. Os decis correspondem a  $p = 1/10$ , ...,  $p = 9/10$  e os percentis correspondem a  $p = 1/100$ , ...,  $p = 99/100$ .

## 2.3 Lei normal ou de Gauss

### 2.3.1 Definição e propriedades

A distribuição normal ou de Gauss é talvez a mais importante distribuição contínua. De facto, do ponto de vista das aplicações, tem-se observado que muitos atributos de certas populações podem ser bem representados por variáveis com distribuição de Gauss. Regra geral, esta distribuição pode ser usada na criação de modelos que descrevem exacta ou aproximadamente fenómenos físicos e biométricos. Exemplos de fenómenos naturais, aos quais correspondem variáveis aleatórias com lei de Gauss, são a precipitação anual numa bacia hidrográfica e o caudal anual médio de um rio.

Do ponto de vista teórico, justifica-se a importância da distribuição normal pelo facto de ser uma boa aproximação para a distribuição da soma de variáveis aleatórias independentes, usualmente com a mesma distribuição,

e ainda pelas suas excelentes propriedades que lhe conferem um tratamento matemático muito simples (Guimarães e Sarsfield-Cabral, 2007).

Uma variável aleatória  $X$  tem *distribuição normal de parâmetros  $m$  e  $\sigma$*  ( $m \in \mathfrak{R}$ ,  $\sigma \in \mathfrak{R}^+$ ) se a sua densidade é da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathfrak{R}$$

Usamos a notação  $X \sim N(m, \sigma)$  para indicar este facto.

A representação gráfica desta função recebe o nome de *curva de Gauss* ou *curva normal*. Apresenta-se de seguida o esboço do gráfico da densidade de uma lei  $N(m, \sigma)$ .

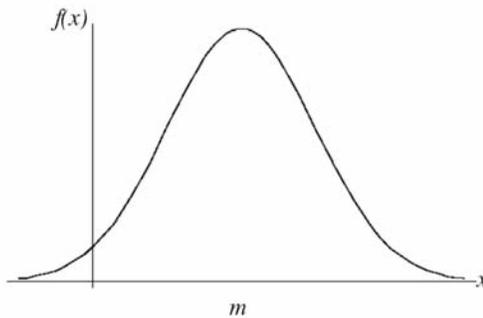


Figura 2.2 – Esboço do gráfico da densidade de uma lei  $N(m, \sigma)$ .

Note-se que esta curva é simétrica relativamente à recta vertical  $x = m$ . Um caso particular importante ocorre quando  $m = 0$  e  $\sigma = 1$ , correspondendo à chamada *distribuição normal centrada e reduzida* ou *distribuição normal padrão*. Seguem-se algumas das propriedades mais importantes da lei normal.

1. Se  $X \sim N(m, \sigma)$ , então  $Z = \frac{X - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$
2. Se  $Z \sim N(0, 1)$ , então  $X = \sigma Z + m \sim N(m, \sigma)$ ,  $m \in \mathfrak{R}$ ,  $\sigma \in \mathfrak{R}^+$
3. Se  $Z \sim N(0, 1)$  e denotando por  $F_z$  a função de distribuição de  $Z$ , tem-se:
  - a)  $F_z(x) = 1 - F_z(-x)$ ,  $\forall x \in \mathfrak{R}$
  - b)  $P(-x \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq x)$ ,  $\forall x \in \mathfrak{R}$
4. O valor médio de  $X$  coincide com o parâmetro  $m$ .
5. O desvio-padrão de  $X$  coincide com o parâmetro  $\sigma$ .

Observe-se ainda que, denotando por  $F_x$  a função de distribuição de  $X$ , da primeira propriedade decorre:

$$F_x(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{x - m}{\sigma}\right) = F_z\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) \quad (2.1)$$

As propriedades apresentadas são úteis em aplicações práticas. Sempre que se tem uma variável aleatória com distribuição simétrica ou aproximadamente simétrica, há que verificar se uma distribuição normal é adequada para a variável aleatória em estudo. No caso de a média não ser igual a 0 ou de a variância não ser igual a 1, deve-se usar a transformação apresentada na igualdade (2.1) e determinar probabilidades ou quantis, usando uma tabela de valores de probabilidades associadas à lei  $N(0,1)$ . Segue-se uma das versões possíveis para a referida tabela, onde se podem observar quantis de probabilidade  $p$  da lei  $N(0,1)$ , denotados por  $z(p)$ , i. e.,  $z(p)$  é o número real que verifica  $P(Z \leq z(p)) = p$ , onde  $Z \sim N(0,1)$ .

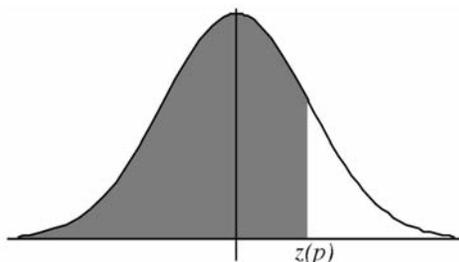


Figura 2.3 – Função de distribuição da lei  $N(0,1)$ .

Note-se que a função `DIST.NORM` do Excel permite obter o valor da função de distribuição,  $F$ , de uma variável aleatória com lei  $N(m,\sigma)$ , para quaisquer  $m$  e  $\sigma$ . Concretamente, o valor de  $F(x)$  é dado por `DIST.NORM(x;m;σ;VERDADEIRO)`. Por exemplo, para uma variável  $X$  seguindo a lei  $N(3,2)$ , tem-se `DIST.NORM(1.76;3;2;VERDADEIRO) = 0.2676`, ou seja,  $F(1.76) = 0.2676$ . Por outro lado, a função `INV.NORM` do Excel permite determinar o inverso da função  $F$ . Mais precisamente, o valor real  $x$  tal que  $F(x) = p$  é determinado por `INV.NORM(p;m;σ)`. Note-se que o valor  $x$  assim obtido é o quantil de probabilidade  $p$  da lei  $N(m;\sigma)$ . Por exemplo, para  $X \sim N(3,2)$ , o valor de  $x$  tal que  $F(x) = 0.7$  é dado por `INV.NORM(0.7;3;2) = 4.0488`. Assim, 4.0488 é o quantil de probabilidade 0.7 da lei  $N(3,2)$ .

Os quantis acima referidos também podem ser obtidos através do *software* estatístico SPSS, usando a opção *Compute* do menu *Transform*. Para tal, cria-se uma variável no ficheiro de dados, que aqui se representa por  $p$ , com os valores para os quais se pretendem calcular os correspondentes quantis  $x$ .

Quadro 2.1 – Valores da função de distribuição da lei  $N(0, 1)$

z(p)	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

A selecção da opção *Compute* fornece uma janela onde designamos uma variável-alvo (*Target Variable*), que aqui se representa por  $x$ . Seguidamente, em *Function group*, seleccionamos *Inverse DF* e, em *Functions and Special Variables*, seleccionamos *Idf.Normal*. Usando a seta lateral, esta função passa para o quadro *Numeric Expression* na forma  $IDF.NORMAL(?, ?, ?)$ . Substitui-se o primeiro “?” por  $p$ , o segundo por  $m$  e o terceiro por  $\sigma$ . Finalmente: OK. Os resultados  $x$  aparecem no ficheiro de dados. Reciprocamente, a fim de calcular valores  $F(x)$  para quaisquer argumentos  $x$ , procede-se de forma análoga, seleccionando *CDF and Noncentral CDF* em *Function group* e, seguidamente, *Cdf.Normal* em *Functions and Special Variables*.

### 2.3.2 Validação de uma lei de Gauss

Perante um conjunto de observações (dados), tem-se por objectivo averiguar se este pode ser considerado como proveniente de uma população normal. A abordagem mais simples a este problema consiste na construção de um histograma associado a tais dados. Se se obtiver uma configuração simétrica, ou aproximadamente simétrica, pode-se conjecturar a normalidade da distribuição subjacente aos dados. Quanto aos parâmetros desta distribuição normal,  $m$  e  $\sigma$ , estes são estimados, respectivamente, pela média,  $\bar{x}$ , e pelo desvio-padrão,  $s$ , dos dados disponíveis. Sendo  $x_1, x_2, \dots, x_n$  os  $n$  valores observados, tem-se

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ e}$$
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2}$$

Para construir um histograma, os dados são agrupados em classes (intervalos), habitualmente com a mesma amplitude, registando-se o número de observações de cada classe. O tipo mais simples de histograma pode ser obtido através da construção de um gráfico constituído por rectângulos adjacentes, um para cada uma das classes, cuja base e altura correspondem, respectivamente, à classe e ao número de observações da mesma. Existem várias indicações sobre o número de classes que deve ter um histograma. Neste texto, usa-se a seguinte onde  $x_{\min}$  e  $x_{\max}$  são, respectivamente, o menor e o maior dos  $n$  valores observados:

$$\text{número de classes} \approx n^{1/3} \frac{x_{\max} - x_{\min}}{3.5s} \quad (2.2)$$

O SPSS permite construir histogramas a partir, por exemplo, do menu *Graphs* com a opção *Legacy Dialogs*, seguida da opção *Histogram*, bastando seleccionar a variável para a qual se pretende o histograma. Há ainda a possibilidade de seleccionar um *item* que permite visualizar sobre o histograma o gráfico da densidade da lei normal com média igual a  $\bar{x}$  e desvio-padrão igual a  $s$ . Observa-se que, usando este procedimento no SPSS, a média e o desvio-padrão dos dados são calculados de forma automática com o histograma.

Note-se que o SPSS define automaticamente o número de classes do histograma (geralmente demasiadas), mas permite ao utilizador a sua modificação, possibilitando ainda a alteração do valor do extremo inferior do primeiro intervalo.

**Exemplo 2.1:** Histograma de precipitações totais anuais.

Num posto udométrico localizado numa bacia urbana, obtiveram-se os dados do Quadro 2.2, que correspondem aos valores das precipitações totais anuais (em mm), obtidos a partir dos registos diários referentes a 17 anos.

Quadro 2.2 – Precipitações totais anuais (mm)

Anos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Prec.total anual	800	1000	1340	1100	830	900	930	950	1111
Anos	10	11	12	13	14	15	16	17	
Prec.total anual	1000	810	1410	1200	1210	1010	1038	1010	

Temos  $n = 17$ , obtendo-se  $\bar{x} = 1038.2$  e  $s = 174.9$ . De 2.2 resulta o valor 3 para o número de classes do histograma. Estabelecendo ainda o valor 750 para o início das classes, o SPSS fornece o histograma apresentado na Figura 2.4.

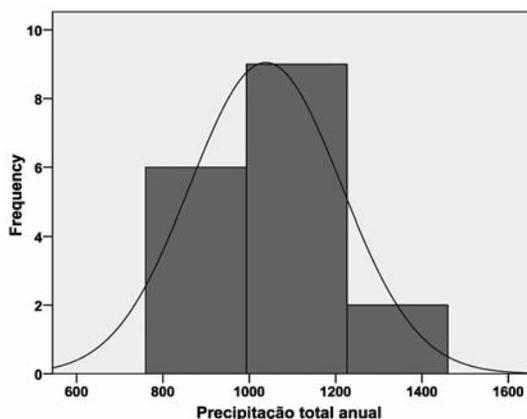


Figura 2.4 – Histograma correspondente à amostra de precipitações totais anuais registada no Quadro 2.2.

A conjectura da normalidade que se pode fazer perante este histograma deve ser validada com a realização de testes estatísticos, cujo estudo teórico sai do âmbito deste texto. Referem-se apenas algumas indicações sobre os procedimentos a seguir.

Inicialmente usa-se um método gráfico, designado *papel de probabilidade*, cuja construção, válida para qualquer lei contínua, se descreve a seguir de forma breve. Em primeiro lugar, há que ordenar ascendentemente as  $n$  observações disponíveis. Denotando por  $x_{1:n}, x_{2:n}, \dots, x_{n:n}$  a amostra assim ordenada, marcam-se num sistema de eixos os pontos  $(x_{i:n}, y_i)$ , sendo  $y_i$  os valores tais que  $F(y_i) = \frac{i}{n}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , onde  $F$  representa a função de distribuição da lei que se pretende validar. Se a nuvem de pontos obtida evidenciar uma relação linear entre abcissas e ordenadas, tem-se uma validação informal da lei referida. Para obter um papel de probabilidade no SPSS, usa-se o menu *Analyze* com a opção *Descriptive Statistics*, seguida da opção Q-Q, e selecciona-se a variável que corresponde à amostra em análise, bem como a distribuição que se pretende testar (por exemplo, *Test Distribution: Normal*).

**Exemplo 2.2:** Papel de probabilidade normal.

A Figura 2.5 apresenta o papel de probabilidade normal, construído no SPSS, respeitante à variável *Precipitação total anual* do Exemplo 2.1.

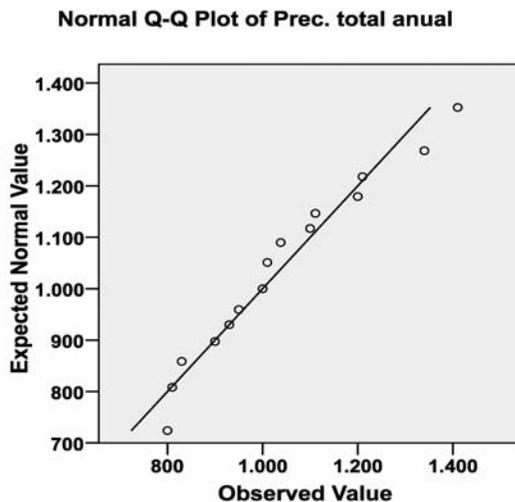


Figura 2.5 – Papel de probabilidade normal correspondente à amostra de precipitações totais anuais registada no Quadro 2.2.

Para obter uma validação mais robusta da hipótese da normalidade da distribuição subjacente aos dados, deve-se efectuar um teste estatístico que, de alguma forma, quantifica a significância dessa hipótese. Esta quantificação é feita a partir do chamado  $p$  – valor do teste (em inglês,  $p$  – value; no SPSS, *Significance* ou, de forma abreviada, *Sig.*). Se este valor é

pequeno (habitualmente, inferior a 0.05), a hipótese da normalidade deve ser rejeitada. Por outro lado, quanto mais próximo de 1 estiver o  $p$  – valor, maior é a evidência da normalidade da distribuição subjacente aos dados.

Embora existindo outras possibilidades, aplica-se aqui o teste de Kolmogorov-Smirnov por estar disponível directamente a partir do menu *Analyze/Nonparametric Tests* do SPSS. A opção *1-Sample K-S* abre uma janela onde se selecciona a variável que corresponde à amostra em análise, bem como a distribuição que se pretende testar (*Test Distribution: Normal*). No *output* deste procedimento obtemos um quadro onde, entre outras informações, surge o  $p$ -valor aproximado do teste. Este valor corresponde à referência *Asymp. Sig.*

**Exemplo 2.3:** Resultado do teste de Kolmogorov-Smirnov.

Na Figura 2.6 observa-se o resultado do teste de Kolmogorov-Smirnov, realizado no SPSS, respeitante à amostra de precipitações totais anuais do Exemplo 2.1.

		Prec. total anual
N		17
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	1038,18
	Std. Deviation	174,891
Most Extreme Differences	Absolute	,152
	Positive	,152
	Negative	-,087
Kolmogorov-Smirnov Z		,628
Asymp. Sig. (2-tailed)		,826

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Figura 2.6 – Resultado do teste de Kolmogorov-Smirnov referente à amostra de precipitações totais anuais registada no Quadro 2.2.

Neste caso, o  $p$ -valor obtido é 0.826, o que evidencia a normalidade da distribuição subjacente aos dados. Somos assim conduzidos a aceitar a hipótese de que a variável aleatória  $T$ , que representa a precipitação total anual registada no posto udométrico em causa, segue a lei  $N(1038.2,174.9)$ .

É assim possível calcular, por exemplo, a probabilidade de, no próximo ano, a precipitação total anual exceder 950 mm. Esta probabilidade é dada por

$$\begin{aligned}
P(T > 950) &= P\left(Z > \frac{950 - 1038.2}{174.9}\right), \text{ com } Z \sim N(0,1) \\
&= P(Z > -0.5) \\
&= P(Z < 0.5), \text{ pela simetria da lei } N(0,1) \\
&= 0.6915, \text{ usando a tabela da lei } N(0,1)
\end{aligned}$$

### 2.3.3 Lei da soma de variáveis aleatórias independentes

Como já foi referido, a distribuição normal tem excelentes propriedades, nomeadamente no que diz respeito à soma de variáveis aleatórias independentes. Destacam-se duas delas designadas, respectivamente, *estabilidade da lei normal* e *teorema do limite central*. A primeira estabelece que a soma de variáveis aleatórias independentes, e todas seguindo uma lei normal, é ainda uma variável aleatória com lei normal; a segunda permite afirmar que a soma de um número suficientemente grande de variáveis aleatórias independentes, e todas com a mesma lei (não normal), segue aproximadamente uma lei normal.

#### Estabilidade da lei normal

Se  $X_1, \dots, X_n$  são variáveis aleatórias independentes seguindo leis normais,  $N(m_1, \sigma_1), \dots, N(m_n, \sigma_n)$ , então a soma  $X_1 + \dots + X_n$  é uma variável aleatória com lei normal de valor médio  $m_1 + \dots + m_n$  e desvio-padrão

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}$$

#### Teorema do limite central

Se  $X_1, \dots, X_n$  são variáveis aleatórias independentes seguindo todas a mesma lei de média  $m$  e desvio-padrão  $\sigma > 0$ , então, para  $n$  suficientemente grande, a soma  $X_1 + \dots + X_n$  é uma variável aleatória com lei aproximadamente normal de valor médio  $nm$  e desvio-padrão  $\sqrt{n}\sigma$

Existe uma generalização deste teorema no caso em que as variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$ , apesar de independentes, não têm a mesma distribuição. No entanto, é imposta uma hipótese suplementar – condição de Lindeberg – que, *grossa modo*, requer que nenhuma das variâncias,  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ , exceda largamente as outras. Sendo  $m_1, \dots, m_n$  as médias correspondentes, verifica-se então que, para  $n$  suficientemente grande, a soma  $X_1 + \dots + X_n$  tem

distribuição aproximadamente normal de valor médio  $m_1 + \dots + m_n$  e desvio-padrão  $\sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}$  (Billingsley, 1999).

## 2.4 Leis de valores extremos

### 2.4.1 Elementos da teoria de extremos

A teoria de extremos é sem dúvida uma metodologia básica muito eficiente quando se pretende proceder à inferência estatística de extremos. A primeira forma de apresentação dos dados a ser considerada foi, naturalmente, aquela em que estes constituem uma amostra de variáveis aleatórias reais independentes e identicamente distribuídas, situação aqui considerada.

Na prática, os dados extremos associados a um fenómeno aleatório têm importância primordial quando se pretende inferir sobre a ocorrência e frequência de acontecimentos raros. Sempre que ocorrem calamidades naturais de grande magnitude (secas, inundações, terramotos, furacões, ventos ciclónicos, etc.), recorre-se a modelos matemáticos que descrevam satisfatoriamente tais fenómenos. Desta forma, é possível prevenir ou estar melhor preparado para enfrentar tais calamidades, calculando, por exemplo, a probabilidade da sua ocorrência, bem como o tempo médio que decorre entre duas ocorrências consecutivas. Recorde-se que, em geral, o tempo médio que decorre entre duas realizações consecutivas de um acontecimento  $A$  se designa por *período de retorno de  $A$* . Mais, o período de retorno de um acontecimento com probabilidade  $p$  é dado por  $T_r = 1/p$ .

São exemplos concretos a construção de um dique ou de uma ponte com uma altura tal que só muito raramente se veja ameaçada a sua estrutura face a uma cheia – casos em que o nível de água no rio ultrapasse em média, por exemplo, de 100 em 100 anos, a altura do dique ou o nível da ponte.

Assim, no contexto em que se insere o presente texto, recorre-se à teoria de extremos para estimar níveis elevados (ou níveis reduzidos) associados a determinado fenómeno aleatório, isto é, níveis que têm uma probabilidade muito pequena de serem excedidos (ou de serem precedidos, no caso dos níveis reduzidos). Em concreto, e em relação a uma variável aleatória contínua (caudal, precipitação, etc.), pretende-se determinar quantis tais que a probabilidade de a variável em estudo assumir valores

- acima deste seja igual a  $p$ , com  $p$  muito pequeno, designados por *quantis elevados* e denotados por  $Q(1 - p)$ ;

- abaixo deste seja igual a  $p$ , com  $p$  muito pequeno, designados por *quantis reduzidos* e denotados por  $Q^*(p)$ .

No mesmo contexto, é também frequente haver interesse em estimar o período de retorno de determinado valor elevado (ou nível elevado)  $u$ , ou seja, como se definiu acima, o tempo médio que decorre entre duas excedências consecutivas do nível  $u$ .

Na análise estatística de extremos, regra geral seguem-se diferentes métodos de actuação, relativamente à obtenção dos dados considerados relevantes para se fazer inferência acerca dos extremos da população em estudo. Neste texto, apenas se apresenta o *método de Gumbel*, com o qual se gera e se explora uma amostra de máximos do fenómeno em causa (Tiago de Oliveira, 1997).

O método de Gumbel é um método clássico que consiste em dividir a amostra inicial em subamostras de igual dimensão, concentrando o estudo nos máximos das subamostras. Assim, como consequência de tal divisão, é possível afirmar que tais amostras são constituídas por realizações independentes e, obviamente, do mesmo fenómeno. Em muitas amostras de natureza ambiental, a subamostra natural é constituída por dados referentes a um longo período de tempo (por exemplo, um ano), razão pela qual este método é também conhecido como *método dos máximos anuais*.

O procedimento usado pelo método de Gumbel é de algum modo natural quando se observam fenómenos hidrológicos ao longo do tempo, como, por exemplo, níveis máximos de água num rio ou de alturas de precipitação, onde se espera uma certa repetição de valores semelhantes em períodos de um ano. Porém, em muitas áreas de aplicação, a natureza nem sempre oferece essa sazonalidade, pelo que o método de Gumbel deixa de parecer natural. De facto, o particionamento da amostra total e ainda a obrigatoriedade de tomar como observações relevantes apenas os máximos de cada uma das subamostras podem levar a que se despreze alguns valores elevados cujo conhecimento é de extrema importância para o estudo. Estas contingências da metodologia de Gumbel fizeram com que muitos investigadores se interessassem por metodologias alternativas, que exigem um enquadramento matemático que sai do âmbito do presente texto.

Para uma leitura mais completa deste e de outros assuntos da teoria de extremos, consultar Beirlant *et al.* (1996 e 2004), Castillo *et al.* (2005), Embrechts *et al.* (1997) e Reiss e Thomas (2001).

### 2.4.2 Leis de máximos

No âmbito do método de Gumbel, admita-se a existência de uma amostra constituída por valores máximos de um determinado fenómeno, recolhidos espaçadamente ao longo do tempo (caudais, alturas da água, etc.).

Na génese da teoria de extremos está um resultado que se deve ao matemático russo Gnedenko (Gnedenko, 1943), o qual estabelece que, em condições bastante gerais, a distribuição do máximo de variáveis aleatórias reais independentes e identicamente distribuídas apresenta uma regularidade surpreendente. O teorema de Gnedenko, que ainda hoje é considerado um dos resultados mais importantes da teoria de extremos, estabelece que a função de distribuição do máximo de amostras suficientemente grandes pode ser aproximada por uma função de distribuição que apresenta uma das três formas seguintes:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(-\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^\alpha\right) & \text{se } x < \lambda \\ 1 & \text{se } x \geq \lambda \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^{-\alpha}\right) & \text{se } x > \lambda \\ 0 & \text{se } x \leq \lambda \end{cases}$$

$$\Lambda(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\lambda}{\delta}\right)\right), \quad x \in \mathfrak{R}$$

onde  $\delta > 0$ ,  $\alpha > 0$  e  $\lambda$  é um número real qualquer. Estas três funções de distribuição recebem os nomes de Weibull, Fréchet e Gumbel, respectivamente. São também conhecidas por *leis de máximos* (Leadbetter *et al.*, 1983).

Na Figura 2.7, apresentam-se os esboços dos gráficos das densidades das três leis de máximos, para valores concretos dos seus parâmetros.

Face a uma amostra de máximos, começa-se naturalmente pelo ajustamento de uma destas três funções de distribuição, fazendo primeiro um *teste de escolha estatística de leis de máximos*. Por outras palavras, averigua-se qual é a lei da variável aleatória *máximo* subjacente ao estudo, ou seja, qual é a lei que melhor se adapta aos dados concretos. Este teste estatístico pode ser tão simples como a construção de um papel de probabilidade. Como se verificará, é suficiente elaborar o papel de probabilidade da lei de Gumbel.

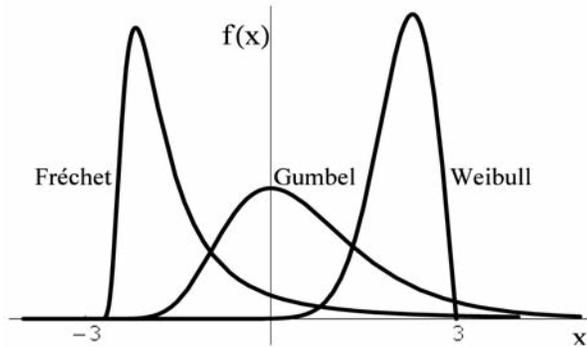


Figura 2.7 – Esboço dos gráficos das funções densidade das leis de Gumbel ( $\lambda = 0, \delta = 1$ ), Fréchet ( $\lambda = -3, \delta = 1, \alpha = 2$ ) e Weibull ( $\lambda = 3, \delta = 1, \alpha = 2$ ).

Para construir o papel de probabilidade da lei de Gumbel, primeiro há que ordenar ascendentemente a amostra, gerando uma série de valores  $x_{1:n} \leq x_{2:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$ . De seguida, marca-se num referencial os  $n$  pontos  $x_{i:n}$  versus  $-\ln(-\ln(i/(n+1)))$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Este gráfico pode ser feito no Excel. Se, perante a distribuição de pontos obtida, se puder afirmar que existe uma relação linear entre abcissas e ordenadas, obtém-se uma validação informal do modelo de Gumbel. Mais do que isso, se ao conjunto de pontos se puder ajustar uma curva com a concavidade voltada para baixo, opta-se pela validação prévia de um modelo de Fréchet, enquanto que uma concavidade voltada para cima permite validar previamente um modelo de Weibull (Beirlant, 1996). Na Figura 2.8 são ilustradas estas três possibilidades.

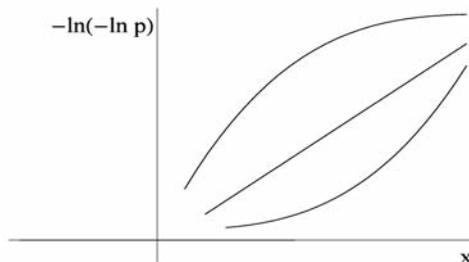


Figura 2.8 – Possíveis configurações das curvas a ajustar a um papel de probabilidade de Gumbel.

A lei de Gumbel é a mais usada no ajustamento de dados que sejam valores máximos de grandezas aleatórias. Com efeito, como o máximo de variáveis aleatórias gaussianas tem distribuição aproximadamente Gumbel (Leadbetter *et al.*, 1983), a elevada frequência com que a lei de Gauss

surge na modelação de fenómenos aleatórios leva a que a lei de Gumbel surja com a mesma relevância na modelação do máximo de tais fenómenos. Além disso, a inferência para tal lei é muito mais simples do que para a Fréchet ou para a Weibull.

Há ainda a acrescentar que, como lei limite de máximos devidamente normalizados, a lei de Gumbel goza do mesmo papel que a lei normal, como lei limite de somas convenientemente normalizadas.

**Exemplo 2.4:** Aplicação da lei de Gumbel a caudais máximos – papel de probabilidade.

Considere-se a seguinte amostra ordenada de 44 caudais máximos anuais (l/s) de um curso de água que atravessa uma zona urbana.

Quadro 2.3 – Caudais máximos anuais (l/s)

39	104	118	119	122	132	143	152	177	177	178	182	206
212	237	237	239	241	242	258	265	276	277	329	333	344
351	357	359	361	368	370	372	376	378	391	409	418	429
431	435	578	679	920								

O papel de probabilidade de Gumbel, construído no Excel a partir destes dados, é o seguinte:

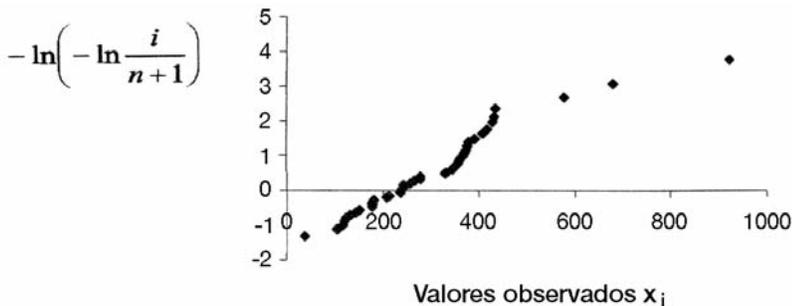


Figura 2.9 – Papel de probabilidade de Gumbel relativo à amostra de caudais máximos anuais do Exemplo 2.4.

Uma vez que a este conjunto de pontos se ajusta bem uma recta, face a este papel de probabilidade, pode-se admitir que a variável que representa o caudal máximo anual deste curso de água segue uma lei de Gumbel.

Em alternativa ao papel de probabilidade, é possível construir um teste estatístico, mais rigoroso do ponto de vista analítico, usualmente designa-

do por *teste de Gumbel*. Devido à facilidade relativa da inferência estatística associada ao modelo de Gumbel, o primeiro passo será testar a hipótese de a amostra de máximos de que dispomos dar evidência ao facto de a variável que lhe está subjacente seguir uma lei de Gumbel. Se, com o procedimento que se apresenta de seguida, esta hipótese for rejeitada, pode-se, obviamente, enveredar pelo ajustamento de uma lei de Fréchet ou de Weibull.

**Teste de Gumbel** (Tiago de Oliveira e Gomes, 1984)

Dada uma amostra de máximos já ordenada ascendentemente,  $x_{1:n} \leq x_{2:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$ , usamos o valor da estatística

$$\omega_n = \ln \ln n \left( \frac{x_{n:n} - x_{[n/2]+1:n}}{x_{[n/2]+1:n} - x_{1:n}} - \frac{\ln n + \ln \ln 2}{\ln \ln n - \ln \ln 2} \right)$$

O  $p$ -valor deste teste é igual a

$$2 \min \{ 1 - \exp(- \exp(- \omega_n)), \exp(- \exp(- \omega_n)) \}$$

Como já foi referido, conclui-se que os dados evidenciam uma lei de Gumbel se o  $p$ -valor for superior ou igual a 0.05 e, obviamente, um modelo de Fréchet ou Weibull em caso contrário.

**Exemplo 2.5:** Aplicação da lei de Gumbel a caudais máximos – teste de Gumbel.

Retome-se os dados do Exemplo 2.4. Há que averiguar se estes dados dão evidência à hipótese de o máximo do caudal daquele curso de água seguir uma lei de Gumbel. Tem-se

$$\omega_{44} = \ln \ln 44 \left( \frac{x_{44:44} - x_{23:44}}{x_{23:44} - x_{1:44}} - \frac{\ln 44 + \ln \ln 2}{\ln \ln 44 - \ln \ln 2} \right) = 0.92$$

Como  $\exp(- \exp(- 0.92)) = 0.65$  e  $1 - \exp(- \exp(- 0.92)) = 0.35$ , o  $p$ -valor do teste é igual a 0.7. Assim, justifica-se o uso de um modelo de Gumbel.

No caso de a amostra de máximos não evidenciar um modelo de Gumbel para a variável *máximo* em estudo, como já foi referido, envereda-se por um modelo Fréchet ou Weibull. Nesse caso, e tendo por objectivo a estimação de probabilidades de acontecimentos raros, de níveis elevados e de períodos de retorno associados a estas duas leis, é de toda a conve-

niência escrever a expressão das suas funções de distribuição numa só. Concretamente:

$$G(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x - \lambda}{\delta}\right)^{-1/\xi}\right) & \text{se } 1 + \xi \frac{x - \lambda}{\delta} > 0, \quad \xi \neq 0 \\ 0 & \text{se } 1 + \xi \frac{x - \lambda}{\delta} \leq 0, \quad \xi > 0 \\ 1 & \text{se } 1 + \xi \frac{x - \lambda}{\delta} \leq 0, \quad \xi < 0 \end{cases}$$

Para  $\xi > 0$ ,  $G$  representa a função de distribuição da lei de Fréchet e, para  $\xi < 0$ ,  $G$  representa a função de distribuição da lei de Weibull.

Esta exposição prossegue com a estimação dos parâmetros desconhecidos  $\xi$ ,  $\lambda$  e  $\delta$  (Hosking e Wallis, 1987). As respectivas estimativas (aproximações), que se denotam por  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\lambda}$  e  $\hat{\delta}$ , são geradas a partir da amostra de máximos de que se dispõe. A saber:

Para a lei de Gumbel:  $\hat{\delta} = 0.7797 s$  e  $\hat{\lambda} = \bar{x} - 0.45 s$

Para a lei de Fréchet e para a lei de Weibull:

com  $b_0 = \bar{x}$ ,  $b_1 = \frac{x_{2:n} + 2x_{3:n} + 3x_{4:n} + \dots + (n-1)x_{n:n}}{n(n-1)}$

$b_2 = \frac{2x_{3:n} + 6x_{4:n} + 12x_{5:n} + \dots + (n-1)(n-2)x_{n:n}}{n(n-1)(n-2)}$

e  $c = \frac{2b_1 - b_0}{3b_2 - b_0} - \frac{\ln 2}{\ln 3}$ , tem-se  $\hat{\xi} = -7.8590c - 2.9554c^2$ ,

$\hat{\delta} = \frac{-(2b_1 - b_0)\hat{\xi}}{\Gamma(1 - \hat{\xi})(1 - 2^{\hat{\xi}})}$  e  $\hat{\lambda} = b_0 - \hat{\delta}(\Gamma(1 - \hat{\xi}) - 1)/\hat{\xi}$

O valor da função  $\Gamma(x)$  pode ser determinado recorrendo ao programa Excel, que fornece apenas o valor da função  $\ln\Gamma(x)$  (função Lngama(x)). Assim, obtém-se  $\Gamma(x) = \exp(\ln \Gamma(x))$ .

Estas estimativas só devem ser usadas para  $\hat{\xi} < 1$ . Em caso contrário, há que usar outros métodos de estimação (Tiago de Oliveira, 1997).

Na sequência do que já foi dito, uma estimativa de  $\xi$  positiva ou negativa dá evidência a um modelo de Fréchet ou de Weibull, respectivamente.

O conhecimento da lei subjacente aos dados permite estimar com facilidade quantis elevados  $Q(1-p)$ , com  $p$  pequeno, dados por

$$Q(1-p) = \begin{cases} \hat{\lambda} - \hat{\delta} \ln(-\ln(1-p)) & (\text{Gumbel}) \\ \hat{\lambda} - \hat{\delta} \frac{1 - (-\ln(1-p))^{1/\hat{\xi}}}{\hat{\xi}} & (\text{Fréchet ou Weibull}) \end{cases}$$

Consequentemente, para estimar um quantil elevado associado a um período de retorno  $T_R$ , como se tem  $p = 1/T_R$ , há que determinar, usando a expressão anterior, o quantil  $Q(1 - 1/T_R)$ .

Para estimar o período de retorno de valores superiores ao valor elevado  $u$ , temos  $T_R(u) = 1/(1 - G(u))$ , valor que também pode ser obtido usando as aproximações

$$T_R(u) \approx \begin{cases} \exp\left(\frac{u - \hat{\lambda}}{\hat{\delta}}\right) & (\text{Gumbel}) \\ \left(1 + \hat{\xi} \frac{u - \hat{\lambda}}{\hat{\delta}}\right)^{1/\hat{\xi}} & (\text{Fréchet ou Weibull}) \end{cases}$$

**Exemplo 2.6:** Aplicação da lei de Gumbel a caudais máximos – quantil elevado e período de retorno.

Retomem-se mais uma vez os dados do Exemplo 2.4. Uma vez que esta amostra apresenta  $\bar{x} = 302.750$  e  $u = 160.792$ , obtém-se  $\hat{\lambda} = 230.394$  e  $\hat{\delta} = 125.369$ .

Assim, por exemplo, o caudal elevado que tem probabilidade 0.02 de ser excedido é

$$Q(0.98) = 230.394 - 125.369 \ln(-\ln(0.98)) = 719.576 \text{ l/s}$$

e o período de retorno de um caudal igual a 800 l/s é dado por

$$T_R(800) = \exp\left(\frac{800 - 230.394}{125.369}\right) \approx 94 \text{ anos.}$$

**Exemplo 2.7:** Aplicação da lei de Weibull ao máximo da altura significativa da onda.

Tendo por objectivo a construção de uma comporta em determinado local, recorreu-se aos valores da altura significativa da onda máxima anual em zonas costeiras, em metros, respeitantes aos últimos 24 anos. O estudo foi baseado na amostra de máximos seguinte:

Quadro 2.4 – Altura significativa da onda máxima anual.

1.04	1.13	1.43	2.04	2.16	2.26	2.38	2.53	2.59	2.80	2.87	2.93
3.11	3.23	3.41	3.44	3.51	3.60	3.69	3.78	3.84	3.92	3.93	4.02

Esta amostra permitiu construir o papel de probabilidade que apresentamos na Figura 2.10.

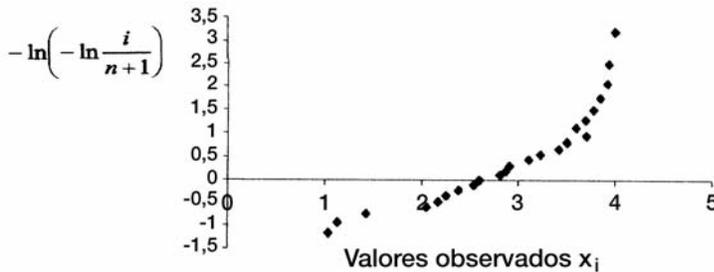


Figura 2.10 – Papel de probabilidade de Gumbel relativo à amostra de máximos da altura significativa da onda do Exemplo 2.7.

Seja  $M$  a variável aleatória que representa a altura máxima anual da onda. Uma vez que o papel de probabilidade evidencia uma lei de Weibull para a variável aleatória  $M$ , procede-se à estimação dos parâmetros. Ora, como

$$b_0 = \bar{x} = 2.9000, b_1 = \frac{941.1157}{24 \times 23} = 1.7049 \text{ e}$$

$$b_2 = \frac{14646.9202}{24 \times 23 \times 22} = 1.2061, \text{ tem-se}$$

$$c = \frac{2b_1 - b_0}{3b_2 - b_0} - \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.0783$$

Consequentemente,

$$\hat{\xi} = -7.8590 \times 0.0783 - 2.9554 \times 0.0783^2 = -0.6335$$

$$\hat{\delta} = \frac{-(2 \times 1.7049 - 2.9) \times (-0.6335)}{\Gamma(1.6335)(1 - 2^{-0.6335})} = 1.0115$$

$$\hat{\lambda} = 2.9 - 1.0115 \times (0.8977 - 1) / (-0.6335) = 2.7366$$

Assim, pode-se concluir que a variável aleatória  $M$  segue uma lei de Weibull e, portanto, tem função de distribuição

$$G(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 - 0.6335 \frac{x - 2.7366}{1.0115}\right)^{1.5785}\right) & \text{se } x < 4.3333 \\ 1 & \text{se } x \geq 4.3333 \end{cases}$$

Por exemplo, a probabilidade da altura de onda máxima anual exceder quatro metros é igual a

$$\begin{aligned} P(M > 4) &= 1 - G(4) = 1 - \exp\left(-\left(1 - 0.6335 \frac{4 - 2.7366}{1.0115}\right)^{1.5785}\right) \\ &= 1 - 0.9191 = 0.0809 \end{aligned}$$

e o período de retorno de ondas com alturas máximas anuais superiores a 3.8 metros é  $T_R(3.8) = 1/(1 - G(3.8)) \approx 6$  anos.

Mais, o valor de altura da onda máxima anual com probabilidade 0.01 de ser excedido é

$$Q(0.99) = 2.7366 - 1.0115 \frac{1 - (-\ln 0.99)^{0.6335}}{-0.6335} \approx 4.25 \text{ metros}$$

### 2.4.3 Leis de mínimos

Numa perspectiva paralela àquela que se tem vindo a abordar, e nos contextos habituais em que se insere o presente texto, interessa agora estimar quantis associados a baixas probabilidades (quantis reduzidos), que não são mais do que valores que têm uma probabilidade muito reduzida de serem precedidos ou, equivalentemente, uma probabilidade muito elevada de serem ultrapassados. Por exemplo, interessa um “valor de seca” (nível baixo do rio ou de pluviosidade) tal que a probabilidade de se observarem valores abaixo deste seja igual a um  $p$  muito pequeno. Similarmente, é possível determinar períodos de retorno de um valor consi-

deravelmente baixo, a probabilidade de ocorrência de valores abaixo de determinado “valor de seca” e, de igual modo, um quantil reduzido associado a um dado período de retorno. Para tal, há que dispor de uma amostra de mínimos do fenómeno aleatório em estudo e ajustar uma lei à variável aleatória *mínimo* subjacente a tal amostra.

Existem naturalmente resultados de estimação e de previsão para valores mínimos, análogos aos que foram apresentados para valores máximos, que decorrem directamente da relação  $\min \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = - \max \{-x_1, -x_2, \dots, -x_n\}$ , a qual é válida para qualquer conjunto de números reais. Usando esta relação e o teorema de Gnedenko, consegue-se estabelecer que a função de distribuição do mínimo de amostras suficientemente grandes pode ser aproximada por uma função de distribuição que apresenta uma das três formas seguintes:

$$\Psi^*(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\left(\frac{x + \lambda}{\delta}\right)^\alpha\right) & \text{se } x > -\lambda \\ 0 & \text{se } x \leq -\lambda \end{cases}$$

$$\Phi^*(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\left(\frac{-x - \lambda}{\delta}\right)^{-\alpha}\right) & \text{se } x < -\lambda \\ 1 & \text{se } x \geq -\lambda \end{cases}$$

$$\Lambda^*(x) = 1 - \exp\left(-\exp\left(\frac{x + \lambda}{\delta}\right)\right), \quad x \in \mathfrak{R}$$

onde  $\delta > 0$ ,  $\alpha > 0$  e  $\lambda$  é um real qualquer. Estas três funções de distribuição recebem os nomes de Weibull de mínimos, Fréchet de mínimos e Gumbel de mínimos, respectivamente (Leadbetter *et al.*, 1983).

Mais uma vez será útil escrever as expressões analíticas da lei de Fréchet e da lei de Weibull de mínimos numa forma única. A saber:

$$G^*(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\left(1 - \xi \frac{x + \lambda}{\delta}\right)^{-1/\xi}\right) & \text{se } 1 - \xi \frac{x + \lambda}{\delta} > 0, \quad \xi \neq 0 \\ 1 & \text{se } 1 - \xi \frac{x + \lambda}{\delta} \leq 0, \quad \xi > 0 \\ 0 & \text{se } 1 - \xi \frac{x + \lambda}{\delta} \leq 0, \quad \xi < 0 \end{cases}$$

Para  $\xi > 0$ ,  $G^*$  representa a função de distribuição da lei de Fréchet de mínimos e, para  $\xi < 0$ ,  $G^*$  representa a função de distribuição da lei de Weibull de mínimos.

Para estimar os parâmetros desconhecidos destas leis, usa-se um argumento muito simples. Com efeito, atendendo à relação já apresentada,  $\min \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = -\max \{-x_1, -x_2, \dots, -x_n\}$ , face a uma amostra de mínimos, começa-se por ordenar de forma ascendente os seus simétricos. Gera-se assim uma amostra de máximos que poderá ser tratada com o procedimento já apresentado, concretamente no que respeita ao ajustamento de uma lei de máximos e à consequente estimação dos seus parâmetros desconhecidos. Nota-se que a amostra de máximos gerada por este processo não é uma amostra de máximos do fenómeno em estudo.

Usando as expressões analíticas da lei de Gumbel de mínimos e das outras duas leis cujas funções de distribuição foram unificadas na forma  $G^*$ , conclui-se que o quantil reduzido de probabilidade  $p$  de ser precedido por valores da variável *mínimo* em estudo é definido por

$$Q^*(p) = \begin{cases} -\hat{\lambda} + \hat{\delta} \ln(-\ln(1-p)) & (\text{Gumbel de mínimos}) \\ -\hat{\lambda} + \hat{\delta} \frac{1 - (-\ln(1-p))^{\frac{1}{\xi}}}{\hat{\xi}} & (\text{Fréchet ou Weibull de min}) \end{cases}$$

Os períodos de retorno de níveis abaixo do nível reduzido  $w$  (“shortfall” ou queda) são dados por  $T_R^*(w) = 1/G^*(w)$ , ou através das aproximações

$$T_R^*(w) \approx \begin{cases} \exp\left(-\frac{w + \hat{\lambda}}{\hat{\delta}}\right) & (\text{Gumbel de mínimos}) \\ \left(1 - \hat{\xi} \frac{w + \hat{\lambda}}{\hat{\delta}}\right)^{1/\hat{\xi}} & (\text{Fréchet ou Weibull de mínimos}) \end{cases}$$

## 2.5 Exercícios

**Exercício 2.1:** Aplicação da lei normal e da lei de Gumbel a caudais médios e máximos.

Num posto hidrométrico devidamente calibrado, instalado numa secção transversal de um curso de água que atravessa uma área urbana, registaram-se os caudais médios anuais e os caudais máximos anuais instantâneos, relativos a dez anos de observações, que se apresentam no quadro seguinte.

Quadro 2.5 – Caudais médios e caudais máximos anuais.

Ano hidrológico	96/97	97/98	98/99	99/00	00/01
Qmédio anual (m³/s)	104	127	134	120	122
Qmax anual inst. (m³/s)	488	603	638	568	578
Ano hidrológico	01/02	02/03	03/04	04/05	05/06
Qmédio anual (m³/s)	126	132	147	116	112
Qmax anual inst. (m³/s)	598	628	703	548	528

- a) Calcule o período de retorno correspondente a um caudal médio anual de 100 m³/s.
- b) Determine o caudal máximo de cheia para o dimensionamento de uma obra hidráulica preparada para cheias centenárias.

### Resolução

- a) Seja  $Q$  a variável aleatória que representa o caudal médio anual registado no referido posto. Admitindo que  $Q$  segue uma lei normal, os seus parâmetros são estimados pela média,  $\bar{q}$ , e pelo desvio-padrão  $s_Q$ , das dez observações. Tem-se  $\bar{q} = 124$  m³/s e  $s_Q = 12.17$  m³/s. O período de retorno pretendido é dado por  $T_R(100) = 1/p$ , com  $p = P(Q < 100)$ , uma vez que  $100 < \bar{q}$ . Tem-se

$$\begin{aligned}
 P(Q < 100) &= P\left(Z < \frac{100 - 124}{12.17}\right), \text{ com } Z \sim N(0,1) \\
 &= P(Z < -1.97) = P(Z > 1.97) = 1 - P(Z \leq 1.97) \\
 &= 1 - 0.9756 = 0.0244
 \end{aligned}$$

$$\text{Então, } T_R(100) = \frac{1}{0.0244} \approx 41 \text{ anos.}$$

- b) O papel de probabilidade associado a esta amostra de máximos (Figura 2.11) evidencia que o máximo do caudal instantâneo do curso de água em estudo possui uma lei de Gumbel.

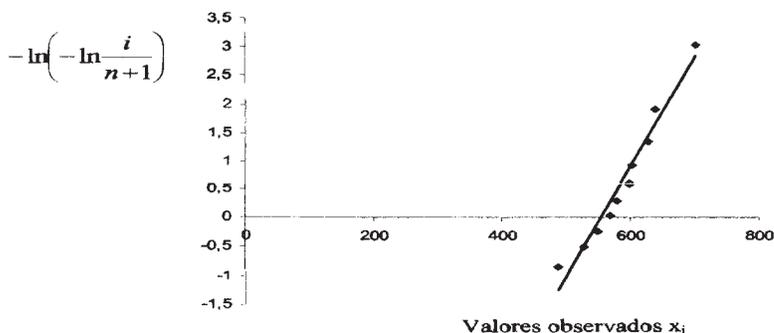


Figura 2.11 – Papel de probabilidade de Gumbel relativo à amostra de caudais máximos anuais instantâneos do Exercício 2.1.

Primeiro, há que estimar os parâmetros  $\lambda$  e  $\delta$ . A partir da média e do desvio-padrão desta amostra, tem-se:  $\hat{\delta} = 0.7797s = 47.46$  e  $\hat{\lambda} = \bar{x} - 0.45s = 588 - 0.45 \times 60.87 = 560.61$ , pelo que se ajusta à variável *máximo* em estudo uma lei de Gumbel com função de distribuição dada por

$$G(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-560.61}{47.46}\right)\right), \quad x \in \mathfrak{R}$$

Tratando-se de cheias centenárias, o período de retorno é, obviamente, de 100 anos, pelo que  $p = \frac{1}{T_R} = 0.01$ . Assim, o quantil elevado com probabilidade 0.01 de ser excedido por caudais máximos anuais é igual a

$$Q(0.99) = 560.61 - 47.46 \ln(-\ln 0.99) = 778.93$$

Pode-se então afirmar que o caudal máximo de cheia que deve ser considerado para dimensionar uma obra que resista a cheias centenárias é de, aproximadamente, 779 m<sup>3</sup>/s.

**Exercício 2.2:** Aplicação da lei normal a precipitações totais anuais.

Numa bacia urbana localizada numa região muito acidentada existem dois postos udométricos, A e B, cujas áreas de influência são, respectivamente, 150 km<sup>2</sup> e 60 km<sup>2</sup>. No quadro seguinte estão registados os valores das precipitações totais anuais dos dois postos (em mm), referentes a 17 anos de observações consecutivas.

Pretende-se construir um açude de betão para fins de abastecimento de água para rega de zona verde. Sabe-se que o período de retorno a utilizar

no seu dimensionamento é de 140 anos. Determine a precipitação total anual na bacia a utilizar no dimensionamento do açude.

Quadro 2.6 – Precipitações totais anuais (mm) em dois postos udométricos.

Ano	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Posto A	910	888	931	900	1050	1000	1020	910	1000
Posto B	800	1000	1340	1100	830	900	930	950	1111
Ano	10	11	12	13	14	15	16	17	
Posto A	1001	880	1111	900	999	899	956	900	
Posto B	1000	810	1410	1200	1210	1010	1038	1010	

### Resolução

Designa-se por  $H_A$  e  $H_B$  as variáveis aleatórias que representam, respectivamente, as precipitações totais anuais registadas nos postos A e B. Dado que as amostras são de precipitações totais anuais, admita-se que  $H_A$  e  $H_B$  seguem leis normais. Assim, os seus parâmetros são estimados pela média e pelo desvio-padrão de tais amostras:  $\bar{h}_A = 956.2mm$ ,  $s_A = 67.4mm$ ,  $\bar{h}_B = 1038.2mm$  e  $s_B = 174.9mm$ .

Uma vez que  $T_R = 140$  anos, obtém-se  $p = 0.0071$ . Com este valor, há que calcular a precipitação total anual a utilizar no dimensionamento relativamente a cada um dos postos e aplicar depois o método de Thiessen para calcular o valor final pretendido. Tendo em conta o tipo de obra a dimensionar, pretende-se calcular valores correspondentes a situações de seca. Determinam-se então os valores  $h_A^{T_R=140}$  e  $h_B^{T_R=140}$  tais que

$$P(H_A < h_A^{T_R=140}) = 0.0071 \quad \text{e} \quad P(H_B < h_B^{T_R=140}) = 0.0071$$

$$\text{Tem-se } P(H_A < h_A^{T_R=140}) = P\left(Z < \frac{h_A^{T_R=140} - 956.2}{67.4}\right), \text{ com } Z \sim N(0,1).$$

Relembrando a área representada por  $P(Z < z)$ , o facto de se ter  $P(Z < z) = 0.0071 < 0.5 = P(Z \leq 0)$  significa que  $z < 0$ . Ora, a tabela da lei  $N(0,1)$  não tem valores negativos; no entanto, a simetria desta lei permite escrever  $P(Z < z) = P(Z > -z)$ . Assim, o valor  $z$  procurado verifica  $0.0071 = P(Z > -z) = 1 - P(Z \leq -z)$ , ou seja,  $P(Z \leq -z) = 0.9929$ . Da tabela da lei  $N(0,1)$ , obtém-se

$$-z = 2.45, \text{ pelo que } \frac{h_A^{T_R=140} - 956.2}{67.4} = -2.45, \text{ ou seja,}$$

$$h_A^{T_R=140} = 956.2 - 2.45 \times 67.4 = 791.1 \text{ mm}$$

$$\text{Analogamente, } h_B^{T_R=140} = 1038.2 - 2.45 \times 174.9 = 609.7 \text{ mm}$$

Tendo em conta as áreas de influência dos dois postos, o valor pretendido é, segundo o método de Thiessen,

$$h = \frac{791.1 \times 150 + 609.7 \times 60}{210} = 739.3 \text{ mm}$$

**Exercício 2.3:** Aplicação da lei de Gumbel a precipitações máximas anuais.

Dos registos diários de precipitações de um posto udométrico, relativos a dez anos de observações, recolheram-se os máximos anuais (em mm) que se apresentam no quadro seguinte.

Quadro 2.7 – Precipitações máximas anuais.

Ano	1998	1999	2000	2001	2002
Max. anual prec. diárias	35.1	28.7	45.8	52.4	70.0
Ano	2003	2004	2005	2006	2007
Max. anual prec. diárias	68.5	65.2	50.6	53.4	31.9

- Determine a probabilidade de ocorrência de uma precipitação diária igual ou superior à máxima precipitação encontrada, usando a distribuição de Gumbel.
- Determine a precipitação diária a que corresponde um período de retorno de 20 anos.

### Resolução

a) O papel de probabilidade que se apresenta de seguida evidencia que a variável aleatória  $M$ , que representa o máximo de precipitação, segue uma lei de Gumbel. Deixa-se ao cuidado do leitor a realização do teste de Gumbel.

Uma vez que esta amostra de máximos tem média  $\bar{x} = 50.16$  e desvio-padrão  $s = 14.95$ , tem-se  $\hat{\delta} = 0.7797 \times 14.95 = 11.69$  e  $\hat{\lambda} = \bar{x} - 0.45s = 50.16 - 0.45 \times 14.95 = 43.43$ . Assim, conclui-se que a variável  $M$ , subjacente a esta amostra, tem função de distribuição aproximadamente igual a

$$G(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - 43.43}{11.69}\right)\right), x \in \mathfrak{R}^+$$

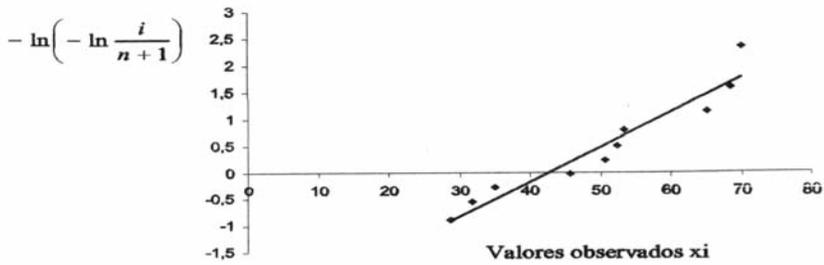


Figura 2.12 – Papel de probabilidade de Gumbel relativo à amostra de precipitações máximas anuais do Exercício 2.3.

Então,

$$\begin{aligned}
 P(M > 70) &= 1 - P(M \leq 70) = 1 - G(70) \\
 &= 1 - \exp\left(-\exp\left(-\frac{70 - 43.43}{11.69}\right)\right) = 0.0907
 \end{aligned}$$

ou seja, a probabilidade de ocorrência de precipitações diárias superiores ou iguais a 70 mm é aproximadamente igual a 0.09.

**b)** O objectivo é determinar o quantil elevado correspondente ao valor  $T_R = 20$  anos ou, equivalentemente, o quantil elevado que será excedido com probabilidade  $p = 1/20 = 0.05$ . Tal quantil é aproximadamente igual a

$$Q(0.95) = 43.43 - 11.69 \ln(-\ln 0.95) = 78.2$$

Assim, o valor da precipitação que será excedido, em média, apenas uma vez em 20 anos é, aproximadamente, igual a 78 mm.



## 3 CÁLCULO NUMÉRICO

*José Manuel Abreu*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra.

<sup>2</sup> Instituto do Mar – Centro do Mar e Ambiente.

### 3.1 Nota introdutória

A natureza é extremamente complexa. Para tentar entendê-la, criam-se modelos que seguem leis mais simples do que o sistema real, e obtêm-se resultados aproximados. Essas leis, que procuram simular a natureza, são, em geral, expressas matematicamente, dando origem a um modelo matemático. As formulações matemáticas, embora sejam simplificações do que se passa na realidade, são ainda assim, com frequência, demasiado complexas para serem tratadas analiticamente. De facto, existem numerosos problemas matemáticos para os quais não se conhece nenhuma solução analítica. Com a crescente acessibilidade a computadores de baixo custo e de alta capacidade de processamento, quase todas as actividades das Ciências Aplicadas e da Engenharia recorrem, cada vez mais, aos métodos e técnicas computacionais para a resolução de modelos matemáticos mais abrangentes, para os quais as soluções manuais são difíceis, ou impraticáveis.

Surge assim a Análise Numérica que, em traços gerais, tem como objectivo o estudo de processos de cálculo (algoritmos) que permitam resolver os problemas matemáticos, de forma aproximada, utilizando apenas as quatro operações aritméticas elementares (+, -, ×, ÷).

O tipo de problema resolvido por meio de cálculo numérico denomina-se problema numérico. Considera-se que um problema é numérico quando tanto os dados de entrada como os resultados do problema são conjuntos numéricos finitos. Quando o modelo matemático não conduz a um problema numérico, primeiramente é necessário transformá-lo num problema numérico. Os métodos numéricos constituem assim um conjunto de procedimentos que conduzem à aproximação de um problema matemático por um problema numérico, ou à resolução de um problema numérico. Os resultados obtidos por um método numérico designam-se por soluções numéricas. O algoritmo é a descrição sequencial dos passos que caracterizam um método numérico (Press *et al.*, 1992).

Este campo está directamente relacionado com a resolução de problemas matemáticos, tendo como ferramenta principal os computadores. Uma vez que os computadores representam e tratam a informação de forma discreta, a utilização dos mesmos na resolução de problemas matemáticos origina o aparecimento de um certo tipo de erros, que não surgiriam caso fosse possível usar aritmética exacta.

## 3.2 Erros na resolução numérica de problemas de Engenharia

### 3.2.1 Fonte e tipo de erros

A resolução de um problema de engenharia num computador utilizando um modelo numérico na resolução do correspondente modelo matemático produz, em geral, uma solução aproximada do problema. A introdução de erros na resolução do problema pode resultar de vários factores. Em função da sua origem, e das fases de resolução de um problema de engenharia, é possível considerar essencialmente quatro tipos de erros (Figura 3.1).

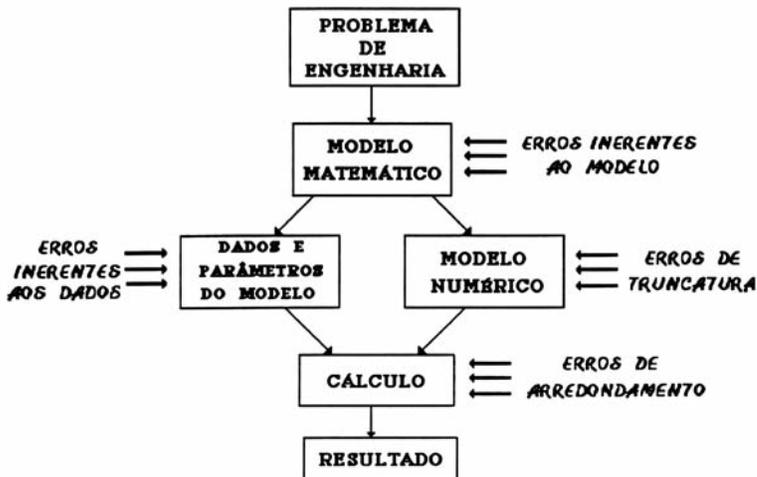


Figura 3.1 – Tipos de erros nas diferentes fases de resolução de um problema de Engenharia.

- 1) **Erros inerentes ao modelo** – Os modelos matemáticos raramente constituem uma representação exacta dos fenómenos reais. Na grande maioria dos casos são apenas modelos idealizados, já que ao estudar os fenómenos da natureza é-se forçado, regra geral, a aceitar certas

condições que simplificam o problema de forma a torná-lo tratável. Os melhores modelos são os que incluem apenas as características do problema real necessárias para reduzir os erros a um nível aceitável.

- 2) Erros inerentes aos dados** – Um modelo matemático não contém apenas equações e relações; também contém dados e parâmetros que, com frequência, são medidos experimentalmente, e portanto, aproximados. As aproximações nos dados podem ter grande repercussão no resultado final.
- 3) Erros de truncatura** – Muitos problemas matemáticos admitem soluções que apenas podem ser geradas construindo um processo infinito que possa ser descrito como limite da solução em questão. Por definição, um processo infinito não pode ser completado, por isso tem de ser truncado após certo número finito de operações. Esta substituição de um processo infinito por um processo finito (ou de um processo contínuo por um processo discreto) resulta num tipo de erro designado por erro de truncatura. Na maioria dos casos, o erro de truncatura é precisamente a diferença entre o modelo matemático e o modelo numérico.
- 4) Erros de arredondamento** – Quer os cálculos sejam efectuados manualmente, quer sejam obtidos por computador, utiliza-se uma aritmética de precisão finita, ou seja, apenas se pode considerar no cálculo um número finito de dígitos. O erro que resulta do desprezar dos outros dígitos e arredondar o número é designado por erro de arredondamento.

Os erros inerentes ao modelo e aos dados são erros iniciais do problema, exteriores ao processo de cálculo; erros de truncatura e de arredondamento ocorrem no processo de cálculo de uma solução numérica no computador. A análise destes dois últimos constitui o objectivo principal desta secção.

### **3.2.2 Erros de arredondamento e aritmética computacional**

Os números são a entidade fundamental dos métodos numéricos. O primeiro tipo de erro cometido nos cálculos surge exactamente do processo de representação dos números. O conjunto dos números reais é infinito, contínuo e ilimitado. O conjunto de números representáveis de forma exacta em computador, dada a utilização de um número limitado de dígitos naquela representação, é finito, discreto e limitado. Isto significa que, ao utilizar a aritmética computacional, se cometem constantemente erros de arredondamento na representação dos resultados das sucessivas opera-

ções realizadas. Para compreender a natureza destes erros, é necessário saber de que forma os números são armazenados e como são efectuadas as operações em computador.

Para armazenar informação, os computadores utilizam dispositivos físicos que podem assumir dois estados distintos. Esta característica privilegia a base 2 ou base binária para representação de números. Os números são armazenados de forma aproximada, utilizando um número fixo de *bits* (apócope do termo inglês *Binary Digit*) ou *bytes* (grupos de oito *bits*). Para o efeito, divide-se a memória em cadeias de *bits* denominadas palavras. O número de *bits* utilizado corresponde ao comprimento de palavra do computador. O utilizador pode escolher entre vários “tipos de dados”, que podem diferir no número de *bits* utilizados e também na forma como o número representado é armazenado: ponto fixo (ou “inteiro”), ou ponto flutuante (ou “real”).

### 3.2.2.1 Aritmética de ponto fixo (inteiros)

Um número inteiro é representado utilizando todos os bits da palavra de computador, com a salvaguarda de que deve reservar-se um *bit* para o sinal. Sendo finito o número de *bits* da palavra do computador, apenas inteiros num intervalo  $[N_{\min}, N_{\max}]$ , farão parte do respectivo sistema de numeração. O número de *bits* disponível para representar inteiros determina qual o maior (e menor) inteiro disponível. Embora todos os inteiros no intervalo  $[N_{\min}, N_{\max}]$  possuam representação exacta e também sejam exactas as operações aritméticas cujos operandos e resultados sejam inteiros naquela gama, inteiros fora de  $[N_{\min}, N_{\max}]$  não poderão ser representados. A tentativa de o fazer conduz ao conhecido erro de execução designado *por overflow*.

**Exemplo 3.1:** Representação de números inteiros.

Determine qual a gama de inteiros representáveis num computador com um comprimento de palavra de 32 *bits*.

#### Resolução

Numa palavra de 32 *bits*, é possível representar  $2^{32}$  inteiros distintos. Como  $2^{32}$  é um número par e o computador tem de reservar uma combinação para representar o zero, os números inteiros mínimo e máximo não são simétricos. Em geral,  $N_{\max} = |N_{\min}| - 1$ , obtendo-se assim a gama de inteiros representada na Figura 3.2.

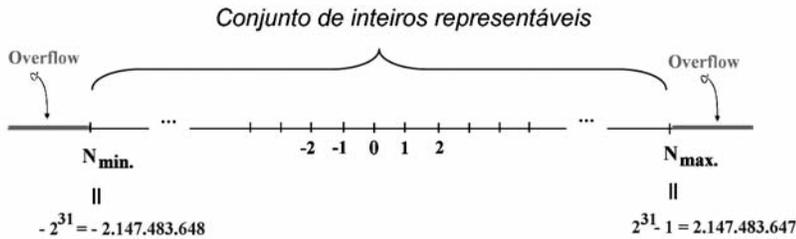


Figura 3.2 – Inteiros representáveis numa palavra de 32 *bits*.

### 3.2.2.2 Aritmética de ponto flutuante (reais)

Usando por facilidade de compreensão o sistema decimal, qualquer número real não nulo pode expressar-se mediante a denominada notação científica normalizada, na forma simbólica:

$$x = \pm 0.d_1 d_2 d_3 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^E \quad (3.1)$$

onde  $E$  é um inteiro (negativo, positivo ou zero), denominado expoente, e os dígitos  $d_1, d_2, \dots$  são dígitos decimais  $\{0,1,2,\dots,9\}$  em que, por unicidade da representação,  $d_1 \neq 0$ . Por exemplo,  $732.5051 = 0.7325051 \times 10^3$ ,  $-0.005612 = -0.5612 \times 10^{-2}$ .

Como alternativa a (3.1), o número real  $x$  distinto de zero também pode ser representado em notação científica normalizada na forma:

$$x = \pm M \times 10^E, \quad \frac{1}{10} \leq M < 1 \quad (3.2)$$

sendo constituído por três partes: um sinal (+ ou -), um número real (fracção pura)  $M$  no intervalo  $[1/10, 1[$  (denominado mantissa normalizada) e uma potência inteira de 10 (expoente).

Se o sistema posicional de numeração não for o decimal, mantêm-se os princípios expostos. Por exemplo, a correspondente representação no sistema binário é:

$$x = \pm M \times 2^E, \quad \frac{1}{2} \leq M < 1 \quad (3.3)$$

em que a mantissa  $M$  deverá ser expressa como uma sequência de *bits* (zeros ou uns) na forma:  $M = (0.d_1 d_2 d_3 \dots)_2$  com  $d_1 \neq 0$  (logo  $d_1 = 1$ ).

A notação científica, tal como apresentada, não pode ser implementada em computador, pois, para representar todos os números reais, a mantissa

e o expoente exigiriam um número infinito de dígitos. A notação científica é então modificada de forma a utilizar-se um número finito de dígitos ( $t$ ) para a mantissa e um número finito de dígitos ( $p$ ) para o expoente. Obtém-se desta forma o denominado sistema de numeração de ponto flutuante normalizado caracterizado por quatro parâmetros: a base ( $b$ ), que é um inteiro  $\geq 2$ , o número de dígitos da mantissa ( $t$ ) e os valores mínimo e máximo do expoente ( $E_{\min}$  e  $E_{\max}$ , respectivamente). Este sistema, habitualmente representado por  $F = F(b, t, E_{\min} \text{ e } E_{\max})$ , é constituído pelo subconjunto dos números racionais da forma:

$$x = \pm M b^E \quad \text{em que :} \quad \begin{cases} \frac{1}{b} \leq M \leq 1 - \frac{1}{b^t} \\ E_{\min} \leq E \leq E_{\max} \end{cases} \quad (3.4)$$

acrescido de uma representação especial para  $x = 0$ .

**Exemplo 3.2:** Representação de números reais.

Considere o sistema hipotético  $F(2, 3, -1, 2)$ . Determine quais os números que fazem parte desse sistema de ponto flutuante e a forma como os mesmos se situam ao longo da recta real.

### Resolução

Como  $b = 2$ ,  $x = \pm M \times 2^E$  em que a mantissa normalizada  $M$  satisfaz  $\frac{1}{2} \leq M < 1$ . As mantissas normalizadas serão da forma  $(.1xx)$ . Portanto, os números reais positivos representados neste sistema serão formados pelos seguintes quatro conjuntos de números, representados na Figura 3.3:

$$\begin{aligned} (.0100)_2 &= 1/4 & (.0101)_2 &= 5/16 & (.0110)_2 &= 6/16 & (.0111)_2 &= 7/16, & \text{para } E = -1 \\ (.100)_2 &= 1/2 & (.101)_2 &= 5/8 & (.110)_2 &= 6/8 & (.111)_2 &= 7/8, & \text{para } E = 0 \\ (1.00)_2 &= 1 & (1.01)_2 &= 5/4 & (1.10)_2 &= 6/4 & (1.11)_2 &= 7/4, & \text{para } E = 1 \\ (10.0)_2 &= 2 & (10.1)_2 &= 5/2 & (11.0)_2 &= 6/2 & (11.1)_2 &= 7/2, & \text{para } E = 2 \end{aligned}$$

Os restantes elementos de  $F$  são os simétricos dos anteriores e o número zero, perfazendo um total de 33 números. Verifica-se que os elementos de  $F$  são mais densos próximo de  $x_{\min} = 1/4$  e menos densos quando se aproximam de  $x_{\max} = 7/4$ . De salientar ainda a não existência de números nos intervalos  $[-1/4, 0]$  e  $[0, 1/4]$ . Tal como nos inteiros, um número superior a  $x_{\max}$  produz uma mensagem de erro de *overflow*; por outro lado, um número positivo inferior  $x_{\min}$  produz uma mensagem de erro chamada *underflow*.

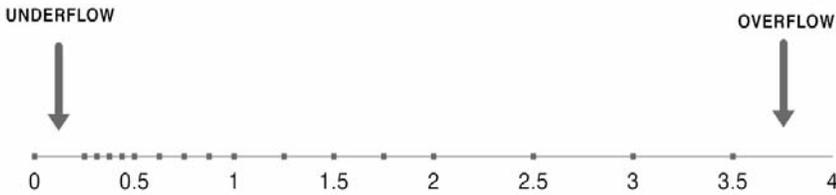


Figura 3.3 – Reais positivos que fazem parte do sistema  $F(2, 3, -1, 2)$ .

### 3.2.2.3 Erros na aritmética de ponto flutuante

Quando um real não pertence ao sistema de numeração de um computador, terá de ser aproximado por um número desse sistema. Considere-se um número real com um número infinito de dígitos na forma (3.1). O computador apenas guarda um número de  $k = t$  dígitos, pelo que não trabalhará com o número exacto  $x$ , mas com a sua representação em ponto flutuante  $fl(x)$ , dada, no caso mais simples, por

$$fl(x) = \pm 0.d_1d_2\dots d_k \times 10^E \quad (3.5)$$

onde se utilizou a técnica de representação aproximada designada por arredondamento por corte (*truncatura*), que consiste em desprezar os dígitos para além dos  $k$  primeiros. A operação de corte introduz sempre erros do mesmo sinal porque obtém sempre aproximações por defeito. Uma técnica alternativa é o arredondamento simétrico, que produz um resultado igual ao de corte se  $d_{k+1} < 5$  (arredondamento por defeito) e que adiciona 1 a  $d_k$  se  $d_{k+1} \geq 5$  (arredondamento por excesso). Por outras palavras, o arredondamento simétrico é equivalente a somar  $0.5 \times 10^{E-k}$  a  $x$  e depois cortar.

Designa-se por erro de arredondamento o erro produzido ao aproximar um número  $x$  pela sua representação em ponto flutuante  $fl(x)$  por qualquer dos dois métodos. Seguidamente, precisa-se melhor o conceito de erro em sentido mais geral.

Seja  $\bar{x}$  um valor aproximado de uma grandeza cujo valor exacto é  $x$ . Defina-se o erro de  $\bar{x}$  em relação a  $x$  como:  $\Delta x = x - \bar{x}$  e o erro absoluto de  $\bar{x}$  como o valor absoluto de  $\Delta x$ ,  $|\Delta x|$ .

#### Exemplo 3.3: Erro absoluto.

No cálculo do perímetro molhado de um colector, considerou-se  $\bar{\pi} = 22/7$  como aproximação de  $\pi = 3.14159265$  Qual o erro da referida aproximação?

## Resolução

Convertendo  $22/7$  na forma decimal, vem

$$\pi = 3.14159265\dots$$

$$\bar{\pi} = \underline{3.14285714\dots}$$

logo,  $\Delta\pi = -0.00126449\dots$

No exemplo anterior, as reticências indicam que os números possuíam mais dígitos, que não queremos ou não podemos continuar a representar. Uma situação deste tipo ocorre sempre que um número não pode ser expresso através de um número finito de casas decimais. Ao lidar com aproximações, é necessário estabelecer critérios para avaliar o respectivo grau de precisão. No Exemplo 3.3, no caso de se trabalhar com três casas decimais,

$$\bar{\pi} = 3.142 \quad \text{e} \quad \Delta\pi = 0.0004073\dots < 0.5 \times 10^{-3}$$

Diz-se que  $\bar{x}$  é um valor aproximado de  $x$  com precisão de  $k$  casas decimais correctas, se:

$$|\Delta x| = |x - \bar{x}| \leq 0.5 \times 10^{-k} \quad (3.6)$$

e que  $\bar{x} = \pm (0.d_1d_2\dots d_n)_{10} \times 10^E$  é uma aproximação de  $x$  com  $n$  algarismos significativos se:

$$|\Delta x| = |\bar{x} - x| \leq 0.5 \times 10^{E-n} \quad (3.7)$$

A importância de um erro pode, em geral, ser melhor apreciada se for comparada à quantidade  $x$  a ser aproximada (supondo  $x \neq 0$ ), i. e., utilizando o conceito de erro relativo:

$$r_x = \frac{\Delta x}{x}, \quad \text{ou} \quad |r_x| \quad (3.8)$$

O erro relativo expressa o erro como uma fracção de  $x$ , ou  $|x|$ , e está relacionado com o erro percentual, ou percentagem de erro, definido como  $100 \times |r_x|$ . O número de algarismos significativos de um valor aproximado pode relacionar-se com o respectivo erro relativo. De facto, como por definição:  $|r_x| = |\Delta x|/|x|$ , da Equação (3.7) verifica-se que se  $\bar{x}$  tem  $n$  algarismos significativos, então

$$|r_x| \leq (0.5 \times 10^{E-n}) / (0.1 \times 10^E) = 0.5 \times 10^{1-n} \quad (3.9)$$

Também é possível demonstrar que, no caso de

$$|r_x| \leq 0.5 \times 10^{-n} \quad (3.10)$$

então  $\bar{x}$  aproxima  $x$  com pelo menos  $n$  algarismos significativos.

Um indicador importante da precisão do sistema de ponto flutuante utilizado pelo computador reside em conhecer a diferença entre dois números consecutivos, a qual dependerá da grandeza dos números. Considerando o número positivo  $x_1 = M_1 \times 2^E$ , o número seguinte com o mesmo expoente que o computador armazena será  $x_2 = (M_1 \times 2^{-1}) \times 2^E$  (corresponde a aumentar em uma unidade o dígito menos significativo da mantissa). Logo, teremos  $|x_2 - x_1| = 2^{E-t}$ . Observe-se que qualquer número  $x = M \times 2^E$  no intervalo  $(x_1, x_2)$  será aproximado por arredondamento a  $fl(x) = x_1$  ou  $fl(x) = x_2$ , segundo o extremo do intervalo do qual esteja mais perto. O erro absoluto cometido é então  $|x - fl(x)| = |x_2 - x_1|/2 = 2^{E-t-1}$ . Claramente, o erro absoluto será tanto maior quanto maior for o valor de  $x$ . A cota para o erro relativo, pelo contrário, permanece constante. Com efeito,

$$|r_x| = \frac{|x - fl(x)|}{|x|} < \frac{|x_2 - x_1|}{2|x|} = \frac{2^{E-t-1}}{M \times 2^E} = \frac{1}{M} \times 2^{-t-1} \leq 2^{-t} \quad (3.11)$$

É fácil comprovar que a cota do erro relativo se multiplicaria por 2 no caso de se utilizar arredondamento por corte.

A diferença entre 1 e o menor número  $1 + \varepsilon$  que é maior que 1 mas que não se armazena como 1 é designado por épsilon da máquina, ou unidade de arredondamento da máquina. Denota-se  $\varepsilon_M$ . Para um computador que armazena mantissas normalizadas de  $t$  bits,

$$\varepsilon_M = \begin{cases} 2^{-t} & \text{se o computador arredonda ao armazenar} \\ 2^{1-t} & \text{se o computador trunca ao armazenar} \end{cases} \quad (3.12)$$

pelo que, de acordo com a Equação (3.11),  $\varepsilon_M$  é um majorante do erro relativo, ou seja, se  $fl(x)$  é a representação em  $F$  de um número real  $x$ , o seu erro relativo não excede  $\varepsilon_M$  ( $fl(x) = x(1 + \delta)$ ,  $|\delta| \leq \varepsilon_M$ ). É por isso fundamental conhecer o  $\varepsilon_M$  do sistema de ponto flutuante que se utiliza.

### 3.2.2.4 Propagação de erros. Erros nas operações aritméticas

É verdade que os erros de arredondamento são geralmente pequenos mas, quando repetidos em algoritmos longos e complexos, podem ter efeitos

catastróficos. São abundantemente citados na bibliografia dois exemplos notáveis: a explosão do míssil *Ariane* a 4 de Junho de 1996, gerada por um erro de *overflow* no computador de bordo; e o fracasso do míssil americano *Patriot* durante a Guerra do Golfo, em 1991, devido a um erro de arredondamento no cálculo da respectiva trajectória. Nesta secção aborda-se a forma como se propagam os erros de arredondamento no cálculo de funções.

Considere-se inicialmente o caso de uma função de uma variável e suponha-se que se pretende calcular o valor  $y = f(x)$  utilizando uma aproximação  $\bar{x}$  de  $x$ . Em geral,  $f(\bar{x})$  não coincide com  $f(x)$ . Seja, por definição,  $\bar{y} = f(\bar{x})$ . Qual o erro cometido nesta aproximação?

É claro que o erro  $|\Delta f| = |\Delta y| = |y - \bar{y}|$  dependerá do erro  $|\Delta x|$  e também da função  $f$ . Se a função  $f$  for continuamente diferenciável, a aplicação do teorema do valor médio permite escrever

$$|\Delta f| = |f'(\xi)| |\Delta x| \quad (3.13)$$

com  $\xi \in (\bar{x}, x)$ . Como este ponto não é conhecido com rigor, pode-se conhecer um majorante de  $|\Delta f|$  substituindo a derivada de  $f$  por um seu limite superior, ou seja,

$$|\Delta f| \leq |f'(x)|_{\max} |\Delta x| \quad (3.14)$$

Nesta expressão, o valor máximo da derivada é calculado no intervalo  $[\bar{x} - |\Delta x|, \bar{x} + |\Delta x|]$ .

A relação anterior é facilmente generalizável a uma função  $f$  que dependa de qualquer número de variáveis. Seja  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  uma função de  $R$  em  $R^n$ , continuamente diferenciável. A aplicação do teorema do valor médio para funções de  $n$  variáveis permite obter:

$$|\Delta f| \leq \sum_{i=1}^n \left( \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\max} |\Delta x_i| \right) \quad (3.15)$$

que constitui a chamada fórmula de propagação do erro absoluto. Com base na fórmula de propagação do erro, é fácil deduzir as regras para a propagação de erros nas quatro operações aritméticas. Assim,

$$\begin{aligned} |\Delta(x \pm y)| &\leq |\Delta x| + |\Delta y| \\ |\Delta(x \cdot y)| &\approx |\Delta x| |\bar{y}| + |\Delta y| |\bar{x}| \\ |\Delta(x/y)| &\approx \frac{|\Delta x| |\bar{y}| + |\Delta y| |\bar{x}|}{\bar{y}^2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

ou, para o erro relativo,

$$\begin{aligned}
 |r(x \pm y)| &\approx \left| \frac{x}{x \pm y} \right| |r_x| + \left| \frac{y}{x \pm y} \right| |r_y| \\
 |r(x \cdot y)| &\approx |r_x| + |r_y| \\
 |r(x/y)| &\approx |r_x| + |r_y|
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

A análise das expressões anteriores permite concluir que há dois tipos de situações que podem ser uma importante fonte de erros ao trabalhar com aritmética de ponto flutuante:

- a) a soma (subtracção) de um número muito pequeno a (de) um número de muito maior ordem de grandeza;
- b) a subtracção de números muito próximos.

Para efectuar um teste do caso (a), em computador, considere o exemplo:

**Exemplo 3.4:** Erro na soma de números de diferente grandeza.

Efectuar um programa de cálculo que adicione dez mil vezes o valor 0.00001 a uma unidade. Comparar o resultado obtido com o resultado exacto calculando a percentagem de erro.

**Resolução**

O valor obtido num PC (simples precisão) é: SUM=1.100136. O valor exacto é SUM=1.1. Logo,  $\frac{|1.1 - 1.100136|}{1.1} \times 100 \approx 0.0124\%$

Para explicar a causa dos erros de arredondamento, considere-se o cálculo de 1+0.00001 num computador em simples precisão. As representações binárias de 1 e de 0.00001 são, respectivamente,

$$(1)_{10} = (.1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000)_2 \times 2^1$$

$$(0.00001)_{10} = (.1010\ 0111\ 1100\ 0101\ 1010\ 1100)_2 \times 2^{-16}$$

A soma destes dois números resulta:  $(1)_{10} + (0.00001)_{10} =$   
 $= (.1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0101\ 0011\ \underline{1110\ 0010\ 1101\ 0110\ 0})_2 \times 2^1$

No entanto, os últimos dígitos da mantissa (sublinhados) terão que ser aproximados, já que a mantissa apenas pode armazenar 24 dígitos. Logo, o resultado do cálculo será armazenado como

$$(1)_{10} = (0.00001)_{10} \approx (.1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0101\ 0100)_2 \times 2^1,$$

que é equivalente a  $(1.0000\ 0001036)_{10}$ . Então, sempre que 0.00001 é somado a 1, o resultado tem um erro de 0.0000000136. Quando a adição é repetida dez mil vezes, é gerado um erro de exactamente dez mil vezes 0.0000000136.

Analise-se agora o segundo tipo de situação, referenciado por (b), que pode constituir uma importante fonte de erros. Da fórmula do erro relativo da subtracção, conclui-se que, se  $x$  e  $y$  são números muito próximos, a diferença  $x-y$  virá muito pequena e, conseqüentemente, o erro relativo da diferença dos dois números pode amplificar-se muito. Esta amplificação do erro relativo designa-se por cancelamento subtractivo e corresponde, portanto, à perda de algarismos significativos (e conseqüente aumento do erro relativo) resultante da subtracção de números muito próximos.

**Exemplo 3.5:** Cancelamento subtractivo.

O cancelamento subtractivo pode ocorrer no cálculo das raízes de uma equação do 2.º grau utilizando a fórmula habitual. De facto, se

$$b^2 \ll |4ac|, \text{ então } \sqrt{b^2 - 4ac} \approx |b|,$$

pelo que ocorre no numerador da fórmula resolvente um cancelamento subtractivo. Neste caso, é possível obviar o problema se se utilizar a seguinte forma alternativa para calcular as raízes da equação do 2.º grau:

$$x_1 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{se } b > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad \text{se } b < 0$$

A propagação do erro poderá também estar relacionada com o tipo de problema matemático que se pretende resolver. Em geral, diz-se que um problema matemático é mal condicionado se for muito sensível a pequenas alterações nos seus dados; se a solução apresenta fraca sensibilidade às variações nos dados, o problema diz-se bem condicionado.

**Exemplo 3.6:** Problema mal condicionado.

As raízes da equação de 2.º grau:  $x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{36} = 0$  são  $x_1 = x_2 = \frac{1}{6}$

Utilizando coeficientes arredondados a seis casas decimais correctas (pequena variação nos dados), obtém-se a equação:  $x^2 - 0.333333x + 0.027778 = 0$ , que não tem raízes reais!

Um método numérico diz-se instável se os erros se amplificam no decurso dos cálculos, de forma a afectar significativamente o resultado final; caso contrário, o método diz-se estável. Um método estável produz sempre bons resultados (aplicado a problemas bem condicionados).

### 3.2.3 Erros de truncatura

#### 3.2.3.1 Série de Taylor

Depois de se perceber como é que os computadores representam os números, a pergunta que se segue é: de que forma representam as funções? Como referido, os computadores apenas executam as quatro operações aritméticas básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Assim, por exemplo, um computador representa facilmente  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , pois esta função só envolve operações aritméticas básicas. Em contraste, funções transcendentais, como, por exemplo,  $\ln x = \int_1^x \frac{dy}{y}$ , envolvem, além das operações aritméticas básicas, outras operações, neste caso integração.

Uma das formulações matemáticas mais utilizadas no âmbito dos métodos numéricos para exprimir funções é a série de Taylor. Uma função  $f(x)$  contínua e com derivadas contínuas, de qualquer ordem, na vizinhança de  $x = x_0$ , pode ser representada de forma exacta e única no intervalo  $]x_0 - R, x_0 + R[$ , denominado intervalo de convergência, onde  $R$  é o raio de convergência da série para  $x = x_0$ , através da série de potências infinita, designada por representação em série de Taylor da função  $f(x)$ :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad (3.18)$$

No caso particular em que  $x = x_0 = 0$ , a expansão de Taylor é denominada série de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \quad (3.19)$$

A título de exemplo, as séries de Maclaurin de  $e^x$  e  $\cos x$  são, respectivamente:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (3.20)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (3.21)$$

Infelizmente, tal como um número finito de *bits* apenas consegue representar um número limitado de números reais, um número finito de números apenas pode representar um número limitado de funções. Embora muitas funções sejam representadas por sequências infinitas e operações aritméticas básicas, os computadores apenas armazenam sequências finitas. Assim, a sequência infinita que representa a função exacta terá de ser truncada para um número finito de termos. Por outro lado, muitos problemas envolvem não só funções contínuas como também operações sobre essas funções, tais como integração e diferenciação. Se as funções contínuas são substituídas por funções definidas discretamente, todos os operadores sobre funções contínuas também têm de ser substituídos por operadores sobre funções discretas.

A série de Taylor truncada após o termo de ordem  $n$  expressa-se como:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{p_n(x)} + R_n(x) \quad (3.22)$$

em que  $p_n(x)$  é designado por polinómio de Taylor de ordem  $n$  para  $f$  em torno de  $x_0$ .  $R_n(x)$  é o erro de truncatura (representa o erro da aproximação  $f(x) \approx p_n(x)$  ao truncar os termos de ordem  $n+1$  e superiores) associado a  $p_n(x)$ . Este erro pode ser expresso por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (3.23)$$

com  $\xi$  entre  $x$  e  $x_0$ . No caso de se verificar que  $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , a aproximação por polinómios de Taylor pode ser tão exacta quanto se queira, bastando para tal considerar um número suficientemente elevado de termos. Como, em geral, o valor de  $\xi$  não é conhecido, apenas é possível calcular um limite superior para  $R_n(x)$  pela consideração de um majorante para  $|f^{(n+1)}(\xi)|$ .

**Exemplo 3.7:** Aproximação de uma função.

A Figura 3.4 ilustra graficamente a forma como a função  $\cos x$  é aproximada no intervalo  $0 \leq x \leq \pi$ , utilizando diferentes polinómios  $p_k(x)$ ,  $k = 1, 2$  e  $3$ , obtidos truncando a série de Maclaurin (Equação 3.19).

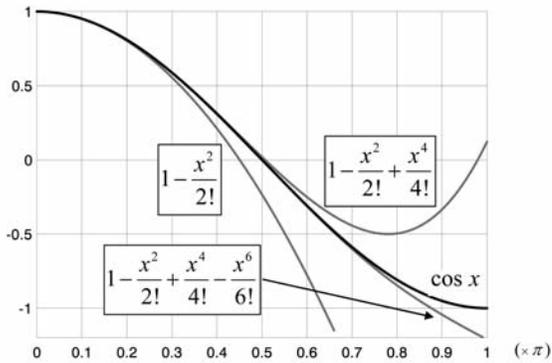


Figura 3.4 – Gráficos da função  $f(x) = \cos x$  e das aproximações obtidas por (3.19) para  $k=1, 2$  e  $3$ .

Na prática, tal como no exemplo anterior, utiliza-se a expansão em série de Taylor, truncando a série infinita, ou seja, usando uma soma parcial. Este tipo de erro, motivado por truncar uma série (erro de truncatura), é inerente à maioria dos métodos numéricos.

### 3.2.3.2 Discretização

Um dos conceitos fundamentais do cálculo numérico é o de discretização. Consiste na substituição de um problema contínuo (por exemplo, cálculo de uma derivada ou integral) por um problema discreto. Supondo que se pretende calcular o perímetro de uma determinada elipse com eixo maior e menor  $a$  e  $b$ , respectivamente, esse perímetro será dado de forma analítica pelo integral

$$P = \oint ds = \int_0^{2\pi} (a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) d\theta \quad (3.24)$$

que é um integral elíptico de segundo tipo, e não admite solução analítica. Por isso é que ao contrário do caso do círculo para o qual

$$P = \oint ds = \int_0^{2\pi} r d\theta = [r\theta]_0^{2\pi} = 2\pi R \quad (3.25)$$

não se conhece a fórmula analítica do perímetro de uma elipse. O cálculo da expressão (3.24) terá de ser efectuado numericamente. Como se verá no subcapítulo 3.5, o problema contínuo do cálculo do integral será substituído pelo problema discreto do cálculo de uma soma, introduzindo um erro de discretização.

**Exemplo 3.8:** Exemplo simples do conceito de discretização.

Considere que se efectua o cálculo aproximado do integral (Equação 3.25) pelo processo que se indica na Figura 3.5, isto é, dividindo o perímetro do círculo em  $n$  partes iguais através da construção gráfica que se ilustra (discretização do domínio). Como  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  e o lado,  $l$ , de cada triângulo é dado por  $l = 2R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , o valor aproximado do perímetro do

$$\text{círculo é: } P_{\text{aprox.}} = nl = 2\pi R \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2}$$

Como se verifica na Figura 3.5(b), quando  $n \rightarrow \infty$ , o perímetro calculado numericamente tende para o valor exacto ( $P_{\text{aprox.}} \rightarrow P$ ). No entanto, qualquer que seja o valor  $n$  (finito), obtém-se sempre um valor aproximado para o perímetro do círculo devido ao erro de discretização (truncatura) introduzido.

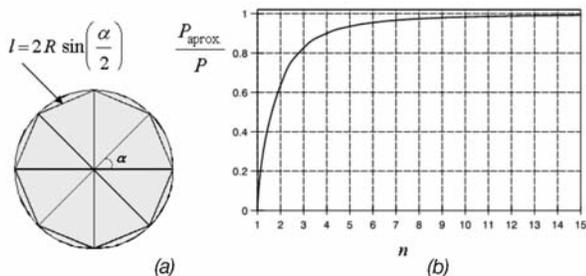


Figura 3.5 – Determinação aproximada do perímetro de um círculo: (a) discretização efectuada; (b) convergência para o valor exacto quando  $n$  aumenta.

### 3.2.3.3 Métodos iterativos

Outra das ideias fundamentais dos métodos numéricos passa pela iteração ou aproximação sucessiva. Num sentido amplo, iteração significa repetição de um processo. Um método iterativo é um método numérico em que a solução do problema matemático é o limite de uma sequência

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots \quad (3.26)$$

definida por iteração, ou seja, através de uma equação iterativa.

O caso mais geral de uma fórmula de iteração estacionária de  $n$  pontos é:

$$x_k = g(x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-n}), \quad k = n, n+1, \dots \quad (3.27)$$

em que a função de iteração  $g$  será, em geral, não apenas função de  $x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-n}$  mas também de valores de  $f(x)$  e das suas derivadas em um ou mais desses pontos.

O caso mais simples corresponde às fórmulas de iteração estacionárias de um ponto que, como se observa no subcapítulo 3.3, têm a forma:

$$x_k = g(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

Cada passo denomina-se iteração. O índice  $k$  indica a iteração presente. O processo tem que ser iniciado com uma aproximação inicial,  $x_0$ .

Dada a aproximação inicial  $x_0 \in [a, b]$ , um método iterativo diz-se convergente se a sucessão das sucessivas aproximações (Equação 3.26) converge para  $\alpha$ , ou seja,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$ . Como os meios de cálculo são limitados, os processos iterativos devem ser terminados ao fim de um número finito de iterações. Na prática, o processo termina quando uma certa precisão for atingida. O erro de truncatura cometido corresponde à diferença entre o valor obtido aquando da paragem do processo iterativo e o valor exacto que se alcançaria no limite (caso se tenha convergência).

Definição (ordem de convergência): Se um método iterativo é convergente e existir um número  $p \geq 1$  e uma constante  $C > 0$  tais que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\Delta x_k|}{|\Delta x_{k-1}|^p} = C \quad (3.29)$$

diz-se que o método converge com ordem de convergência  $p$ . Se  $p = 1$ , a convergência diz-se de primeira ordem ou linear; se  $p = 2$ , de segunda ordem ou quadrática, etc. A constante  $C$  é denominada constante de erro assintótico.

A expressão (3.29) é frequentemente escrita na forma assintótica

$$|\Delta x_k| \approx C |\Delta x_{k-1}|^p \quad (3.30)$$

Quanto maior a ordem de convergência de um método iterativo e menor a respectiva constante de erro assintótico, maior a respectiva rapidez de convergência (menor número de iterações necessárias para atingir uma dada precisão). Tal não significa que o método seja necessariamente mais eficiente, pois a eficiência dependerá, também, do esforço computacional exigido em cada iteração.

### 3.3 Resolução de equações não lineares

Dada uma função real de variável real, não linear (algébrica ou transcendente)  $f(x)$ , diz-se que um número  $\alpha$  é um zero da função ou uma raiz da equação

$$f(x) = 0 \quad (3.31)$$

se, e somente se,  $f(\alpha) = 0$ . As raízes de uma equação podem ser reais ou complexas. Esta secção limita-se à determinação de raízes reais. Geometricamente, uma raiz real de  $f(x) = 0$  é representada pela abcissa  $x = \alpha$ , do ponto de intersecção do gráfico da função  $f(x)$  com o eixo OX.

Uma equação não linear pode ter ou não raízes reais. No primeiro caso, pode haver apenas uma raiz ou várias. Por exemplo, a equação quadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  não tem raízes reais se  $b^2 < 4ac$ ; caso contrário terá duas raízes. Naturalmente, se  $b^2 = 4ac$ , as duas raízes serão idênticas (raiz de multiplicidade 2 ou raiz dupla). Uma raiz é simples se  $f'(\alpha) \neq 0$ , e múltipla no caso contrário.

As equações não lineares, excepto em casos particulares, não podem ser resolvidas através de métodos directos, *i. e.*, algoritmos que permitem obter uma solução num número finito e predeterminado de passos de cálculo (se o computador trabalhasse com aritmética exacta, ou seja, se não existissem erros de arredondamento, a solução obtida seria exacta). Considere-se o exemplo de uma equação polinomial

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (3.32)$$

Para equações de grau menor ou igual a 4, todas as raízes podem ser obtidas directamente por fórmulas algébricas, embora para equações de grau 3 e 4 esse não seja o procedimento mais eficiente. Para  $n > 4$ , há que recorrer a métodos iterativos.

A implementação computacional de qualquer método iterativo, como se viu, apresenta três componentes essenciais:

- i) uma estimativa inicial da solução;
- ii) um processo para calcular uma nova aproximação melhorada – fórmula recursiva ou de iteração;
- iii) um critério para terminar o processo de actualização – critério de paragem ou de convergência.

A ligação entre as diferentes componentes deste processo é representada através de um diagrama de blocos na Figura 3.6.

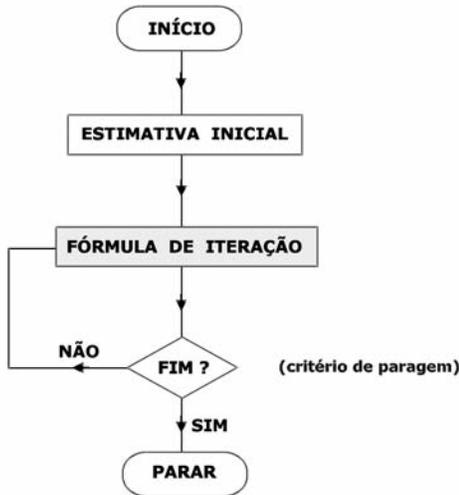


Figura 3.6 – Implementação de um algoritmo iterativo.

A aplicação de uma fórmula de iteração do tipo (3.28) requer o conhecimento de uma aproximação inicial  $x_0$  da solução. Frequentemente,  $x_0$  pode ser obtido de imediato. É, por exemplo, o caso em que o problema permite uma previsão do resultado. Quando tal não é possível, ou ainda, no caso mais geral de se pretenderem obter as várias raízes da equação, é necessário obter essa estimativa numa fase prévia. Isso pode ser feito recorrendo ao estudo gráfico e teórico de  $f$ .

A necessidade de ter ou não aproximações iniciais “suficientemente próximas” da raiz pretendida,  $\alpha$ , permite distinguir os métodos de convergência local, nos quais  $x_0$  tem que estar suficientemente próximo de  $\alpha$ , e os métodos de convergência global, em que a convergência não está dependente da melhor ou pior aproximação inicial  $x_0$ .

Após a obtenção de uma aproximação inicial, que algumas vezes pode ser grosseira, vai-se sucessivamente refinando a aproximação até que a mesma esteja tão próxima da raiz da equação quanto seja requerido pelo problema em análise. As condições impostas para que esta situação se verifique definem o chamado critério de paragem (ou convergência) do processo iterativo [por exemplo,  $x_0$  estar próximo de  $\alpha$  ou  $f(x_k)$  ser próximo de 0, ou um número máximo de iterações].

Os métodos iterativos diferenciam-se entre si pela forma como são geradas as sucessões para obter a solução da equação  $f(x) = 0$  a resolver. Apresentam-se de seguida alguns exemplos.

### 3.3.1 Método da bissecção

Este é um dos métodos mais simples para calcular raízes reais de uma equação não linear. Está baseado no conhecido teorema de Bolzano, segundo o qual, se uma função  $f$  é contínua num intervalo  $[a, b]$  e tem sinais opostos nos seus extremos ( $f(a)f(b) < 0$ ), então existe pelo menos um valor  $\alpha \in (a, b)$  tal que  $f(\alpha) = 0$ .

A essência do método consiste em construir uma sequência encaixada de subintervalos  $I_k = [a_k, b_k] \subset I = [a, b]$  por divisões sucessivas do intervalo ao meio, assegurando sempre que  $f(a_k)f(b_k) < 0$ . Desta forma, a raiz vai sendo sucessivamente confinada a um intervalo com uma amplitude cada vez menor.

Concretizando, em cada iteração  $k$ , calcula-se o ponto médio do intervalo:

$$x_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

e o valor da função nesse ponto  $f(x_k)$ . Se  $f(x_k) = 0$ , o processo termina, pois  $\alpha = x_k$ . Caso contrário, o ponto médio  $x_k$  irá substituir um dos valores extremos do intervalo ( $a_k$  ou  $b_k$ ) de acordo com:

$$\text{Se: } f(x_k)f(a_{k-1}) \begin{cases} > 0 & a_k = x_k \quad \text{e} \quad b_k = b_{k-1} \\ < 0 & a_k = a_{k-1} \quad \text{e} \quad b_k = x_k \end{cases} \quad (3.34)$$

O processo de divisão do intervalo ao meio e a escolha do subintervalo para a iteração seguinte repetem-se até o critério de paragem ser verificado. Este processo iterativo encontra-se esquematicamente ilustrado na Figura 3.7.

O método é sempre convergente desde que  $f(a)f(b) < 0$  (método de convergência global), mas a convergência pode ser muito lenta.

Após  $k$  iterações, a raiz estará contida em  $I_k = [a_k, b_k]$  de amplitude

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^2} = \dots = \frac{b_0 - a_0}{2^k} = \frac{b - a}{2^k} \quad (3.35)$$

que depende apenas da amplitude do intervalo inicial  $(b - a)$  e não da expressão analítica da função  $f(x)$ . Assim, o erro cometido após  $k$  bissecções (iteraões) é majorado por

$$|\Delta x_k| = |\alpha - x_k| \leq \frac{b - a}{2^k} \quad (3.36)$$

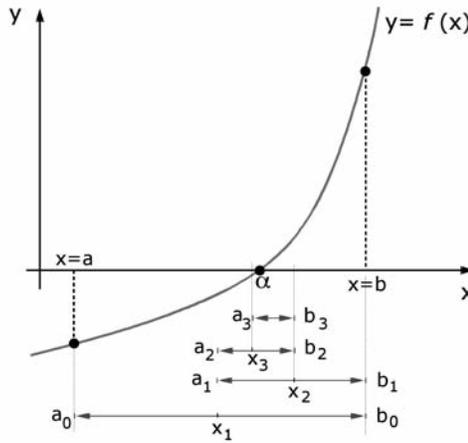


Figura 3.7 – Método da bissecção.

Definida a precisão  $\delta$  pretendida no cálculo da raiz, é possível especificar *a priori* o número de iterações  $k$  necessárias para atingir esse objectivo. Concretamente, supondo que se pretende garantir que  $|\alpha - x_k| \leq \delta$ , basta impor  $\frac{b-a}{2^k} \leq \delta$ , de onde se obtém

$$k \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\delta}\right)}{\ln 2} \quad (3.37)$$

Tomando para  $k$  o primeiro inteiro que verifica a condição anterior, existe a garantia de que  $x_k$  satisfaz a precisão desejada.

Da expressão (3.36), deduz-se imediatamente que

$$0 \leq \frac{|\Delta x_k|}{|\Delta x_{k-1}|} \leq \frac{1}{2} \quad (3.38)$$

o que mostra, recordando as expressões (3.29) ou (3.30), que o método da bissecção converge linearmente, com razão de convergência igual ou menor a 0.5.

**Exemplo 3.9:** Método da bissecção.

Num canal de secção rectangular de 2,5 m de largura e declive 0.0009, com revestimento de betão, escoa-se o caudal de 3 m<sup>3</sup>/s. Determine utilizando a expressão de Manning ( $K = 75 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ ) a altura do escoamento uniforme com três casas decimais correctas.

## Resolução

A fórmula de Manning  $Q = K A R^{2/3} i^{1/2} = K A \left(\frac{A}{P}\right)^{2/3} i^{1/2}$  pode escrever-se:

$$A = \left(\frac{Q}{K i^{1/2}}\right)^{0.6} P^{0.4}. \text{ Para canal rectangular: } A = bh \text{ e } P = b + 2h.$$

Assim,  $f(h) = 2.5h - \left(\frac{3.0}{75 \times 0.0009^{1/2}}\right)^{0.6} (2.5 + 2h)^{0.4} = 0$ , é a equação não

linear cuja solução permite calcular a altura uniforme. Arbitrando  $I_0 = [0.5, 1.0]$ , a utilização das Equações (3.33) e (3.34) possibilita a obtenção dos resultados apresentados no Quadro 3.1.

No caso de previamente se pretender saber qual é o número de iterações a efectuar, a aplicação da condição (3.37) permite obter:

$$k \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\delta}\right)}{\ln 2} = \frac{\ln 1000}{\ln 2} \approx 9.96, \text{ o que implica 10 iterações, coincidente}$$

com o resultado apresentado no Quadro 3.1.

Quadro 3.1 – Resultados do processo iterativo (método da bissecção).

$k$	$a_{k-1}$	$b_{k-1}$	Sinal de $f(a_{k-1})$	$x_k$	Sinal de $f(x_k)$
1	0.500000	1.000000	-	0.750000	-
2	0.750000	1.000000	-	0.875000	+
3	0.750000	0.875000	-	0.812500	-
4	0.812500	0.875000	-	0.843750	+
5	0.812500	0.843750	-	0.828125	-
6	0.828125	0.843750	-	0.835938	-
7	0.835938	0.843750	-	0.839844	-
8	0.839844	0.843750	-	0.841797	-
9	0.841797	0.843750	-	0.842773	-
10	0.842773	0.843750	-	0.843262	-

### 3.3.2 Método do ponto fixo

É sempre possível transformar algebricamente de inúmeras (infinitas) formas a equação  $f(x) = 0$  numa outra equação equivalente do tipo

$$x = g(x) \tag{3.39}$$

Uma solução da Equação (3.39) é dita um **ponto fixo** de  $g$ , ou seja,  $\alpha$  é um ponto fixo de  $g$  se e só se  $\alpha = g(\alpha)$  (o ponto permanece invariante sob a transformação  $g$ ). É claro que se  $\alpha$  é um ponto fixo de  $g$ , então será zero de  $f$  e vice-versa, já que a Equação (3.39) é equivalente a  $f(x) = 0$ .

Dada uma aproximação inicial  $x_0$ , as subseqüentes aproximações são dadas por (fórmula de iteração)

$$x_k = g(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \tag{3.40}$$

A Figura 3.8 ilustra o significado geométrico deste processo iterativo para dois casos com comportamentos distintos: um em que se verifica convergência, e outro em que o processo diverge.

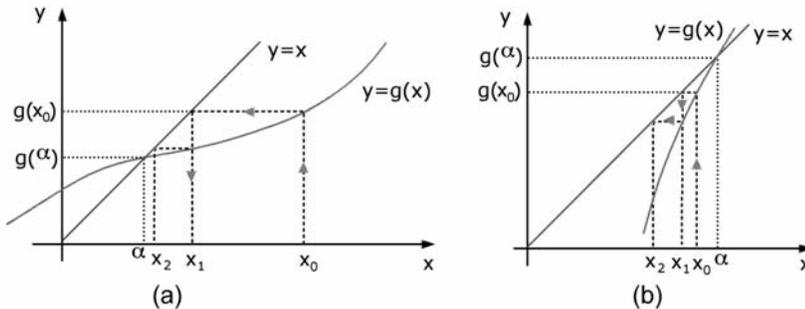


Figura 3.8 – Método do ponto fixo: (a) convergente; (b) divergente.

Como foi referido, há infinitas possibilidades de escolher  $g(x)$  a partir de  $f(x) = 0$ . A forma geral de  $g(x)$  é:

$$g(x) = x - h(x)f(x) \tag{3.41}$$

sendo  $h(x)$  uma função contínua, não nula em  $[a,b]$ . Para diferentes, mas apropriadas, funções  $h(x)$ , ter-se-á diferentes funções de iteração  $g(x)$  e diferentes métodos iterativos.

As perguntas óbvias neste momento são:

- Como encontrar uma função  $g(x)$  adequada?
- Sob que condições o método é convergente?
- Com que rapidez converge?

Comece-se por tentar responder a estas questões através da análise dos exemplos que se seguem (Abreu e Antunes do Carmo, 2008).

**Exemplo 3.10:** Funções de iteração do método do ponto fixo.

Dada a equação:  $f(x) = x^3 - 7x - 6 = 0$ , verifique que as funções  $g(x)$  abaixo listadas podem ser utilizadas como funções de iteração do método do ponto fixo:

$$(a) \ g_1(x) = \frac{x^3 - 6}{7} \ ; \ (b) \ g_2(x) = \frac{7x + 6}{x^2} \ ; \ (c) \ g_3(x) = \frac{2x^3 + 6}{3x^2 - 7}.$$

### Resolução

A forma de obter as duas primeiras é imediata: no primeiro caso,  $h(x) = -1/7$ ; no segundo,  $h(x) = 1/x^2$ . Em relação a (c), embora seja fácil comprovar ser correcta ( $x = g(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$ ), a forma como foi obtida será melhor compreendida posteriormente.

**Exemplo 3.11:** Convergência/divergência do método do ponto fixo.

A equação utilizada no exemplo anterior pode escrever-se na forma equivalente  $x^3 - 7x - 6 = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$ , pelo que terá três raízes reais  $\alpha_1 = -2$ ,  $\alpha_2 = -1$  e  $\alpha_3 = 3$ . Efectuar o processo iterativo, utilizando o método do ponto fixo e as três funções de iteração ( $g_1$ ,  $g_2$ , e  $g_3$ ), para determinar valores aproximados das duas raízes negativas  $\alpha_1 = -2$  e  $\alpha_2 = -1$ .

### Resolução

O processo iterativo foi iniciado com  $x_0 = -2.2$  (para a raiz  $\alpha_1 = -2$ ) e  $x_0 = -1.1$  (no caso da raiz  $\alpha_2 = -1$ ).

Os Quadro 3.2 e Quadro 3.3 apresentam os resultados daquele processo. As condições de paragem utilizadas foram:

$$|x_{i+1} - x_i| \leq 10^{-5} \quad (\text{convergência})$$

$$|x_{i+1}| > 10^5 \quad (\text{divergência})$$

Número máximo de iterações = 20

Os resultados do Exemplo 3.11 permitem concluir que as três funções de iteração não são igualmente bem sucedidas, originando processos iterativos com distintos comportamentos. Ao usar  $g_3(x)$ , os processos são convergentes tanto para  $\alpha_1$  como para  $\alpha_2$ . A função  $g_1(x)$  dá origem a um processo divergente para  $\alpha_1$ , embora permita calcular  $\alpha_2$ . Pelo contrário, a função  $g_2(x)$  origina um processo convergente para a raiz  $\alpha_1$ , e não permite calcular  $\alpha_2$  - iniciando o cálculo com  $\alpha_0 = -1.1$  (próximo da raiz  $\alpha_2 = -1$ ), o processo iterativo converge para  $\alpha_1 = -2$  (i. e., diverge de  $\alpha_2 = -1$ ).

Quadro 3.2 – Resultados do processo iterativo para a raiz  $\alpha_1 = -2$ .

k	g(x)		
	$g_1(x) = \frac{x^3 - 6}{7}$	$g_2(x) = \frac{7x + 6}{x^2}$	$g_3(x) = \frac{2x^3 + 6}{3x^2 - 7}$
0	-2.20000	-2.20000	-2.20000
1	-2.37829	-1.94215	-2.03404
2	-2.77888	-2.01356	-2.00130
3	-3.92271	-1.99656	-2.00000
4	-9.48022	-2.00086	-2.00000
5	-12.25766	-1.99979	
6	-2.6 E+5	-2.00005	
7		-1.99999	
8		-2.00000	
9		-2.00000	

Quadro 3.3 – Resultados do processo iterativo para a raiz  $\alpha_2 = -1$ .

k	g(x)		
	$g_1(x) = \frac{x^3 - 6}{7}$	$g_2(x) = \frac{7x + 6}{x^2}$	$g_3(x) = \frac{2x^3 + 6}{3x^2 - 7}$
0	-1.10000	-1.10000	-1.10000
1	-1.04729	-1.40496	-0.99050
2	-1.02124	-1.94270	-0.99993
3	-1.00930	-2.01344	-1.00000
4	-1.00402	-1.99659	
5	-1.00173	-2.00085	
6	-1.00074	-1.99979	
7	-1.00032	-2.00005	
8	-1.00014	-1.99999	
9	-1.00006	-2.00000	
10	-1.00003	-2.00000	
11	-1.00001		
12	-1.00000		

A explicação dos resultados anteriores é dada pelo seguinte teorema:

**Teorema da contração ou do ponto fixo:** se existir um intervalo fechado  $I, I = [a, b]$  e uma função  $g$  tal que:

i)  $x \in I \Rightarrow a \leq g(x) \leq b$

ii)  $g$  é diferenciável e  $|g'(x)| < 1$ , para todo  $x \in I$

então existe um único ponto fixo  $\alpha$  em  $I$ , e a sucessão gerada por  $x_k = g(x_{k-1})$  converge para  $\alpha$  qualquer que seja a escolha do valor inicial  $x_0$  em  $I$ .

Por outro lado, verificando-se a convergência, pode demonstrar-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\Delta x_k|}{|\Delta x_{k-1}|} = |g'(\alpha)| \quad (3.42)$$

Consequentemente, se  $|g'(\alpha)| \neq 1$ , o método converge linearmente ( $p=1$ ) com constante de erro assintótico  $C = |g'(\alpha)|$ . O resultado anterior mostra que a convergência do método do ponto fixo será tanto mais rápida quanto menor o valor de  $|g'(\alpha)|$ . Os resultados anteriores resumem-se esquematicamente na Figura 3.9.

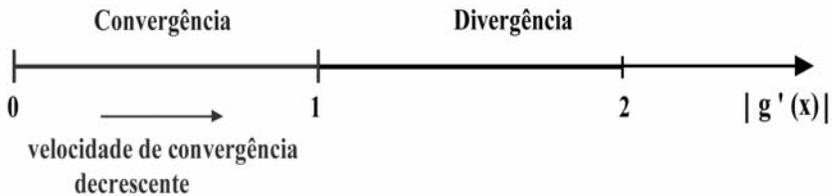


Figura 3.9 – Ilustração gráfica da convergência do método do ponto fixo.

### 3.3.3 Método de Newton-Raphson

O método de Newton pode ser interpretado geometricamente de forma simples (Figura 3.10). Seja  $x_0$  uma aproximação inicial para um zero de  $f(x)$ . Considere-se a recta tangente a  $f(x)$  no ponto de abcissa  $x_0$ . Na vizinhança de  $x_0$ , esta recta deverá “aproximar razoavelmente” o gráfico de  $f$  (aproximação local de uma função não linear por uma função linear), pelo que o ponto de intersecção desta tangente com o eixo das abcissas deverá estar próximo da raiz  $\alpha$ . A abcissa deste ponto será, então, tomada como uma nova aproximação,  $x_1$ , para  $\alpha$ .

Em concreto, a equação da tangente à curva  $y=f(x)$  que passa pelo ponto de abcissa  $x_0$  é

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (3.43)$$

Fazendo  $y = 0$  na equação anterior, a nova aproximação para a raiz,  $x_1$ , será dada por

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (3.44)$$

Uma forma alternativa de obter a equação anterior é verificar (Figura 3.10) que  $\text{tg } \beta = f(x_0) / (x_0 - x_1)$ .

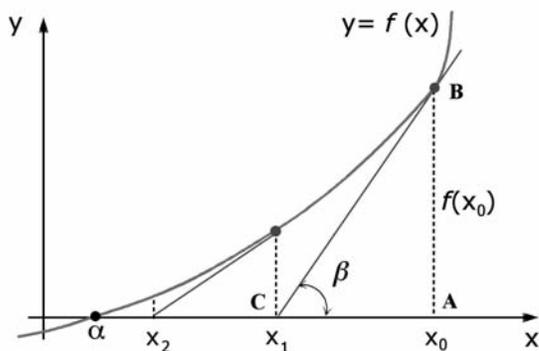


Figura 3.10 – Ilustração gráfica do método de Newton-Raphson.

Naturalmente, o processo anterior pode ser repetido, obtendo-se uma sequência de pontos definidos por

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.45)$$

que corresponde à fórmula iterativa do método de Newton-Raphson.

Comparando as Equações (3.45) com (3.40), conclui-se que o método de Newton-Raphson constitui um caso particular do método do ponto fixo, com uma função de iteração  $g(x)$  definida por

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (3.46)$$

A função  $g_3(x)$  do Exemplo 3.10 e do Exemplo 3.11, que conduziu aos melhores resultados, pode ser obtida a partir da Equação (3.46). Por que razão terá tido aquela função de iteração um desempenho tão bom? A função de iteração  $g(x)$  do método de Newton tem duas propriedades importantes: se  $\alpha$  é uma raiz de  $f(x) = 0$  e  $f'(\alpha) \neq 0$  ou seja, se  $\alpha$  é uma raiz simples, então:

$$g(\alpha) = \alpha \quad \text{e} \quad g'(\alpha) = 0 \quad (3.47)$$

De facto, como:  $g'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$ , esta anula-se para  $x = \alpha$ , pois no

numerador  $f(\alpha) = 0$ . Se efectuarmos a hipótese que  $f$  e as duas primeiras derivadas são contínuas, logo  $g'$  será também contínua. Como  $g'(\alpha) = 0$ , por continuidade de  $g'$ , existirá sempre um intervalo  $I$  contendo  $\alpha$  tal que

$$|g'(x)| < 1, \quad \text{para } x \in I \quad (3.48)$$

Pode-se então enunciar o seguinte teorema.

**Teorema de convergência local:** se  $f$  for uma função contínua, com primeira e segunda derivadas também contínuas, então a aplicação do método de Newton para encontrar uma raiz simples,  $\alpha$ , é garantida no caso de se partir de uma aproximação inicial,  $x_0$ , suficientemente próxima da raiz.

Além disso, o método tem convergência quadrática ( $p = 2$ ), pois demonstra-se (Pina, 1995) que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\Delta x_k|}{|\Delta x_{k-1}|^2} = \frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|} \quad (3.49)$$

O resultado anterior explica a rápida convergência do método de Newton-Raphson no Exemplo 3.11.

Como, na prática, a expressão “suficientemente próxima da raiz” do teorema de convergência local não é fácil de quantificar, é preferível garantir a convergência para um intervalo  $I = [a, b]$ .

**Teorema de convergência global** (condições suficientes de convergência): se  $f$  for uma função contínua em  $I = [a, b]$  e:

$$(1) f(a)f(b) < 0$$

$$(2) f'(x) \neq 0, \forall x \in I$$

$$(3) f''(x) \geq 0 \text{ ou } f''(x) \leq 0, \forall x \in I$$

$$(4) \left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| \leq (b - a) \quad \text{e} \quad \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| \leq (b - a)$$

Então  $\forall x_0 \in I = [a, b]$  a sequência  $\{x_k\}_{k=1,2,\dots}$  gerada pelo método de Newton converge para  $\alpha$ , único zero de  $f$  em  $I = [a, b]$ .

Verificadas as condições de convergência, embora esta esteja garantida, independentemente da escolha do valor de  $x_0 \in [a, b]$ , o modo como se processa é diferente quando se inicia o cálculo de um lado ou do outro da raiz ( $x_0 = a$  ou  $x_0 = b$ ). Há um extremo, dito extremo favorável, que conduz a uma sucessão de aproximações monótona (convergência lateral para a raiz). Geometricamente, corresponde ao extremo que fica no lado convexo da curva, ou seja, que satisfaz:

$$f(x_0)f''(x_0) > 0 \quad (3.50)$$

### 3.3.4 Método da secante

Uma alternativa ao método de Newton utilizado, por exemplo, se a derivada da função  $f$  não puder ser calculada explicitamente, ou se o respectivo cálculo envolve considerável esforço computacional, é o chamado método da secante.

Uma estimativa de  $f'(x_k)$  consegue-se pela expressão

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad (3.51)$$

que corresponde, em termos gráficos, a aproximar localmente a curva  $y = f(x)$  por uma sua secante (ver Figura 3.11). Substituindo a expressão anterior

na fórmula iterativa  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  do método de Newton-Raphson, obtém-se

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \left\{ \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.52)$$

que constitui a fórmula iterativa do método da secante.

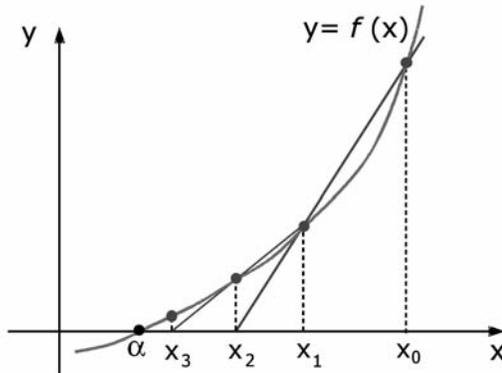


Figura 3.11 – Ilustração gráfica do método da secante.

Este método necessita de duas aproximações iniciais:  $x_0$  e  $x_1$  (fórmula de iteração de dois pontos,  $x_{k+1} = g(x_1, x_{k-1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ), embora efectue apenas uma avaliação da função em cada passo do processo iterativo (o método de Newton-Raphson requer avaliação da função e da derivada). O preço a pagar pela aproximação numérica da derivada é que a convergência deixa de ser quadrática passando apenas a ser supralinear, já que  $p = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$  (Pina, 1995).

### 3.4 Aproximação de funções

Até ao momento analisou-se o problema de aproximar números (zeros de uma função). Considera-se agora o problema de aproximar funções. Existem várias maneiras através das quais uma função contínua pode ser representada de forma aproximada por um conjunto finito de valores. A mais óbvia é através de um conjunto de pontos (amostras), e será esta a representação assumida nesta secção. No entanto, é importante assinalar que existem outras alternativas (geralmente mais complicadas, mas às vezes com vantagens significativas). A forma pela qual a função é representada afecta o modo como posteriormente as derivadas e os integrais poderão ser aproximados.

#### 3.4.1 Interpolação polinomial

O método mais comum e de mais fácil implementação (embora nem sempre o mais efectivo) para aproximar funções é a interpolação polinomial. Matematicamente, o problema da interpolação polinomial formula-se do seguinte modo: seja  $f$  uma função definida num intervalo  $[a,b]$ , através de um conjunto de  $n + 1$  pares ordenados  $(x_i, y_i) \{i = 0, 1, \dots, n\}$  – suporte da interpolação; pretende-se aproximar  $f$  por um polinómio  $p_n(x)$  de grau  $\leq n$  que verifique as  $n + 1$  condições:

$$p_n(x_i) = f(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n \quad (3.53)$$

Os valores  $x_i$  são chamados pontos ou nós da interpolação e os valores  $y_i = f(x_i)$  os valores interpolados. Aqui a informação que possuímos da função não está concentrada num ponto, como sucede com os polinómios de Taylor (aproximação local). Embora o polinómio  $p_n(x)$  seja único, como veremos, pode ser expresso de várias formas. A mais directa é através de uma série de potências (forma de potências simples)

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (3.54)$$

com coeficientes arbitrários  $a_i, 0 \leq i \leq n$ . A condição (3.53), que obriga o polinómio a passar nos vários pontos  $(x_i, y_i)$ , conduz a um sistema linear de  $n + 1$  equações para calcular as  $n + 1$  incógnitas (coeficientes  $a$ ).

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \quad (3.55)$$

Demonstra-se que o determinante do sistema de equações (3.55), conhecido como determinante de Vandermonde, dado por  $\Delta = \prod_{\substack{i,j=0 \\ j>i}}^n (x_j - x_i)$ ,

nunca se anula se os  $x_i$  forem distintos ( $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j$ ). Logo, o sistema anterior tem solução única, ou seja, existe um único polinómio  $p_n(x)$  que reproduz exactamente  $f(x)$  nos pontos  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Para conhecer o polinómio  $p_n(x)$ , bastará então resolver o sistema de equações (3.55). No entanto, existem duas desvantagens que não tornam recomendável seguir computacionalmente esta via de resolução do problema. Por um lado, a resolução do sistema (3.55), sobretudo se o número de pontos for apreciável, é um problema mal condicionado. Por outro, trata-se de um processo de cálculo pouco eficiente. É possível obter o polinómio interpolador com menos operações aritméticas.

### 3.4.1.1 Fórmula interpoladora de Lagrange

Em alternativa à Equação (3.54), o polinómio pode escrever-se na forma

$$p_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x) \quad (3.56)$$

(forma de ordenadas ou polinómio interpolador de Lagrange), na qual cada  $l_k(x)$ ,  $0 \leq k \leq n$  é um polinómio de grau menor ou igual a  $n$ . Estes polinómios são os polinómios base de Lagrange associados aos nós:  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Para cada valor fixo de  $i$ , impõe-se a condição (3.53):  $p_n(x_i) = f(x_i) = y_i$ . Esta será certamente satisfeita se os  $l_k(x)$  verificarem a relação:

$$l_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases} \quad (3.57)$$

Ou seja, o polinómio base de Lagrange  $l_k(x)$  anula-se em todos os nós excepto no nó  $x_k$ , no qual assume o valor 1. Como  $l_k(x)$  tem grau  $\leq n$ , deverá ser da forma

$$l_k(x) = C (x - x_0) (x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) (x - x_{k+1}) \dots (x - x_n) \quad (3.58)$$

para se anular em todos os nós, excepto em  $x_k$ . Por outro lado, para que  $l_k(x_k) = 1$ , a constante  $C$  deve verificar

$$C = \frac{1}{(x_k - x_0) (x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}) (x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \quad (3.59)$$

Consequentemente,

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) (x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) (x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) (x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}) (x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \quad (3.60)$$

As Equações (3.56) e (3.60) definem a fórmula de Lagrange para o cálculo do polinómio interpolador.

**Exemplo 3.12:** Polinómio interpolador de Lagrange.

Para o cálculo do amortecimento de onda de cheia numa albufeira, é necessário conhecer a curva  $V = f(Z)$ , volume armazenado-cota da albufeira. Determinar, através da fórmula de Lagrange, o polinómio interpolador com base nos seguintes três pontos de  $V = f(Z)$ .

$x \equiv Z$ (m)	110	120	130
$y \equiv V$ (hm <sup>3</sup> )	215	510	935

### Resolução

Como o número de pontos é  $n + 1 = 3$ , o polinómio será, no máximo, de grau 2,  $V = p_2(Z) \equiv p_2(x)$ . A partir dos dados da tabela constroem-se os polinómios base de Lagrange (Equação 3.60)

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 120)(x - 130)}{(110 - 120) \times (110 - 130)} = \frac{x^2 - 250x + 15600}{200}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 110)(x - 130)}{(120 - 110) \times (120 - 130)} = \frac{x^2 - 240x + 14300}{-100}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 110)(x - 120)}{(130 - 110) \times (130 - 120)} = \frac{x^2 - 230x + 13200}{200}$$

que, substituídos em (3.56), permitem obter o polinómio

$$V \equiv p_2(x) = 215 \times \left( \frac{x^2 - 250x + 15600}{200} \right) + 510 \times \left( \frac{x^2 - 240x + 14300}{-100} \right) + 935 \times \left( \frac{x^2 - 230x + 13200}{200} \right) = 0.65x^2 - 120x + 5550$$

Apesar da sua simplicidade, a fórmula de Lagrange pode não ser a representação mais conveniente do polinómio interpolador, fundamentalmente pelas seguintes razões:

- é possível obter o polinómio interpolador com menos operações aritméticas (menor esforço computacional) que as requeridas por esta fórmula;
- os polinómios de Lagrange encontram-se associados a um conjunto de nós; uma mudança de localização ou de número destes implica refazer totalmente o cálculo do polinómio.

### 3.4.1.2 Fórmula interpoladora de Newton

O polinómio interpolador poderá também ser expresso na designada forma de Newton:

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \quad (3.61)$$

em que os  $b_i$ ,  $0 \leq i \leq n$  são os coeficientes a determinar. Esta formulação permite evitar os inconvenientes apontados à forma de Lagrange, dando resposta nomeadamente à seguinte questão: dado o polinómio  $p_{n-1}(x)$  que interpola  $f$  nos diferentes nós  $\{x_i\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , que função é necessário somar a  $p_{n-1}(x)$  para obter  $p_n(x)$ ?

Os coeficientes  $b_i$ ,  $0 \leq i \leq n$  vão ser determinados de modo que  $p_n(x)$  interpole os valores nodais  $y_i$  nos distintos nós  $x_i$ , ou seja,

$$p_n(x_0) = f(x_0), p_n(x_1) = f(x_1), \dots, p_n(x_n) = f(x_n) \quad (3.62)$$

Por exemplo, para  $x = x_0$ , vem:  $f(x_0) = b_0$

De forma análoga, calculando  $p_n(x)$  para  $x = x_1$ , vem:

$$f(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) \Rightarrow b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Para se determinar  $b_2$ , basta considerar  $x = x_2$  na Equação (3.61) e utilizar  $p_2(x_2) = f(x_2)$ .

Assim,  $f(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$  que, após alguma manipulação algébrica, conduz a:

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Prosseguindo de forma idêntica, pode verificar-se que os coeficientes  $b_k$  do polinómio interpolador  $p_n(x)$  são dados indutivamente por

$$b_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad (3.63)$$

em que  $b_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$  é a denominada diferença dividida de ordem  $k$  de  $f$  relativamente aos  $k+1$  nós distintos:  $x_0, x_1, \dots, x_k$ . Então, o polinómio (3.61) obtém-se calculando um conjunto de quantidades, denominadas diferenças divididas, de acordo com o seguinte quadro:

Quadro 3.4 – Diferenças finitas divididas (notação e definição).

Ordem	Notação	Definição
0	$f[x_0]$	$f(x_0)$
1	$f[x_0, x_1]$	$\frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$
2	$f[x_0, x_1, x_2]$	$\frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$
3	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$\frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
...	...	...
$n$	$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n]$	$\frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

Nestas condições, com a notação de diferenças divididas, o polinómio interpolador de Newton de grau  $n$ ,  $p_n(x)$  assume a forma:

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n] \quad (3.64)$$

As diferenças divididas são usualmente calculadas através de uma tabela de diferenças divididas como a que se indica no Quadro 3.5.

Quadro 3.5 – Tabela de diferenças divididas.

$x$	$f_0 [ ]$	$f_1 [ ]$	$f_2 [ ]$	$f_3 [ ]$
$x_0$	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
$x_1$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
$x_2$	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$
$x_3$	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	
		$f[x_3, x_4]$		
$x_4$	$f[x_4]$			
...	...	...		
$x_{n-1}$	$f[x_{n-1}]$			
		$f[x_{n-1}, x_n]$		
$x_n$	$f[x_n]$			

Se os valores nodais corresponderem a uma função  $f$  que admite derivadas contínuas até à ordem  $n$ , é possível estabelecer uma ligação importante entre a diferença dividida de ordem  $n$  e a derivada da mesma ordem da função  $f$  (Carnahan *et al.*, 1969):

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \text{ em } (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad (3.65)$$

Observe-se que, no caso particular  $n = 1$ , este resultado reduz-se ao teorema do valor médio:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi), \quad \xi \text{ em } (x_0, x_1) \quad (3.66)$$

**Exemplo 3.13:** Polinómio interpolador de Newton.

Calcular, através da forma de Newton, o polinómio interpolador da função  $V = f(Z)$  correspondentes aos dados do Exemplo 3.12.

**Resolução**

De acordo com a Equação (3.64), o polinómio de grau 2 é dado por:

$$P_2(x) = f[x_0] + (x - x_2) f[x_0, x_1] + (x - x_0) (x - x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$

Calculando as diferenças divididas a partir da tabela:

$x$	$f(x)$	$f_2[ ]$	$f_2[ ]$
110	215		
		29.5	
120	510		0.65
		42.5	
130	935		

obtém-se:

$$V = p_2(x) = 215 + (x - 110) \times 29.5 + (x - 110) \times (x - 120) \times 0.65 = 0.65x^2 - 120x + 5550$$

que coincide com o polinómio já obtido pela fórmula de Lagrange no Exemplo 3.12.

**3.4.1.3 Erro da interpolação**

O polinómio interpolador  $p_n(x)$  verifica  $p_n(x_i) = f(x_i)$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ . Interessa saber se  $p_n(x)$  se “afasta” muito de  $f(x)$  quando  $x \neq x_i$ . É fácil verificar que  $R_n(x)$  é dado por:

$$R_n(x) = (x - x_0) (x - x_1) \dots (x - x_n) f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \tag{3.67}$$

ou, de forma equivalente, introduzindo a Equação (3.65), com  $\xi \in (x, x_0, x_1, \dots, x_n)$ :

$$R_n(x) = (x - x_0) (x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \tag{3.68}$$

É evidente que a equação anterior não pode ser utilizada para calcular o valor exacto do erro  $R_n(x)$ , visto que  $\xi$  é em geral desconhecido (excepto o caso em que a derivada de ordem  $n + 1$  de  $f(x)$  é uma constante). No entanto, da Equação (3.68) consegue-se obter um majorante do erro

$$|R_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \quad (3.69)$$

$$\text{com } M_{n+1} = \max_{a < x < b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

O produto  $|(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)|$  tende a crescer quando  $x$  se aproxima dos extremos do intervalo de interpolação e cresce muito rapidamente à medida que  $x$  se afasta de  $[a, b]$  (extrapolação). Existem funções para as quais a interpolação num número crescente de pontos não produz necessariamente uma sequência de polinómios convergindo de forma uniforme para  $f$  (o polinómio interpolador pode não tender para a função interpolada quando  $n \rightarrow \infty$ ). Um exemplo clássico é a chamada função de Runge

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Supondo o domínio de interpolação  $[-5, 5]$  e nós equidistantes de espaçamento  $h$ , verifica-se que, quando o grau do polinómio interpolador aumenta (menor espaçamento entre os nós), este assume oscilações cada vez mais acentuadas. A Figura 3.12 ilustra este fenómeno para  $n = 8$  ( $h = 1.25$ ).

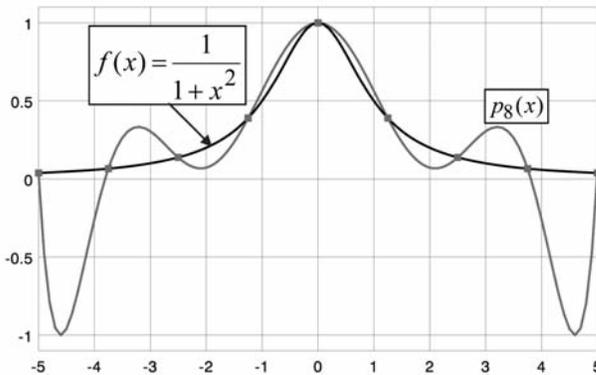


Figura 3.12 – Ilustração gráfica das oscilações experimentadas por um polinómio  $p_8(x)$  ao interpolar a função de Runge.

### 3.4.2 Aproximação. Método dos mínimos quadrados

Na secção anterior (interpolação) abordou-se uma forma de lidar com funções matemáticas definidas através de uma tabela de valores. No entanto, frequentemente, estas tabelas são obtidas com base em valores medidos, os quais podem estar contaminados por erros experimentais inerentes à imprecisão do método utilizado. Quando os valores tabelados não

são “exactos”, não é razoável utilizar interpolação, ou seja, exigir que a função aproximante satisfaça exactamente os dados. Em vez de se recorrer a um polinómio que passe por todos os pontos  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , a melhor abordagem será fazer passar a função aproximante,  $g(x)$ , o “mais próximo” possível dos pontos  $(x_i, y_i)$ .

Para ilustrar o problema, considere-se uma série de dados  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , onde cada  $y_i$  aproxima o valor de uma função  $f$  no ponto  $x_i$  (considere-se, como exemplo, a curva de vazão numa secção de um curso de água, onde  $x$  representa o caudal e  $y$  a altura de água). No plano cartesiano, estes  $m$  pontos originam uma “nuvem de pontos” (Figura 3.13) que, em princípio, apresentará uma determinada “tendência”.

No caso de a relação funcional  $y = f(x)$  ser completamente desconhecida, a sua forma poderá ser sugerida pela representação gráfica dos dados, consistindo o problema na procura da curva  $y = g(x)$  que melhor se ajuste, num dado sentido, à “nuvem de pontos” observada. Tal decisão exige alguma prática e é muitas vezes uma questão de bom senso. Nestas condições, a função  $g(x)$  diz-se uma aproximação da relação funcional desconhecida  $y = f(x)$ . Noutros casos, a teoria em que a experiência se baseia pode sugerir, ou mesmo fixar, o tipo de relação existente entre as variáveis (recta, exponencial, sinusoidal, ...).

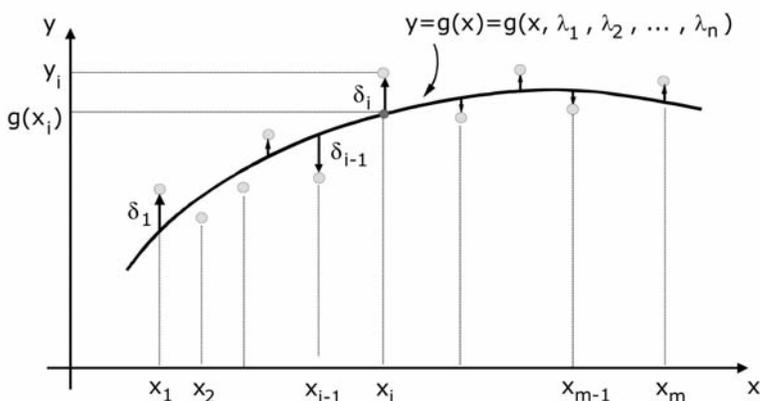


Figura 3.13 – Curva de tendência de um conjunto de pontos.

Uma vez decidido o tipo de função  $g(x)$  a utilizar, a respectiva definição matemática dependerá de um certo número de parâmetros, *i. e.*,  $g(x) = g(x; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Coloca-se então a questão de definir um critério que permita a determinação dos parâmetros  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

### 3.4.2.1 O critério dos mínimos quadrados

Dadas as coordenadas  $(x_i, y_i)$ ,  $\{i = 1, \dots, m\}$ , do conjunto dos  $m$  pontos aos quais se pretende ajustar a função  $y = g(x)$ , define-se o desvio (resíduo) na abscissa  $x_i$  como a diferença entre o valor tabelado e o correspondente valor da função de ajustamento

$$\delta_i = y_i - g(x_i) \quad (3.70)$$

Geometricamente,  $\delta_i$  mede a distância vertical desde o ponto  $P_i(x_i, y_i)$  ao gráfico da função aproximante  $g(x)$ , como mostra a Figura 3.13.

Poderá ser intuitivo afirmar que “a função que melhor se ajusta aos pontos dados será aquela que minimiza a soma dos desvios  $\delta_i$ , de cada ponto observado  $(x_i, y_i)$  à dita função”, ou seja, fazer com que:

$$\sum_{i=1}^m \delta_i = \sum_{i=1}^m [y_i - g(x_i)] \quad (3.71)$$

seja mínimo. Suponhamos, no entanto, que temos apenas dois pontos ( $m = 2$ ) como se ilustra na Figura 3.14(a). Se pensarmos em  $g(x)$  como uma recta da forma:  $y = ax + b$  então, naturalmente, a “melhor” recta é a que passa através de ambos os pontos porque para aquela recta o somatório (3.71) é zero. No entanto, para a recta a tracejado representada na Figura 3.14(a), a soma dos desvios é também nula, já que os dois desvios são iguais em módulo, mas de sinais contrários ( $\delta_1$  negativo e  $\delta_2$  positivo).



Figura 3.14 – Definição do critério de ajuste para o caso de uma recta.

(a) Critério de minimizar a soma dos desvios;

(b) Critério de minimizar a soma dos módulos dos desvios.

Um refinamento do critério anterior, para evitar o anulamento da soma de desvios simétricos, consiste em minimizar a soma dos módulos dos desvios. Este critério é também inadequado, como se exemplifica no caso dos três pontos ilustrado na Figura 3.14(b). Considere-se a hipótese de

dois dos três pontos terem a mesma abcissa  $x$  (isto não é uma situação anormal, já que muitas vezes os experimentos são duplicados). A “melhor” recta passará obviamente através da média dos experimentos duplicados. No entanto, qualquer linha que se encontre entre as linhas a tracejado terá a mesma soma dos módulos dos desvios. Este resultado ambíguo desaconselha a utilização do critério.

Uma forma simples de aproveitar a ideia anterior é substituir o módulo dos desvios pelo quadrado dos desvios. Ou seja, a “melhor” função  $g(x)$  será aquela que minimizar o somatório do quadrado dos desvios, *i. e.*, minimizar a função:

$$E = \sum_{i=1}^m (\delta_i)^2 = \sum_{i=1}^m [y_i - g(x_i)]^2 \quad (3.72)$$

Este critério é designado por critério dos mínimos quadrados.

Com vista à sua aplicação para ajustamento de uma função  $g(x)$ , há que analisar, em primeiro lugar, o caso mais simples que corresponde à existência de uma relação linear entre  $y$  e  $x$ .

### 3.4.2.2 Regressão linear

O ajustamento por uma recta corresponde a um caso particular de uma função de dois parâmetros  $g(x) \equiv g(x; \lambda_1, \lambda_2)$  ou, na forma mais habitual,  $g(x) \equiv g(x; a, b) = a x + b$ . A aplicação do critério dos mínimos quadrados corresponde à afirmação de que a “melhor” recta é aquela cujos parâmetros  $a$  e  $b$  minimizam a função:

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^m \delta_i^2 = \sum_{i=1}^m [y_i - (a x_i + b)]^2 \quad (3.73)$$

Para ocorrer um mínimo, é necessário que (condições de 1.<sup>a</sup> ordem):

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^m [y_i - (a x_i + b)]^2 = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - a x_i - b) (-x_i) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^m [y_i - (a x_i + b)]^2 = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - a x_i - b) \times (-1) = 0 \end{cases}$$

Obtém-se desta forma um sistema linear de duas equações a duas incógnitas ( $a$  e  $b$ ), que permite a determinação dos coeficientes da vulgar-

mente designada recta de regressão. O desenvolvimento do sistema anterior permite escrever:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^m x_i^2 + b \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^m x_i + b m = \sum_{i=1}^m y_i \end{cases} \quad (3.74)$$

denominado **sistema normal**. Os valores de  $a$  e  $b$ , solução única do sistema normal, são dados por:

$$a = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^m x_i \right)^2}; \quad b = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m x_i y_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^m x_i \right)^2} \quad (3.75)$$

O denominador destas expressões apenas se anula quando todos os  $x_i$  forem iguais. Então, sempre que entre os valores tabelados existirem dois ou mais valores distintos de  $x_i$ , a solução existe e é única.

**Exemplo 3.14:** Regressão linear.

Considere os pontos  $(x_i, y_i)$  apresentados nas duas primeiras colunas do Quadro 3.6, que representam valores da precipitação anual,  $P$  (mm), e do escoamento anual,  $R$  (mm), numa dada bacia. Para determinar a recta de regressão, completou-se o Quadro 3.6 de forma a calcular os vários termos das equações normais (3.75).

As equações normais (3.75) permitem assim obter:

$$a = \frac{10 \times 2568140 - 9150 \times 2551}{10 \times 8666500 - 9150^2} \approx 0.795$$

$$b = \frac{8666500 \times 2551 - 9150 \times 2568140}{10 \times 8666500 - 9150^2} \approx -472$$

A recta de regressão  $y = 0.795 x - 472$  está representada, conjuntamente com os pontos dados, na Figura 3.15.

Quadro 3.6 – Exemplo de regressão linear.

$x_i \equiv P_i$ (mm)	$y_i \equiv R_i$ (mm)	$x_i^2$	$x_i y_i$
610	10	327100	6100
720	95	518400	68400
810	190	656100	153900
850	205	722500	174250
880	237	774400	208560
920	232	846400	213440
970	312	940900	302640
1080	355	1166400	383400
1130	445	1276900	502850
1180	470	1392400	554600
$\Sigma = 9150$	$\Sigma = 2551$	$\Sigma = 8666500$	$\Sigma = 2568140$

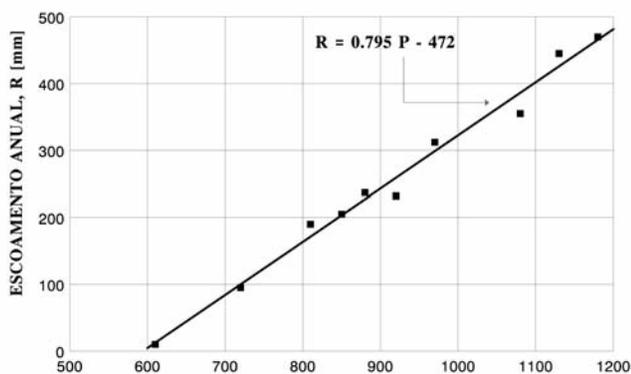


Figura 3.15 – Regressão linear do escoamento e precipitação anuais.

### 3.4.2.3 Modelo geral de dois parâmetros

Para generalizar a aplicação do método dos mínimos quadrados a qualquer função  $g(x)$ , considere-se o caso de  $g(x)$  depender de dois parâmetros,  $\alpha$  e  $\beta$  ( $\lambda_1 = \alpha$ ;  $\lambda_2 = \beta$ ). As equações normais escrevem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} E(g) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} E(g) = 0 \quad (3.76)$$

com

$$E(g) = \sum_{i=1}^m [y_i - g(x_i)]^2 \quad (3.77)$$

O desenvolvimento do sistema de equações (3.76) permite obter duas situações distintas em face da escolha efectuada para  $g(x)$ .

• **Situação 1:** A função  $g(x)$  pode expressar-se na forma

$$g(x) = \alpha c_1(x) + \beta c_2(x) \tag{3.78}$$

*i. e.*, como um modelo linear de dois parâmetros, do qual a regressão linear é um caso particular ( $c_1(x) = x$  e  $c_2(x) = 1$ ). O modelo matemático (3.78) é, do ponto de vista do método dos mínimos quadrados, considerado um modelo linear do sistema real dado os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  aparecerem linearmente combinados (embora as funções  $c_1(x) = x$  e  $c_2(x)$  possam ser não lineares). Nesta situação, o sistema normal é, tal como no caso da recta, um sistema linear 2x2 em  $\alpha$  e  $\beta$ . De facto, quando uma função  $g(x)$  na forma (3.78) se substitui na Equação (3.77), as equações normais (3.76) convertem-se no sistema linear

$$\begin{cases} \alpha \sum_{i=1}^m c_1(x_i) c_1(x_i) + \beta \sum_{i=1}^m c_1(x_i) c_2(x_i) = \sum_{i=1}^m c_1(x_i) y_i \\ \alpha \sum_{i=1}^m c_2(x_i) c_1(x_i) + \beta \sum_{i=1}^m c_2(x_i) c_2(x_i) = \sum_{i=1}^m c_2(x_i) y_i \end{cases} \tag{3.79}$$

ou, alternativamente, em forma matricial, em que  $\sum$  representa o somatório  $\sum_{i=1}^m$

$$\begin{bmatrix} \sum c_1(x_i) c_1(x_i) & \sum c_1(x_i) c_2(x_i) \\ \sum c_2(x_i) c_1(x_i) & \sum c_2(x_i) c_2(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum c_1(x_i) y_i \\ \sum c_2(x_i) y_i \end{bmatrix} \tag{3.80}$$

Resumindo: as equações normais de qualquer modelo linear de dois parâmetros dado pela Equação (3.78) conduzem ao sistema linear 2x2 (Equação 3.79), para determinar o vector de parâmetros dos mínimos quadrados  $\alpha$  e  $\beta$ . Uma vez determinados  $\alpha$  e  $\beta$ , a soma dos quadrados dos desvios (3.77) poderá ser calculada através da expressão simplificada:

$$E(g) = \sum_{i=1}^m y_i^2 - \left( \alpha \sum_{i=1}^m c_1(x_i) y_i + \beta \sum_{i=1}^m c_2(x_i) y_i \right) \tag{3.81}$$

**Exemplo 3.15:** Modelo linear de dois parâmetros.

Um ensaio de infiltração permitiu obter o conjunto de pontos:

$x_i \equiv t_i$ (min)	5	10	20	40	80	160
$y_i \equiv f_i$ (cm/h)	10.8	8.4	4,8	3.3	2.4	1.9

Ajustar os dados a uma hipérbole do tipo  $g(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta$  e determinar o somatório do quadrado dos desvios.

**Resolução**

A hipérbole  $g(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta$  é um modelo linear de dois parâmetros da forma (3.78), com  $c_1 = 1/x$  e  $c_2 = 1$ . Assim, o sistema de equações (3.79) escreve-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{273}{5120} & \frac{63}{160} \\ \frac{63}{160} & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.364625 \\ 31.64 \end{bmatrix}$$

uma vez que:

$$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{x_i} = \frac{63}{160}, \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 31.64, \quad \sum_{i=1}^5 \frac{1}{x_i^2} = \frac{273}{5120}, \quad \sum_{i=1}^5 \frac{y_i}{x_i} = 3.364625$$

Da resolução do sistema obtém-se:  $\alpha = 46.856$  e  $\beta = 2.1846$ . Logo,

$$g(x) = \frac{46.856}{x} + 2.1846 \Rightarrow f(t) = \frac{46.856}{t} + 2.1846$$

A soma do quadrado dos desvios pode ser calculada com a Equação (3.81),

$$E(g) = 230.5 - (46.965 \times 3.364625 + 2.1846 \times 31.64) \approx 3.36$$

- **Situação 2:** Não é possível expressar a função  $g(x)$  na forma  $g(x) = \alpha c_1(x) + \beta c_2(x)$ . Neste caso, o sistema 2x2 passará a ser um sistema não linear, como se ilustra com o seguinte exemplo.

**Exemplo 3.16:** Modelo não linear.

Mostrar que no caso de um modelo de tipo exponencial, como é, por exemplo, o modelo típico da curva de esgotamento das reservas subterâneas, caracterizado por  $g(x) = \alpha e^{\beta x}$ , o sistema (3.76) não será linear.

## Resolução

A função  $g(x) = \alpha e^{\beta x}$  não é um modelo linear (não é soma “ponderada” de duas funções que seja possível expressar como  $g(x) = \alpha c_1(x) + \beta c_2(x)$ ). A substituição de  $g(x)$  na Equação (3.77) conduz ao problema de minimizar a função  $E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^m [y_i - \alpha e^{\beta x_i}]^2$ , que, por sua vez, conduz ao

sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^m 2(y_i - \alpha e^{\beta x_i}) \frac{\partial}{\partial \alpha} (y_i - \alpha e^{\beta x_i}) = 2 \sum_{i=1}^m (\alpha e^{\beta x_i} - y_i) e^{\beta x_i} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^m 2(y_i - \alpha e^{\beta x_i}) \frac{\partial}{\partial \beta} (y_i - \alpha e^{\beta x_i}) = 2\alpha \sum_{i=1}^m (\alpha e^{\beta x_i} - y_i) x_i e^{\beta x_i} = 0 \end{cases}$$

ou, ainda:

$$\begin{cases} \alpha \sum_{i=1}^m e^{2\beta x_i} - \sum_{i=1}^m y_i e^{\beta x_i} = 0 \\ \alpha \sum_{i=1}^m x_i e^{2\beta x_i} - \sum_{i=1}^m x_i y_i e^{\beta x_i} = 0 \end{cases}$$

Trata-se de um sistema 2x2 não linear nas variáveis  $\alpha$  e  $\beta$  que não tem, regra geral, solução analítica.

### 3.4.2.4 Linearização

O exemplo anterior permitiu verificar as dificuldades adicionais na resolução do problema quando o modelo  $g(x)$  é não linear. Com o objectivo de contornar estas dificuldades adopta-se, por vezes, uma técnica de linearização do problema. É importante observar que os parâmetros assim obtidos (linearização) não são óptimos, de acordo com o critério dos mínimos quadrados. Isto porque se ajusta o problema linearizado e não o original. No entanto, em termos práticos, as duas soluções são, de modo geral, muito próximas.

**Exemplo 3.17:** Linearização de um modelo não linear.

Linearize  $y = \alpha x^\beta$  e efectue o seu ajuste aos cinco pontos do Exemplo 3.16.

## Resolução

Para esta função em particular, a linearização consiste em logaritmar ambos os membros de  $y = \alpha x^\beta$  e observar que:

$$y = \alpha x^\beta \Leftrightarrow \underbrace{\ln y}_Y = \beta \underbrace{\ln x}_X + \underbrace{\ln \alpha}_b \Leftrightarrow Y = aX + b$$

com:  $Y = \ln y$ ,  $X = \ln x$ ,  $a = \beta$  e  $b = \ln \alpha$

Os pontos transformados  $(X, Y) \equiv (\ln x, \ln y)$  são:

$\ln x_i$	1.609	2.303	2.996	3.689	4.382	5.075
$\ln y_i$	2.380	2.128	1.569	1.194	0.875	0.642

As equações normais (3.80) para ajustar estes dados transformados podem escrever-se como:

$$\begin{bmatrix} 75.434 & 20.054 \\ 20.054 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.927 \\ 8.788 \end{bmatrix}$$

E a solução é:  $a \approx -0.5285$  e  $b \approx 3.2310$ . Como  $\alpha = \beta$  e  $b = \ln \alpha$ , os parâmetros de  $g(x)$  são:  $\alpha = e^b \approx 25.3052$  e  $\beta = a \approx -0.5285$  pelo que:

$$g(x) = 25.31 x^{-0.5285} \Rightarrow f(t) = 25.31 t^{-0.5285}$$

O valor  $E(g) \approx 1.11$  permite concluir que esta equação ajusta melhor os dados que a hipérbole do Exemplo 3.15, como se verifica na Figura 3.16.

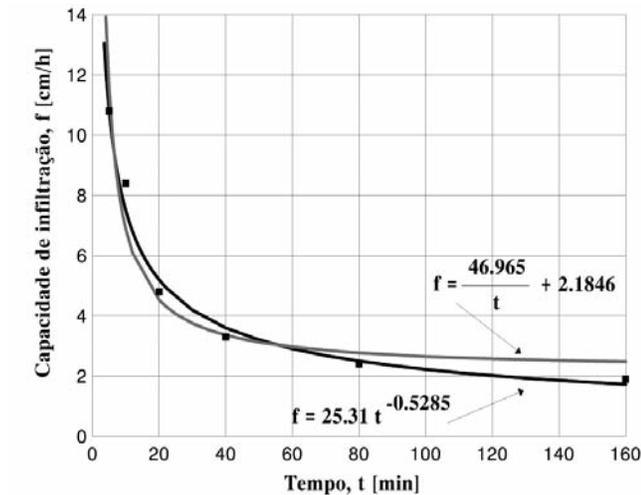


Figura 3.16 – Ajuste dos valores de um ensaio de infiltração.

O Quadro 3.7 ilustra outros exemplos de linearização de funções.

Quadro 3.7 – Exemplos de linearização de alguns modelos não lineares.

$i$	$y = g_i(x)$	Forma linear $Y = a X + b$	$X =$	$Y =$	$a =$	$b =$
1	$y = \alpha e^{\beta x}$	$\ln y = \beta x + \ln \alpha$	$x$	$\ln y$	$\beta$	$\ln \alpha$
2	$y = \frac{\alpha}{\beta + x}$	$y = \frac{1}{\beta} x y + \frac{\alpha}{\beta}$	$x y$	$y$	$-\frac{1}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta}$
3	$y = \frac{\alpha x}{\beta + x}$	$y = -\beta \frac{y}{x} + \alpha$	$\frac{y}{x}$	$y$	$-\beta$	$\alpha$

Nota: Um eventual ponto (0,0) deve ser eliminado do conjunto de dados antes de utilizar as funções  $g_1(x)$  e  $g_3(x)$  (ver colunas  $X =$  e  $Y =$ ).

### 3.5 Diferenciação e integração numéricas

Para a resolução de muitos problemas, é necessário obter os valores das derivadas (integrais) de uma função sem recorrer à sua expressão analítica, por esta não ser conhecida (caso, por exemplo, de funções dadas por pontos), ou ser demasiado complicada. Nestas situações, é conveniente dispor de técnicas alternativas à derivação analítica. Tais técnicas são genericamente denominadas de diferenciação numérica.

Embora analiticamente a integração seja um problema muito mais complexo do que a derivação, a nível numérico as coisas são distintas. De facto, a derivação é numericamente instável já que pequenas modificações na função a derivar podem produzir variações drásticas no valor da sua derivada, não se passando o mesmo na integração. Dado o alcance deste curso, vamos apenas introduzir o tema e mostrar, com um exemplo simples, as dificuldades que podem surgir.

#### 3.5.1 Aproximação de derivadas por diferenças finitas

O problema da diferenciação numérica pode colocar-se da seguinte forma: encontrar estimativas para a derivada de uma função usando apenas valores funcionais num conjunto discreto de pontos. Uma solução simples consiste em reconstruir a função através de uma aproximação local (polinómio de Taylor) ou função interpoladora e, posteriormente, calcular de forma analítica a respectiva derivada (os polinómios, sendo de fácil derivação, são bons candidatos), esperando assim obter uma aproximação suficientemente boa.

Como se verificou na secção 3.2.3, a série de Taylor permite relacionar valores da função  $f(x)$  e respectivas derivadas, num ponto  $x$ , com valores dessa mesma função numa vizinhança de  $x$ , seja  $f(x+h)$ .

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \quad (3.82)$$

Truncando a série após as duas primeiras parcelas do 2.º membro, obtemos o polinómio de Taylor de grau 1 com resto:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + O(h^2) \quad (3.83)$$

onde  $O(h^2)$  (leia-se “da ordem  $h^2$ ”) pretende ilustrar o facto de o erro de truncatura do desenvolvimento em série de Taylor ser proporcional a  $h^2$ . Com base na Equação (3.83), é possível definir uma aproximação da derivada de  $f$  em  $x$  (Figura 3.17), conhecida por diferença finita progressiva de 1.ª ordem.

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad (3.84)$$

De acordo com a Figura 3.17, a derivada é aproximada pelo declive da recta que une os pontos de  $f$  de abcissas  $x$  e  $x+h$ . Esta expressão recorda a própria definição de derivada de uma função num ponto

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ , da qual se diferencia unicamente no limite  $h \rightarrow 0$ . Poder-se-á então pensar que, quanto menor for  $h$ , mais precisa a aproximação da derivada (3.84). Tal não ocorre sempre, como se demonstra com o Exemplo 3.18, no final da presente secção.

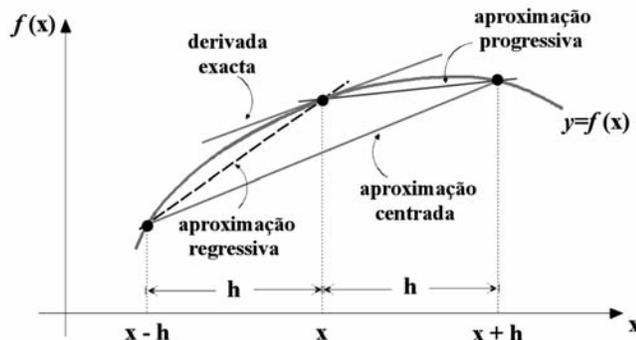


Figura 3.17 – Ilustração gráfica da aproximação da primeira derivada.

De forma idêntica ao caso anterior, sendo  $h < 0$  vem

$$f(x - h) = f(x) - h f'(x) + O(h^2) \quad (3.85)$$

que, seguindo o mesmo procedimento, conduz a uma aproximação da derivada conhecida por diferença finita regressiva de 1.<sup>a</sup> ordem

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - h)}{h} + O(h) \quad (3.86)$$

As duas formas do polinómio de Taylor de grau 2 com resto, ou seja:

$$f(x + h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + O(h^3) \quad (3.87)$$

e

$$f(x - h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + O(h^3) \quad (3.88)$$

permitem, se se subtrair a primeira à segunda, obter a denominada diferença finita centrada de 2.<sup>a</sup> ordem

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} + O(h^2) \quad (3.89)$$

Sendo uma diferença de 2.<sup>a</sup> ordem, quando  $h$  diminui, o erro (de truncatura) decresce mais rapidamente do que nas aproximações não centradas.

De modo análogo à forma como se obtiveram as fórmulas de diferenças que aproximam o valor da primeira derivada num ponto, conseguem-se expressões que aproximem derivadas de ordem superior (Chapra e Canale, 1990; Conte e de Boor, 1981). Assim, por exemplo, somando os dois polinómios de Taylor de grau 2 com resto (equações 3.87 e 3.88) obtêm-se:

$$f''(x) = \frac{f(x - h) - 2f(x) + f(x + h)}{h^2} + O(h^2) \quad (3.90)$$

uma fórmula de diferenças finitas centrada para aproximar a segunda derivada da função  $f$  em  $x$ .

**Exemplo 3.18:** Aproximação numérica de uma derivada.

Suponha-se que se pretende aproximar a primeira derivada de uma dada função  $f(x)$ , tão rigorosamente quanto possível, utilizando a diferença finita progressiva de 1.<sup>a</sup> ordem (Equação 3.84). A definição de derivada sugere

que o quociente  $\frac{\Delta f}{h}$  pode aproximar  $f'(x)$ , se existe, quando  $h \rightarrow 0$ . No entanto, não é provável que suceda se os cálculos se realizarem num computador, a não ser que  $f'(x)$  seja zero. Para o confirmar, suponha-se que se quer calcular a derivada da função  $f(x) = \sin x$  em  $x = 1$ .

### Resolução

A solução analítica do problema é  $f'(x) = \cos x$ , pelo que  $f'(1) = \cos 1 \approx 0.54030$ . A solução numérica, utilizando a aproximação (3.84), é dada por  $\frac{\Delta f}{h} = \frac{\sin(1+h) - \sin(1)}{h}$ . Calculando num computador, em simples precisão, os valores deste quociente para valores de  $x$  sucessivamente decrescentes, obtém-se:

$h$	$\frac{\Delta f}{h}$	Erro = $f'(1) - \frac{\Delta f}{h}$
0.1	0.49736	0.042938
0.01	0.53609	0.004212
0.001	0.53996	0.000344
0.0001	0.54061	-0.000312
0.00001	0.54240	-0.002100
0.000001	0.53644	0.003860
0.00000001	0.0	0.540300

Por que razão é que a aproximação não se torna mais exacta quando  $h$  se aproxima de zero? Com efeito, na Equação (3.84), a derivada é aproximada através de um quociente do qual se pretende que o denominador seja muito pequeno. Sendo  $h$  pequeno, cabe esperar que  $f(x+h)$  e  $f(x)$  sejam próximos entre si, pelo que, como se observou na secção 3.2.2.4, ao subtrai-los, efectuando os cálculos com precisão finita, se produz o efeito do cancelamento subtrativo. O erro de arredondamento produzido, por sua vez, amplifica-se quando se divide por  $h$ . Uma vez iniciado o cancelamento subtrativo, as diminuições sucessivas de  $h$  fazem com que  $x + h$  se arredonde a  $x$  ou  $f(x+h)$  e  $f(x)$  coincidam com a precisão da máquina, pelo que se obtém um quociente nulo.

A conclusão a extrair do exemplo anterior é que o erro total cometido no cálculo da derivada é composto por duas partes distintas: uma proveniente da fórmula de diferenças finitas que é proporcional a  $h$ ; outra resul-

tante dos erros de arredondamento. Dever-se-á encontrar então um valor de  $h$  de compromisso que seja suficientemente pequeno para minimizar o erro de truncatura  $O(h)$ , na Equação (3.84), mas não demasiado pequeno de forma a que os erros de arredondamento se amplifiquem.

### 3.5.2 Integração numérica

Se uma função  $f(x)$  é continua num intervalo finito  $[a,b]$  e é conhecida a sua primitiva  $F(x)$ , o integral definido de  $f(x)$  entre  $a$  e  $b$  pode calcular-se pela fórmula fundamental do cálculo integral:

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (3.91)$$

No entanto, em vários casos, o processo anterior pode ser complexo (exigindo, por exemplo, integração por partes, ou uma longa busca até encontrar uma mudança de variável apropriada), tornando mais rápido e mais cómodo o cálculo numérico do integral. Noutros casos, pode até nem ser possível porque:

- é impossível encontrar uma primitiva de  $f(x)$  expressa analiticamente. É o caso das conhecidas integrais elípticas, das quais se viu um exemplo na secção 3.2.3.2.
- a expressão analítica de  $f(x)$  não é conhecida. Casos em que a função é conhecida apenas num número finito de pontos como, por exemplo, quando é obtida por medições de grandezas físicas (ex.: velocidades em diferentes pontos de uma prumada numa secção de um curso de água).

A integração numérica permite resolver as dificuldades mencionadas através do cálculo aproximado do integral definido, utilizando apenas valores da função  $f$  num conjunto finito de pontos do intervalo  $[a,b]$ . Essa aproximação é também conhecida como quadratura numérica – nome que tem origem na ideia básica de seguir a definição do integral, aproximando a área correspondente por áreas de rectângulos (discretização do domínio). Na prática, aplicam-se modificações mais sofisticadas desta ideia, como se ilustra a seguir, através da abordagem de alguns dos métodos mais correntes de integração numérica.

A estratégia para a solução do problema é idêntica à utilizada na diferenciação numérica. Consiste sobretudo em aproximar a função a integrar

$f(x)$  por outra  $g(x)$  que aproxime  $f(x)$ , no intervalo  $[a,b]$ , e seja mais facilmente integrável (Figura 3.18), e estabeleça:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b g(x) dx \quad (3.92)$$

Felizmente, os polinómios  $p_n(x)$  constituem aproximações razoáveis e são de fácil integração.

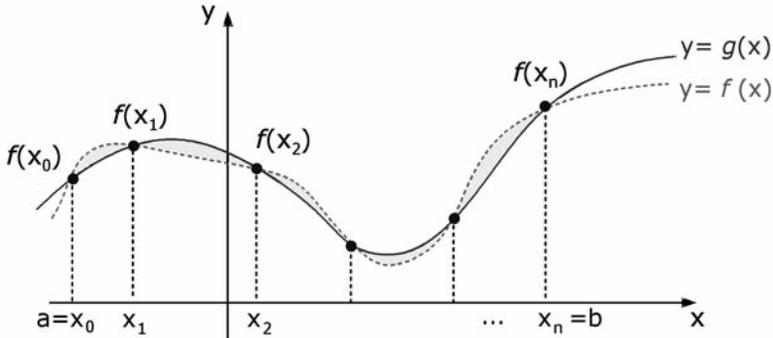


Figura 3.18 – Ilustração da estratégia usada na integração numérica.

### 3.5.2.1 Fórmulas de integração

Suponha-se que dada uma função  $f(x)$  contínua, e um intervalo de integração  $[a,b]$ , se pretende calcular, de uma forma aproximada  $I = \int_a^b f(x) dx$ .

Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $n + 1$  nós com espaçamento arbitrário em  $[a,b]$  e seja  $p_n(x)$  o polinómio interpolador de grau  $\leq n$  de  $f(x)$  nesses pontos. Como os  $n + 1$  pontos pertencem à curva  $y=f(x)$  (Figura 3.18), poder-se-á raciocinar da seguinte forma: se  $f(x) \approx p_n(x)$  em  $[a,b]$ , será razoável esperar que

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx \quad (3.93)$$

Substituindo  $p_n(x)$ , na forma de Lagrange,  $p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$ , na Equação (3.93) obtém-se

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx = f(x_0) \int_a^b l_0(x) dx + \dots + f(x_n) \int_a^b l_n(x) dx \quad (3.94)$$

pelo que a fórmula de quadratura de  $(n + 1)$  pontos pode escrever-se:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_n f(x_n) = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) \quad (3.95)$$

com

$$\omega_i = \int_a^b l_i(x) dx = \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n \quad (3.96)$$

A Expressão (3.95) designa-se por regra de integração ou fórmula de quadratura. O cálculo exacto do integral é substituído pelo cálculo de uma soma ponderada (pesada) de valores discretos da função integrada. Por esta razão, os coeficientes  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$  na Equação (3.95) são designados por pesos da integração. As abcissas são chamadas nós de integração, normalmente escolhidas em  $[a, b]$ . Note-se que os pesos  $\omega_i$  dados pela Equação (3.96) são independentes da função  $f(x)$ , dependendo apenas de  $a$  e  $b$  e da disposição dos pontos de base  $x_i$ . Consoante o valor de  $n$  e a localização dos nós no intervalo  $[a, b]$ , assim se obtêm diferentes regras de integração.

Uma regra de integração diz-se de grau de exactidão ou precisão  $n$  se integrar exactamente todos os polinómios de grau  $\leq n$ , mas só se existir pelo menos um polinómio de grau  $n + 1$  que não é por ela integrada exactamente (Valença, 1993; Rosa, 1992). Uma consequência imediata da definição anterior é que o grau de exactidão determinado pela Equação (3.95) é  $\geq n$ .

O erro da aproximação (3.93) representado graficamente, no caso geral, pela diferença de áreas sombreadas da Figura 3.18, é dado analiticamente por:

$$E = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_n(x) dx = \int_a^b [f(x) - p_n(x)] dx = \int_a^b R_n(x) dx \quad (3.97)$$

ou introduzindo a expressão do erro da interpolação (3.68)

$$E = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx \quad (3.98)$$

O termo  $E$ , que corresponde ao erro cometido ao fazer-se a aproximação (3.93), é o erro de truncatura ou erro de discretização associado à integração numérica.

### 3.5.2.2 Fórmulas de Newton-Cotes

Os métodos usuais de integração numérica têm nós e pesos com forma simples ou fornecidos em tabelas. Se os limites de integração  $a$  e  $b$  são nós da interpolação, a fórmula de quadratura é “fechada”; se pelo menos um dos limites não for nó de interpolação, a fórmula de quadratura será “aberta”. As fórmulas de Newton-Cotes são obtidas escolhendo-se os nós de integração igualmente espaçados.

Vamos analisar alguns casos particulares de regras de integração, correspondentes a diferentes escolhas de polinómios interpoladores.

#### Regras do rectângulo

O caso mais simples corresponde a utilizar um polinómio de grau  $n = 0$  que interpola a função  $f(x)$  num ponto. Considere-se uma abcissa genérica  $x_0$ . Então  $p_0(x) = f(x_0)$ , pelo que

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_0(x) dx = \int_a^b f(x_0) dx = (b-a) f(x_0) \quad (3.99)$$

O valor do integral foi aproximado pela área de um rectângulo de base  $b - a$  e altura  $f(x_0)$ . Ao fazer coincidir  $x_0$  com  $a$ , obtém-se a regra do rectângulo à esquerda (Figura 3.19a)

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f(a) \quad (3.100)$$

Pode-se, em alternativa, fazer coincidir  $x_0$  com  $b$ , obtendo a regra do rectângulo à direita

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f(b) \quad (3.101)$$

ou ainda fazer  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ , obtendo a regra do ponto médio (Figura 3.19b)

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (3.102)$$

A regra do ponto médio, ao contrário das duas anteriores que possuem grau de exactidão zero, é de grau 1. Isto significa, como é fácil verificar, que integra de forma exacta qualquer polinómio de grau 1.

As regras anteriores correspondem a fórmulas de integração abertas e são, em geral, pouco usadas na integração numérica (com excepção dos

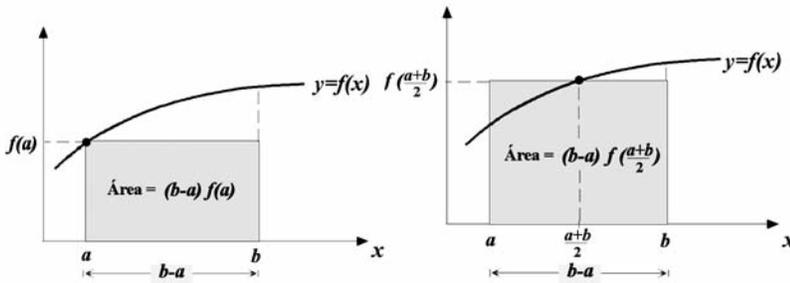


Figura 3.19 – Interpretação geométrica das regras:  
(a) retângulo à esquerda; (b) ponto médio.

integrais impróprios). São utilizadas em algumas fórmulas simples para resolver equações diferenciais. A regra do ponto médio é frequentemente aplicada em cálculos expeditos de áreas em Hidrologia Urbana.

### Regra do trapézio

O caso mais simples de integração fechada de Newton-Cotes é apresentado na Figura 3.20. A função  $f(x)$  é aproximada pela recta que une os pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ .

Seja  $p_1(x)$  o polinómio de grau 1 interpolador de  $f$  nos nós  $a$  e  $b$ , isto é, na forma de Newton  $p_1(x) = f(a) + f[a,b](x - a)$ , pelo que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b p_1(x) dx = \int_a^b f(a) dx + \int_a^b f[a,b](x-a) dx = \\ &= f(a)(b-a) + f[a,b] \left[ \frac{(x-a)^2}{2} \right]_a^b = f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \frac{(b-a)^2}{2} \end{aligned}$$

que simplificada permite escrever:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \quad (3.103)$$

Geometricamente, a regra do trapézio aproxima a área sob a curva  $f(x)$  mediante a área do trapézio a sombreado na Figura 3.20. O erro será dado pela área entre  $p_1(x)$  e  $f(x)$ , no intervalo  $[a,b]$ . Analiticamente, é possível demonstrar, com base na Equação (3.98), que:

$$E = - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b] \quad (3.104)$$

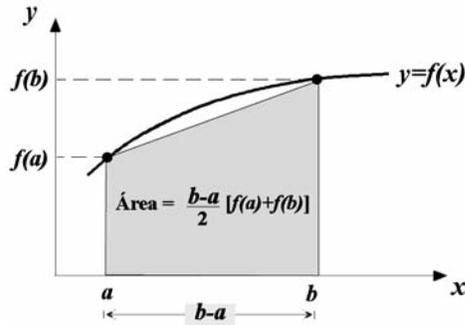


Figura 3.20 – Interpretação geométrica da regra do trapézio.

**Exemplo 3.19:** Regra do trapézio.

Calcular, através da regra do trapézio, o valor aproximado de  $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$   
 Determinar o erro cometido (Nota: o integral anterior não tem solução analítica; considere que o seu valor com sete casas decimais correctas é  $I = 0.7468241$ ).

**Resolução**

Aplicando a Equação (3.103):

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] = \frac{1-0}{2} (e^0 + e^{-1}) \approx 0.68394$$

Como  $I = 0.7468241$  (com 7 c.d.c.), então  $|E| \approx 0.629 \times 10^{-1}$ . A magnitude do erro percebe-se analisando a Figura 3.21.

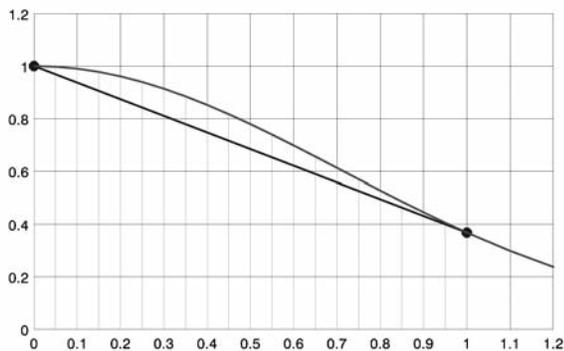


Figura 3.21 – Aproximação de  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  através da regra do trapézio.

### Regra de Simpson

Na tentativa de melhorar a aproximação trapezoidal, poder-se-á utilizar um polinómio de interpolação quadrático,  $p_2(x)$ , entre três pontos de base igualmente espaçados,  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$  para aproximar  $f(x)$  em  $[a, b]$  (ver Figura 3.22). A integração desse polinómio entre  $a$  e  $b$ , de forma análoga ao efectuado para a regra do trapézio, permite obter a conhecida regra de Simpson, traduzida analiticamente por:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + E \quad (3.105)$$

com

$$E = - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_2 \quad (3.106)$$

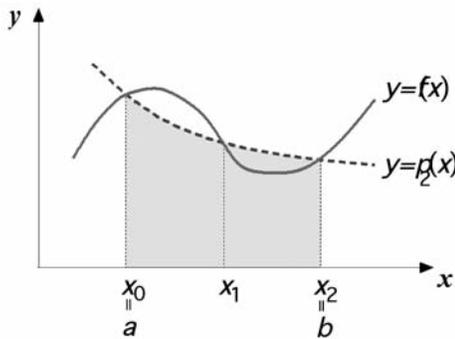


Figura 3.22 – Interpretação geométrica da regra de Simpson.

Geometricamente, enquanto a regra trapezoidal aproxima, em cada intervalo  $h$ , a área sob a curva  $f(x)$  mediante a área de um trapézio, a regra de Simpson utiliza a área sob uma parábola para aproximar a área sob a curva  $f(x)$  entre dois intervalos adjacentes (a sombreado na Figura 3.22). Seria de esperar que, tal como a regra trapezoidal é exacta para polinómios de 1.º grau, a regra de Simpson fosse exacta para polinómios de 2.º grau ou menor. Com alguma surpresa, a expressão do erro (3.106) mostra que a regra de Simpson é também exacta se  $f(x)$  for um polinómio de terceiro grau. É, portanto, um método bastante preciso para o esforço exigido e a fórmula não é significativamente mais complexa do que a da regra trapezoidal. Estas características são responsáveis pela ampla utilização da regra de Simpson.

**Exemplo 3.20:** Regra de Simpson.

Calcular, através da regra de Simpson, o valor aproximado do integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx, \text{ do Exemplo 3.19. Determinar o erro cometido.}$$

**Resolução**

Da Expressão (3.105), obtém-se:

$$I \approx \frac{h}{3} [f(0) + 4f(0.5) + f(1)] = \frac{0.5}{3} (e^0 + 4e^{-0.5^2} + e^{-1}) \approx 0.74718$$

O erro cometido é  $|E| \approx 0.36 \times 10^{-3}$  (3 c.d.c.), ou seja, mais de 100 vezes inferior ao obtido pela fórmula do trapézio.

**Fórmulas de Newton-Cotes. Caso geral**

Referiu-se que os métodos de integração numérica obtidos por integração do polinómio interpolador de Newton, quando os pontos de base são equidistantes, correspondem às fórmulas de integração de Newton-Cotes. Em particular, quando  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ , obtêm-se as fórmulas fechadas de Newton-Cotes. As regras dos trapézios e de Simpson são casos particulares correspondentes, respectivamente, a  $n = 1$  e  $n = 2$ . Para maiores valores de  $n$  podem obter-se novas expressões. Refira-se, no entanto, que todas estas fórmulas podem ser escritas na forma mais geral (3.95), isto é, como uma soma de valores ponderados da função nos pontos de base. Para uma mais completa identificação da expressão anterior com as regras do trapézio e de Simpson, a referida equação pode reescrever-se, numa forma explicitamente adaptada às fórmulas de Newton-Cotes, como:

$$\int_a^b f(x) dx = k h (w_0 f_0 + w_1 f_1 + \dots + w_n f_n) + E \quad (3.107)$$

na qual se consideraram  $n + 1$  nós igualmente espaçados que dividem  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos de amplitude  $h$ , sendo  $k$  e  $w$  coeficientes que dependem de  $n$  (regra de integração), e cujos valores se apresentam no Quadro 3.8.

Como se verifica no Quadro 3.8, a partir de  $n = 8$  aparecem pesos com sinais positivos e negativos. Do ponto de vista do efeito dos erros de arredondamento, esta característica é nociva, pois pode promover o aparecimento de cancelamento subtractivo. Por este facto, as fórmulas de Newton-Cotes de grau elevado não são muito aconselháveis.

Quadro 3.8 – Constantes das fórmulas fechadas de Newton-Cotes.

$n$	$k$	$w_i (i = 0, 1, \dots, n)$	$E$
1	$\frac{1}{2}$	1, 1	$-\frac{1}{12} h^3 f''$
2	$\frac{1}{3}$	1, 4, 1	$-\frac{1}{90} h^5 f^{IV}$
3	$\frac{3}{8}$	1, 3, 3, 1	$-\frac{3}{80} h^5 f^{IV}$
4	$\frac{2}{45}$	7, 32, 12, 32, 7	$-\frac{8}{945} h^7 f^{VI}$
5	$\frac{5}{288}$	19, 75, 50, 50, 75, 19	$-\frac{275}{12096} h^7 f^{VI}$
6	$\frac{1}{140}$	41, 216, 27, 272, 27, 216, 41	$-\frac{9}{1400} h^9 f^{VIII}$
7	$\frac{7}{17280}$	751, 3577, 1323, 2989, 2989, 1323, 3577, 751	$-\frac{8183}{518400} h^9 f^{VIII}$
8	$\frac{8}{14175}$	989, 5888, -928, 10496, -4540, 10496, -928, 5888, 989	$-\frac{2368}{467775} h^9 f^{VIII}$

### Fórmulas compostas

Uma vez que os erros das fórmulas de Newton-Cotes são proporcionais a potências de  $b-a$ , se esta quantidade não for suficientemente pequena, as fórmulas deixam de ter utilidade. Nesse caso, o que se deve fazer é dividir o intervalo  $[a, b]$  em subintervalos e aplicar a cada um dos integrais assim obtidos uma das fórmulas de Newton-Cotes.

Considerando  $n$  subintervalos do intervalo original  $[a, b]$ , verifica-se que a largura de cada subintervalo é dada por  $h = \frac{b-a}{n}$ , sendo os extremos des-

tes subintervalos os pontos  $x_i = a + ih$ , para  $i = 0, 1, \dots, n$  (Figura 3.23). Aplicando as fórmulas simples a cada um dos subintervalos, obtém-se:

- Regra do trapézio composta

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) = \quad (3.108)$$

$$= \frac{h}{2} \left( f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right)$$

onde  $f_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . O erro vem dado por:

$$E = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \quad \xi \in [a, b] \quad (3.109)$$

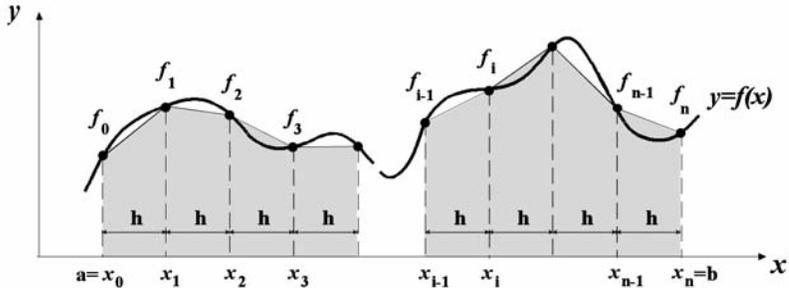


Figura 3.23 – Ilustração da aplicação da regra do trapézio composta.

• *Regra de Simpson composta*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n] = \\ &= \frac{h}{3} \left[ f_0 + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f_{2i} + f_n \right] \end{aligned} \quad (3.110)$$

com

$$E = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b] \quad (3.111)$$

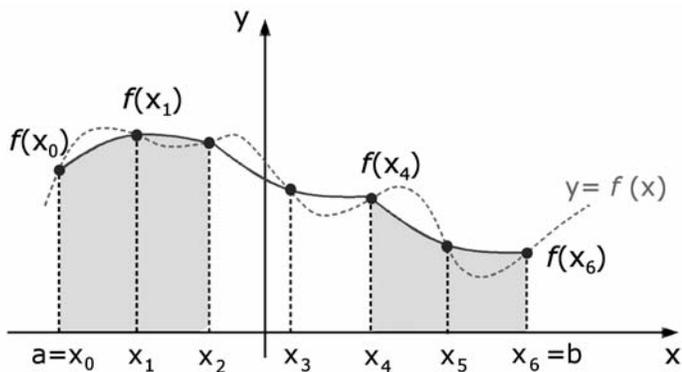


Figura 3.24 – Ilustração gráfica da regra de Simpson composta ( $n = 6$ ).

Note-se que a regra de Simpson composta requer que o domínio de integração  $[a,b]$  seja dividido num número par de intervalos, dado que cada parábola interpoladora é definida com base em dois subintervalos consecutivos (Figura 3.24).

### 3.6 Exercícios

**Exercício 3.1:** Método do ponto fixo aplicado ao cálculo da altura uniforme.

Considerando os dados utilizados no Exemplo 3.9, aplicar o método do ponto fixo à solução da equação de Manning para determinar a altura uniforme, com três casas decimais correctas. Verificar se é possível assegurar *a priori* a convergência do método.

#### Resolução

A equação  $f(h) = 2.5 h - C (2.5 + 2h)^{0.4} = 0$ , onde se considerou:

$$C = \left( \frac{3.0}{75 \times 0.0009^{1/2}} \right)^{0.6}$$

pode escrever-se na forma alternativa:

$$h = g(h) = \frac{C}{2.5} (2.5 + 2h)^{0.4}.$$

Para que o método seja convergente, há que verificar

se  $|g'(h)| < 1$  na vizinhança da raiz (considere-se, tal como no método da bissecção, que a raiz está em  $[0.5,1]$ ). Ora,  $g'(h) = \frac{C}{2.5} \times 0.8 \times (2.5 + 2h)^{-0.6}$ ,

pelo que  $g'(h) \leq g'(0.5) \approx 0.179 < 1$ . Então o método é convergente qualquer que seja a aproximação inicial  $x_0 \in [0.5,1]$ . Os resultados obtidos, considerando  $x_0 = 0.5$ , são apresentados no Quadro 3.9. O método converge para uma altura uniforme  $h = 0.843$  m (valor com três casas decimais correctas) em cinco iterações, exactamente metade das que foram necessárias pelo método da bissecção.

Quadro 3.9 – Resultados do processo iterativo do ponto fixo.

$k$	$x_k$
1	0.7846
2	0.8333
3	0.8413
4	0.8426
5	0.8428

Refira-se que, para resolver este problema físico concreto, o método tem convergência local assegurada, pois é fácil verificar que se cumpre

$$g'(\alpha) = \frac{0.8A}{bP} < 1.$$

**Exercício 3.2:** Método de Newton-Raphson aplicado ao cálculo da altura uniforme.

Considerando os dados do exercício anterior, aplicar o método de Newton-Raphson à solução da equação de Manning (altura do escoamento uniforme com três casas decimais correctas) e verificar a velocidade de convergência do processo iterativo em comparação com resultados obtidos pelos outros métodos aplicados ao mesmo problema.

### Resolução

A derivada da função  $f(h) = 2.5 h - C(2.5 + 2h)^{0.4}$  com

$$C = \left( \frac{3.0}{75 \times 0.0009^{1/2}} \right)^{0.6}$$

é  $f'(h) = 2.5 - 0.8 C(2.5 + 2h)^{0.6}$ . Considerando  $x_0 = 0.5$ , obtém-se por aplicação da Fórmula iterativa (3.45) os valores do Quadro 3.10.

Quadro 3.10 – Resultados do processo iterativo (método de Newton).

$k$	$f(X_{k-1})$	$f'(X_{k-1})$	$x_k$
1	-0.7115	2.0517	0.8468
2	0.0084	2.0977	0.8428
3	0.92x10-6	2.0973	0.8428

O processo convergiu em três iterações, enquanto o método do ponto fixo necessitou de cinco iterações e o método da bissecção de dez.

**Exercício 3.3:** Regra do trapézio composta.

- a) Calcular o integral  $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ , do Exemplo 3.19, através da regra dos trapézios composta com  $n = 2$  e o respectivo majorante do erro. Quantos pontos serão necessários utilizar ao aplicar a regra do trapézio para garantir que o cálculo aproximado do integral tenha erro inferior a  $0.5 \times 10^{-3}$ ?

**b)** Utilizando a regra do trapézio, deduzir uma expressão que permita calcular de forma simples a área de polígonos, como é necessário, por exemplo, ao aplicar o método de Thiessen para o cálculo da precipitação ponderada sobre uma região.

**Resolução**

**a)** Pela Expressão (3.108) com  $n = 2$  (3 pontos) vem que:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{0.5}{2} (1 + 2 e^{0.5^2} + e^{-1}) \approx 0.73137$$

Como:  $I = 0.7468241$  (com 7 c.d.c.)  $\therefore |E| \approx 0.155 \times 10^{-1}$  (1 c.d.c.)

A resposta à questão de quantos pontos são necessários para garantir um erro inferior a  $0.5 \times 10^{-3}$  está na expressão do erro (3.109) que pode ser escrita como:

$$|E_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2, \text{ com } M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f'''(x)|$$

Ora, verifica-se que  $f'''(x) = e^{-x^2} (4x^2 - 2)$  é monótona (crescente), dado que:

$$f''''(x) = e^{-x^2} (-8x^2 + 12x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{1.5} \approx \pm 1.224.$$

O máximo em valor absoluto é  $M_2 = 2$  ( $f'''(0) = -2$  e  $f'''(1) \approx 0.736$ ). Logo,

$$|E| \leq \frac{1-0}{12} \times 2 h^2 \leq 0.5 \times 10^{-3} \Leftrightarrow h^2 \leq 3 \times 10^{-3} \Rightarrow n \geq 18.25 \Rightarrow n = 19$$

Conclui-se que são necessários 20 pontos!

**b)** A regra do trapézio pode ser utilizada para calcular a área de um polígono a partir das coordenadas dos seus vértices. Cada lado de uma linha poligonal fechada forma um trapézio com o eixo das abcissas (ver Figura 3.25).

A área do trapézio correspondente ao lado 1-2 do polígono é dada por:

$$A = (x_2 - x_1) \frac{(y_1 + y_2)}{2}$$

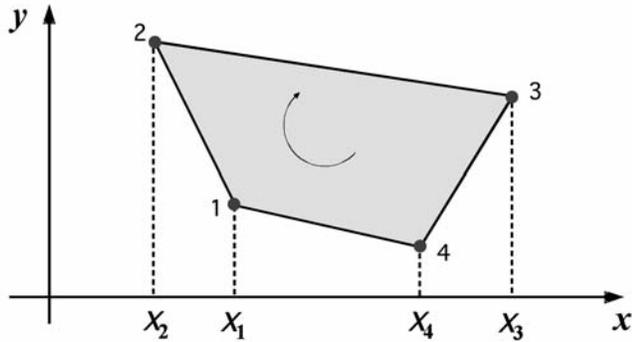


Figura 3.25 – Exemplo de área de uma linha poligonal fechada.

Para um polígono fechado contendo N vértices, um simples somatório de áreas de todos os trapézios permite calcular a área total do polígono, assumindo que o mesmo é percorrido segundo o sentido dos ponteiros do relógio

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [(x_{i+1} - x_i) (y_i + y_{i+1})] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1})$$

onde  $x_{N+1} = x_1$  e  $y_{N+1} = y_1$

## 4 HIDRÁULICA

José P. P. G. Lopes de Almeida<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra.

<sup>2</sup> Instituto do Mar – Centro do Mar e Ambiente.

### 4.1 Nota introdutória

O presente capítulo pretende conduzir o leitor a uma revisão de alguns dos principais conhecimentos de base de hidráulica, com relevância para a análise dos escoamentos com superfície livre. Pese embora o nível elementar da revisão de conhecimentos desenvolvida, pressupõem-se adquiridos certos conceitos fundamentais que se podem encontrar na principal bibliografia que serviu de base à elaboração do presente capítulo: Chadwick *et al.* (2004), Çengel e Cimbala (2007), Hamill (1995), Manzanares (1980), Oliveira e Lopes (2006) e Quintela (1981).

### 4.2 Conceitos básicos de hidráulica

Em hidráulica iremos trabalhar com fluidos. Os fluidos são substâncias com uma característica particular, tendem a tomar a forma do recipiente que os contém – o que equivale a dizer que, quando sujeitos a uma tensão de corte, se deformam indefinidamente – e subdividem-se em líquidos, gases e vapores. Quando colocados num recipiente, os gases e os vapores ocupam todo o volume disponível, ao contrário dos líquidos que ocupam apenas o volume necessário. A diferença entre gás e vapor está relacionada com a noção de temperatura crítica. Para uma temperatura maior que a sua temperatura crítica, a substância encontrar-se-á sempre na forma de gás, não sendo portanto possível a condensação (liquefacção) por maior que seja o valor da pressão.

À noção de fluido estão usualmente associadas as noções de continuidade e isotropia. Embora à escala molecular o fluido seja um agregado de moléculas com espaçamentos variáveis entre as mesmas, este poderá ser considerado, à escala macroscópica, um agregado contínuo de “partículas materiais”. Considera-se que este meio contínuo apresenta iguais características em todas as direcções, ou seja, é isotrópico.

A viscosidade e a compressibilidade são duas propriedades físicas dos fluidos de grande importância. O fluido real é viscoso e compressível. Dependendo do tipo de regime (laminar, de transição ou turbulento), as forças viscosas serão proporcionais à velocidade média elevada a um expoente contido no intervalo  $[1,2]$ . No que respeita à compressibilidade dos líquidos e em particular da água, ela é tão reduzida que na maioria das aplicações a água pode ser considerada incompressível. Exceptuam-se os fenómenos com celeridades da ordem da velocidade de propagação do som na água.

Em certas aplicações, é útil considerar a hipótese de líquido perfeito, isto é, fluido não viscoso e incompressível.

O parâmetro que nos mede a importância relativa das forças de inércia face às forças viscosas é o conhecido parâmetro adimensional, designado por número de Reynolds,  $R_e$ :

$$R_e = \frac{UL}{\nu} \quad (4.1)$$

Na Equação (4.1),  $U$  é a velocidade média;  $L$ , um comprimento característico (o diâmetro hidráulico no caso de colectores circulares sob pressão e o raio hidráulico no caso do escoamento com superfície livre); e  $\nu$ , a viscosidade dinâmica.

Um outro parâmetro adimensional de grande importância, como veremos adiante no texto no caso dos escoamentos com superfície livre, é o número de Froude,  $F_r$ , que mede a importância relativa das forças de inércia face às forças de gravidade:

$$F_r = \frac{U^2}{gL} \quad (4.2)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade e  $L$  é um comprimento característico (nos canais é a profundidade média da secção molhada).

Na análise das forças aplicadas a uma partícula material (análise associada a uma abordagem diferencial), ou a um volume de controle,  $V_c$ , preenchido por um conjunto de partículas materiais limitadas pela superfície envolvente,  $S_c$ , (análise associada a uma abordagem integral), é usual estabelecer a distinção entre forças de superfície e forças de campo (também designadas por forças de massa, ou de volume).

As primeiras, tal como o nome indica, são transmitidas através da superfície. As segundas são forças de acção à distância cuja intensidade é pro-

porcional à quantidade de massa contida no volume limitado pela superfície fronteiria envolvente (no caso da hidráulica apenas nos interessa a força da gravidade).

Uma noção fundamental em hidráulica é o fluxo,  $\mathfrak{S}$ , de uma grandeza genérica,  $f$ , associada a uma velocidade  $\vec{V}$ , através da superfície,  $S$ , segundo a direcção e o sentido determinados pelo versor normal,  $\hat{n}$ :

$$\mathfrak{S} = \int_S f(\vec{V} \cdot \hat{n}) dS \quad (4.3)$$

Na Equação (4.3), o símbolo “.” representa o produto escalar.

Se  $f = 1$ , obteremos o caudal volúmico correntemente designado por caudal,  $Q$ , do qual resulta a noção de módulo da velocidade média,  $U$ , e sua relação com o caudal e com a área da secção,  $S$ :

$$Q = \int_S (\vec{V} \cdot \hat{n}) dS \Rightarrow U = \frac{1}{S} \int_S (\vec{V} \cdot \hat{n}) dS \Leftrightarrow Q = U S \quad (4.4)$$

O caudal mássico é obtido de igual forma fazendo  $f = \rho$ , onde  $\rho$  representa a massa volúmica.

O modo como a velocidade varia no espaço e no tempo é extremamente importante para caracterizar os diversos tipos de escoamentos. Recordando que essa variação é expressa pela derivada substancial da velocidade relativamente a um sistema inercial de coordenadas rectangulares, obteremos:

$$OX: \quad a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.5)$$

$$OY: \quad a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4.6)$$

$$OZ: \quad a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.7)$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  representam as componentes da velocidade segundo os eixos  $OX$ ,  $OY$  e  $OZ$ , respectivamente.

Estas equações expressas na forma vectorial resumem-se a:

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \Leftrightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (4.8)$$

A primeira parcela do segundo membro da última equação corresponde à aceleração local e a segunda exprime a aceleração advectiva.

Com base nos valores da aceleração local e advectiva, é possível caracterizar os seguintes tipos de escoamentos:

– Escoamento *variável*, se existe aceleração local, ou seja,  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \neq 0$  (fixado um determinado “local” no escoamento aí se verifica uma variação da velocidade ao longo do tempo).

Certos autores distinguem ainda os escoamentos:

– *Variável e uniforme*,  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \neq 0 \wedge (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = 0$

– *Variável e não uniforme*,  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \neq 0 \wedge (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \neq 0$

– Escoamento *permanente*, se não existe aceleração local, ou seja,  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$   
É usual distinguir os escoamentos:

– *Permanente uniforme*,  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \wedge (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = 0$

– *Permanente não uniforme (ou variado)*,  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \wedge (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \neq 0$ , o qual ainda se subdivide em:

– *Permanente gradualmente variado se*

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \wedge (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = (\text{reduzida aceleração advectiva})$$

– *Permanente rapidamente variado se*

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \wedge (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = (\text{elevada aceleração advectiva})$$

Uma importante base para a dedução de diversas equações da hidráulica consiste nas chamadas equações de Cauchy, ou equações do equilíbrio indefinido, que se apresentam de seguida:

$$OX: \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \quad (4.9)$$

$$OY: \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (4.10)$$

$$OZ: \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \quad (4.11)$$

Estas equações mais não exprimem que a segunda lei de Newton, ou seja, o princípio fundamental da dinâmica  $\sum \vec{F}_e = m\vec{a}$ , aplicado ao equilíbrio de uma partícula material de fluido para a qual é possível definir o estado de tensão (o estado de tensão define-se pela análise prévia do tetraedro de Cauchy; pressupõe-se o conhecimento da simbologia usual associada à definição do estado de tensão e das componentes da velocidade em relação a um referencial cartesiano) (Çengel e Cimbala, 2007).

A obtenção de diversos resultados da hidráulica assenta nos princípios gerais de conservação da massa, de conservação da energia e de conservação da quantidade de movimento, expressos pelas seguintes equações:

– *Equação da continuidade*, obtida pela imposição de que a derivada substancial (também designada por derivada material) da massa de um determinado sistema material não varie no tempo,  $\frac{dm}{dt} = 0$  (no nosso domínio de análise não é aplicável a expressão de Einstein,  $E = mc^2$ , com  $E$  = energia e  $c$  = celeridade de propagação da luz no vazio, ou seja, de facto a massa é imutável e não pode ser convertida em energia):

$$\frac{dm}{dt} = \int_{VC} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \vec{V}) \right] dV = 0 \quad (4.12)$$

A aplicação do Teorema de Green à equação anterior e a consideração de um fluido incompressível,  $\rho = C^{te}$ , que se escoia no interior de um tubo de fluxo (conduta ou canal) limitado pelas secções transversais de entrada e de saída  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente, e pela secção lateral,  $S_L$ , com  $S_C = S_1 + S_2 + S_L$ , permite convertê-la na Equação (4.13), que de seguida se apresenta, a qual corresponde à forma prática como correntemente é utilizada a equação da continuidade:

$$\int_{S_1} (\vec{V} \cdot \hat{n}) dS = \int_{S_2} (\vec{V} \cdot \hat{n}) dS \Leftrightarrow Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow U_1 S_1 = U_2 S_2 \quad (4.13)$$

– *Equação de Bernoulli* para um fluido perfeito, obtida a partir das equações de Euler do fluido perfeito em coordenadas intrínsecas. Estas equações de Euler resultam das equações de Cauchy quando se consideram nulas as tensões tangenciais. A equação de Bernoulli generalizada para o escoamento de um fluido perfeito no interior de um tubo de fluxo toma então a forma:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha' U) \quad (4.14)$$

onde  $z$  é a cota geométrica,  $p$  é a pressão,  $\gamma$  o peso volúmico e  $\alpha$  e  $\alpha'$  são os coeficientes de correcção da energia cinética e da quantidade de movimento, respectivamente:

$$\alpha = \text{coef. da Energia Cinética ou de Coriolis} = \frac{\int V^3 dA}{AU^3} \quad (4.15)$$

$$\alpha' = \text{coef. da Quant. de Movimento ou de Boussinesq} = \frac{\int V^2 dA}{AU^2} \quad (4.16)$$

Uma extensão para o caso dos fluidos reais pode ser conseguida pela introdução do termo  $J$ , designado por *perda de carga unitária*. Este termo exprime a perda de carga hidráulica (perda de energia por unidade de peso) por unidade de percurso, obtendo-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha' U) - J \quad (4.17)$$

– Equação que traduz o *teorema de Euler*, ou da *conservação da quantidade de movimento*, obtida por integração das equações de Cauchy num determinado volume de controlo levando em conta a equação da continuidade:

$$\int_{\bar{s}C} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \hat{n}) ds = - \int_{V_C} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} dv + \int_{V_C} \rho \vec{X} dv + \int_{\bar{s}C} \vec{T} ds \quad (4.18)$$

onde  $\vec{X}$  representa as forças de campo por unidade de massa e  $\vec{T}$  representa as tensões.

Esta última expressão na forma integral, aplicada a um  $V_C$  definido no seio de um escoamento de um fluido pesado e incompressível, toma a forma:

$$\vec{G} + \vec{\pi} + \vec{I} + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 = 0 \quad (4.19)$$

O significado dos termos envolvidos na Equação (4.19) é o seguinte:

$\vec{G}$  peso do líquido no interior do  $V_C$ ;

$\vec{\pi}$  resultante das forças que o meio exterior exerce sobre o  $V_C$  através da superfície envolvente;

$\vec{I}$  resultante das forças locais de inércia (se  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{I} = 0$ );

$\vec{M}_1$  resultante da quantidade de movimento que entra no  $V_C$  na unidade de tempo;

$\vec{M}_2$  resultante da quantidade de movimento que sai do  $V_C$  na unidade de tempo.

## 4.3 Escoamentos com superfície livre

### 4.3.1 Definições e noções elementares

O escoamento com superfície livre de um líquido é um escoamento que apresenta como condição fronteira particular o facto de a parte superior do escoamento contactar com um meio gasoso em toda a sua extensão. Tal significa que a pressão nessa zona constitui um dado que regra geral é conhecido *a priori*, o que já não acontece com a localização geométrica da superfície livre, a qual é uma variável do problema. Portanto, apenas o perímetro molhado da secção transversal apresenta uma natureza parietal.

No caso da água escoando-se em contacto com a atmosfera terrestre, este tipo de escoamentos é extraordinariamente frequente, ocorrendo no meio natural em linhas de água, ribeiros e ribeiras, rios, quedas de água, estuários, lagoas e lagunas, mares e oceanos. Em meio urbano, este tipo de escoamento é também muito comum, ocorrendo em valetas e valas de drenagem, em colectores de drenagem de águas pluviais e residuais, em sumidouros, câmaras de visita, em canais e à superfície do solo, sob forma de escoamento superficial.

Desde logo é perceptível que os tubos de fluxo associados a este tipo de escoamentos podem apresentar características diversas, que se enunciam abaixo:

- As rugosidades parietais poderão variar dentro de cada secção transversal (por exemplo, o fundo de um canal pode ser revestido e os taludes laterais serem em terra – neste caso, as secções transversais designam-se por *secções mistas*);
- As rugosidades parietais poderão variar ao longo do tubo de fluxo (por exemplo, a transição de um leito de rio de uma zona rochosa para uma zona arenosa);
- As rugosidades parietais entre diversos tubos de fluxo podem ser muito diferentes, uma vez que existem revestimentos naturais, como terra (com ou sem vegetação), seixos e rocha, e revestimentos artificiais, como o betão ou a pedra aparelhada;
- Quanto à geometria das secções transversais, estas podem classificar-se em *regulares* ou *irregulares*, *côncavas* ou *convexas*, *abertas* ou *fechadas* (por exemplo, em sistemas de drenagem urbana são comuns secções fechadas circulares e ovóides). As secções regulares podem ainda ser *simples* (ou seja, com geometria ditada por uma única figura geométrica, como o trapézio, o rectângulo, o triângulo, o círculo, o semicírculo,

etc.), ou *compostas* – neste último caso, com uma definição geométrica que se pode considerar resultante da agregação de dois ou mais tipos de secções simples de forma a gerar, em geral, dois leitos: o leito menor e o leito maior. O leito menor destina-se ao escoamento em circunstâncias normais e tem reduzida largura para gerar boas velocidades de arrastamento; o leito maior destina-se a acomodar o escoamento em situação de cheia. A Figura 4.1 ilustra este tipo de secção, também denominado *secção de leito múltiplo*. É este o tipo de secção transversal que foi implementada no rio Mondego no troço a jusante do açude ponte de Coimbra;

- A geometria das secções transversais poderá sofrer variações ao longo do tubo de fluxo (por exemplo, num estreitamento de uma linha de água ocasionado por uma passagem inferior sob uma via rodoviária);
- As inclinações longitudinais dos tubos de fluxo podem ser muito elevadas, como no caso das quedas de água ou dos descarregadores de superfície de soleira normal, ou extraordinariamente reduzidas, como nos canais de rega e nos colectores de drenagem de águas pluviais e residuais. No caso de tubos de fluxo de leito erodível, a própria inclinação longitudinal pode alterar-se ao longo do tempo, dando lugar a escoamentos com fundo móvel (cumulativamente, as secções transversas e a rugosidade também podem variar ao longo do tempo);
- A inclinação longitudinal pode variar, de forma contínua ou descontínua, ao longo do tubo de fluxo.

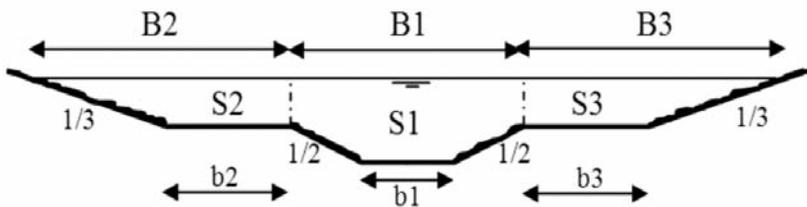


Figura 4.1 – Exemplo de secção transversal *composta e mista*.

No que respeita às afluências a estes tubos de fluxo, existe também uma grande diversidade de situações:

- Afluências variáveis, como é o caso de uma onda de cheia ou de inundação que se propaga num colector, ou ainda o caso do escoamento gerado pelas manobras de abertura, fecho, ou simplesmente de regulação de uma comporta de alimentação de um canal que drena as águas de uma zona verde localizada em meio urbano.

- Afluências constantes. De facto, fixada uma determinada abertura, sob carga constante, da comporta de alimentação de um canal, o escoamento tende a estabilizar, sendo que nestas circunstâncias o caudal afluente ao tubo de fluxo passa a ser constante.

A diversidade de configurações geométricas dos tubos de fluxo e de solicitações hidráulicas a que estes estão submetidos dá origem a uma grande variedade de regimes de escoamentos, já definidos na secção anterior, que se sintetizam da seguinte forma:

- Regime permanente:
  - Regime uniforme
  - Regime variado:
    - Gradualmente variado (curva de regolfo)
    - Rapidamente variado no qual poderemos ter o ressalto hidráulico, a queda brusca e as contracções
- Regime variável

A geometria e a constituição parietal destes tubos de fluxo, de ora em diante designados simplesmente por canais, naturais ou artificiais, é da maior importância, pelo que se passa a defini-la sumariamente.

Em cada secção transversal, é possível identificar o ponto de cota mínima ou, se o fundo for horizontal, o seu ponto médio. A aglutinação destes pontos dá origem a uma linha designada por *talvegue*.

Quando se traça o perfil longitudinal de um canal, a sua *inclinação longitudinal* será definida pelo talvegue (Figura 4.2).

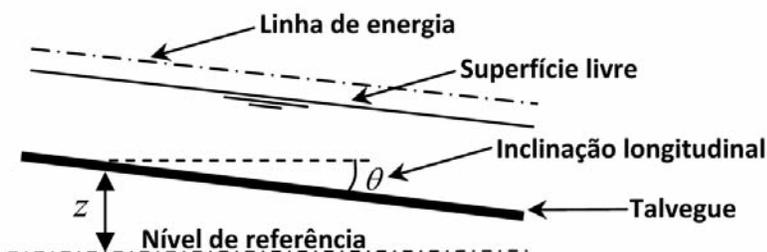


Figura 4.2 – Esquema do perfil longitudinal de um canal.

A área da *secção transversal molhada*,  $S$ , (ou seja, da secção normal aos filetes líquidos) e o *perímetro molhado*,  $P$ , permitem definir o *raio hidráulico*,  $R = S / P$ .

O valor de  $R$  depende da *altura de água na secção*,  $h$ , a qual se define como sendo a menor distância, medida na secção transversal molhada, entre o talvege e a superfície livre do líquido (Figura 4.3).

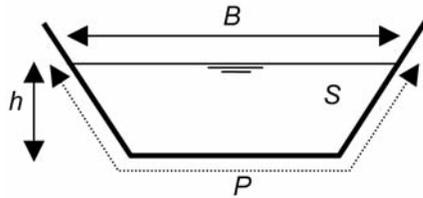


Figura 4.3 – Geometria da secção transversal de um canal.

Para secções irregulares, a obtenção da relação entre a altura de água na secção e os parâmetros anteriores pode basear-se numa prévia avaliação discreta, seguida de um processo de ajuste numérico da função contínua que melhor a descreva.

No Quadro 4.1, apresentam-se as características geométricas de vários tipos de secções transversais.

Quadro 4.1 – Características geométricas das secções transversais.

<p><u>Trapézio</u></p> $S = (b + xh)h$ $P = b + 2h\sqrt{1 + x^2}$ $B = b + 2xh$ $R = \frac{S}{P} = \frac{(b + xh)h}{b + 2h\sqrt{1 + x^2}}$	<p><u>Círculo</u></p> $h = \frac{D}{2} \left( 1 - \cos \frac{\beta}{2} \right)$ $S = \frac{1}{8} (\beta - \sin(\beta)) D^2$ $P = \frac{1}{2} D \beta$ $B = D \sin \left( \frac{\beta}{2} \right)$ $R = \frac{S}{P} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right) D$
<p><u>Rectângulo</u> (trapézio com <math>b=B</math>)</p>	
<p><u>Triângulo</u> (trapézio com <math>b=0</math>)</p>	

Um canal diz-se *prismático* ou *cilíndrico* quando pode ser gerado por geratrizes rectilíneas apoiadas numa única secção transversal poligonal ou curva, respectivamente. É este o tipo mais comum de geometria em sistemas de drenagem urbana, e será implicitamente considerado ao longo do presente texto.

Como se analisará de seguida, a reduzida inclinação, concavidade e convexidade do talvegue leva a que a distribuição de pressões na secção transversal possa ser considerada hidrostática.

Tome-se como exemplo um pequeno troço de um escoamento num plano vertical em que possa ser desprezada a perda de carga. Como referido anteriormente, as equações de Cauchy, simplificadas para o caso do líquido não viscoso e escritas em coordenadas intrínsecas, dão origem às equações de Euler em coordenadas intrínsecas:

$$\hat{s}: \quad \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} = X_s - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (4.20)$$

$$\hat{n}: \quad \frac{V^2}{R} = X_n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (4.21)$$

$$\hat{b}: \quad 0 = X_b - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} \quad (4.22)$$

Na maioria das situações práticas, o topo da secção transversal molhada é um segmento de recta horizontal, pelo que o eixo da binormal é horizontal, de que resulta  $X_b = 0$ . Da aplicação das equações anteriores ao caso do escoamento num plano vertical convexo sobre um fundo com inclinação longitudinal caracterizada pelo ângulo  $\theta$ , tal como representado na Figura 4.4, resultarão as conclusões de seguida apresentadas.

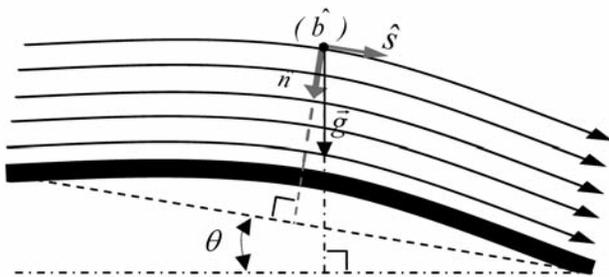


Figura 4.4 – Referencial adoptado na análise do efeito da curvatura do fundo na distribuição de pressões.

Partindo da Equação (4.21), obteremos sucessivamente:

$$\hat{n} : \frac{V^2}{R} = X_n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \Leftrightarrow \hat{n} : \frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \left( \frac{V^2}{R} - X_n \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = -\rho \left( \frac{V^2}{R} - X_n \right) n + C^{te}, \text{ com } n = \text{ordenada}, C^{te} = 0$$

Atendendo agora a que na expressão anterior  $X_n = g \cos \theta$  e  $R \neq \infty$ , obtém-se:

$$p = \rho \left( g \cos \theta - \frac{V^2}{R} \right) n \quad (4.23)$$

O valor de  $n$  relaciona-se com o correspondente valor medido na vertical,  $d$ , da forma,  $d = n \cos \theta$ , do que resulta:

$$p = \rho \left( g - \frac{V^2}{R} \frac{1}{\cos \theta} \right) d \quad (4.24)$$

Conclui-se que a diferença de pressão entre dois pontos da mesma secção transversal depende unicamente da diferença de cotas entre os referidos pontos, à semelhança do que ocorre na lei hidrostática de pressões. No entanto, verifica-se que, para o fundo convexo, a pressão é inferior à hidrostática. De igual forma se concluiria que, para a situação simétrica (isto é, fundo côncavo), a pressão seria superior à hidrostática. Se as trajectórias apresentarem reduzida curvatura, então  $R \rightarrow \infty$ , pelo que a Equação (4.24) se reduz a  $p = \rho g d$ , o que indica que a distribuição de pressões na secção transversal será hidrostática independentemente da inclinação longitudinal do canal.

### 4.3.2 A energia específica

Analisa-se de seguida o escoamento com superfície livre no caso em que as características locais do escoamento não se alteram, ou seja, quando se trata de um escoamento permanente.

Nesta situação, a Equação (4.14) de Bernoulli reduz-se a:

$$\frac{d}{ds} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = -J \quad (4.25)$$

Como já foi referido, a variação de pressão na secção transversal molhada é hidrostática pelo que, atendendo à Figura 4.5, se pode verificar que:

$$z + \frac{p}{\gamma} = Z_{SL} = h \cos \theta + y \quad (4.26)$$

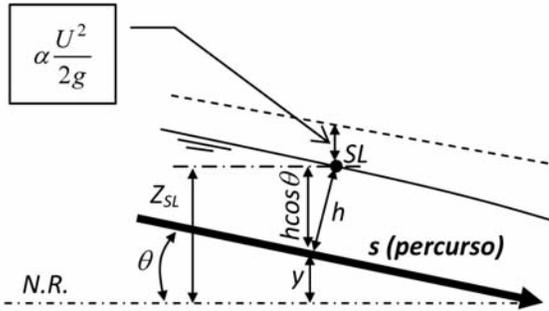


Figura 4.5 – Visualização dos termos das Equações (4.25) e (4.26).

Se incorporarmos a relação estabelecida pela Equação (4.26) na Equação (4.25) e se considerarmos cumulativamente que  $\frac{dy}{ds} = -\text{sen}\theta$ , então obtém-se:

$$\frac{d}{ds} \left( h \cos\theta + y + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = -J \Leftrightarrow \quad (4.27)$$

$$\frac{d}{ds} \left( h \cos\theta + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = \text{sen}\theta - J$$

Na prática, os valores de  $\theta$  são muito reduzidos, logo  $i = \text{tg}\theta \cong \text{sen}\theta \wedge \cos\theta \cong 1$ . Por outro lado, pode considerar-se em muitas situações que  $\alpha \cong 1$ , pelo que a Equação (4.27) se reduz a:

$$\frac{d}{ds} \left( h + \frac{U^2}{2g} \right) = i - J \Leftrightarrow \frac{dE}{ds} = i - J \quad (4.28)$$

$$\text{onde } E = h + \frac{U^2}{2g} \quad (4.29)$$

Surge assim uma nova quantidade traduzida pela Equação (4.29), que se designa por  $E = \text{energia específica}$ , e que representa a carga hidráulica numa secção do escoamento, tomando como nível de referência o fundo do canal nessa secção.

Conclui-se então que, num escoamento permanente com superfície livre, nas condições anteriormente apresentadas:

- A variação da energia específica por unidade de percurso é igual ao trabalho realizado pela força gravítica por unidade de peso de fluido e por unidade de percurso, diminuído do trabalho realizado pelas forças de atrito por unidade de peso de fluido e por unidade de percurso;

- Dependendo do valor da diferença ( $i-J$ ), assim a energia específica variará ou se manterá constante ao longo do percurso.

O valor de  $\alpha$  presente na Equação (4.25) pode ser calculado, no caso de uma secção composta, assumindo que  $\alpha = 1$  em cada subsecção. O Exercício 4.1 apresentado no subcapítulo 4.6 ilustra este procedimento.

Atendendo à equação da continuidade, a energia específica é passível de ser calculada em função do caudal e da altura de água na secção transversal molhada, desde que se conheça a relação  $S = S(h)$ , com  $S$  = área da secção transversal molhada:

$$E = h + \frac{Q^2}{2g[S(h)]^2} \quad (4.30)$$

Qualquer escoamento permanente com um caudal genérico  $Q$ , que se escoe com a energia específica,  $E$ , numa secção definida por  $S = S(h)$ , fará parte da *superfície de energia*,  $F(Q, E, h) = 0$ , dessa secção, definida pela equação:

$$E - h - \frac{Q^2}{2g[S(h)]^2} = 0 \Leftrightarrow F(Q, E, h) = 0 \quad (4.31)$$

Para concretizar, considere-se na Equação (4.30) uma secção rectangular de largura  $B$ ,  $S(h) = B h$ . Nesta situação, a equação da energia específica toma a forma:

$$E = h + \frac{Q^2}{2gB^2h^2} \quad (4.32)$$

Com base na Equação (4.32), pode calcular-se a variação da energia específica com a altura  $h$ , para diferentes caudais,  $Q_{iii}$ ,  $Q_{ii}$  e  $Q_i$ , e larguras,  $B_{iii}$ ,  $B_{ii}$  e  $B_i$ . Os resultados são apresentados na Figura 4.6 e na Figura 4.7.

### 4.3.3 Os regimes lento, crítico e rápido

Decorrente da análise das duas figuras seguintes, identifica-se a ocorrência de três regimes distintos: o regime rápido (reduzidos valores de  $h$ ), o regime lento (elevados valores de  $h$ ) e o regime crítico situado entre os dois últimos, na zona onde a curva da energia específica apresenta um mínimo. Facilmente se percebe que, fixado o caudal, a forma mais eficiente

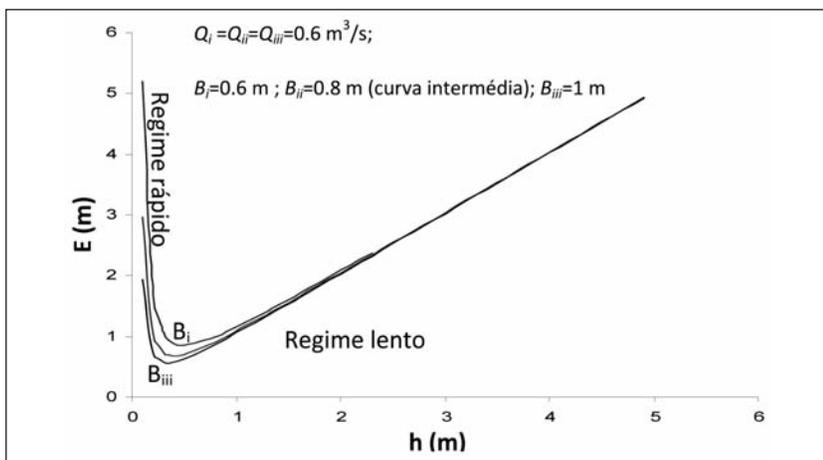


Figura 4.6 –  $E = E(h)$ , com  $Q = C^e$  e  $B_{iii} > B_{ii} > B_i$ .

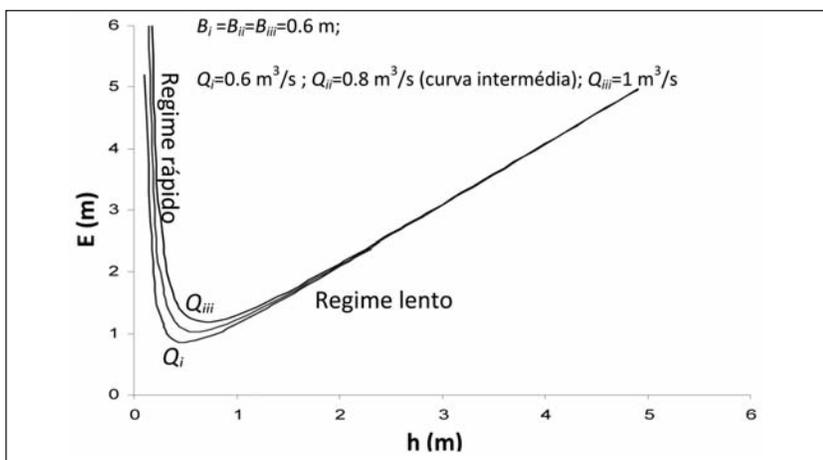


Figura 4.7 –  $E = E(h)$ , com  $B = C^e$  e  $Q_{iii} > Q_{ii} > Q_i$ .

de escoamento ocorre quando a energia específica é mínima – o mesmo é dizer que, fixada a energia específica, a forma mais eficiente de escoamento ocorrerá quando o caudal for máximo. A identificação analítica destes extremos será efectuada à custa da anulação da primeira derivada em ordem a  $h$ , tanto da energia específica como do caudal. Assim:

$$F(Q_{m\acute{a}x}, E, h) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial h} + \frac{\partial F}{\partial E} \frac{dE}{dh} = 0 \Leftrightarrow \frac{dE}{dh} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial h}}{\frac{\partial F}{\partial E}} \quad (4.33)$$

$$F(Q, E_{\min}, h) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial h} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{dQ}{dh} = 0 \Leftrightarrow \frac{dQ}{dh} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial h}}{\frac{\partial F}{\partial Q}} \quad (4.34)$$

$$\frac{dE}{dh} = 0 \wedge \frac{dQ}{dh} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial h} = 0 \quad (4.35)$$

Conclui-se então que estes dois extremos são atingidos em simultâneo num mesmo regime de escoamento, designado por *regime crítico*.

Da análise das figuras anteriores, observa-se que:

- Fixada a largura da secção rectangular e a altura molhada, a energia específica aumenta com o aumento do caudal.
- Fixado o caudal e a altura molhada, a energia específica diminui com o aumento da largura da secção rectangular.
- A energia específica apresenta um *mínimo* num ponto de inflexão da curva,  $\frac{dE}{dh} = 0$ , sendo aí designada por *energia crítica*.
- Para cada valor da energia específica superior ao da energia crítica, há duas alturas de água, uma superior e uma inferior, para as quais é possível o escoamento do mesmo caudal.
- Para a altura superior, o escoamento apresentará necessariamente uma velocidade inferior à velocidade crítica, pelo que se designará por *regime lento, fluvial, ou subcrítico*.
- Para a altura inferior, o escoamento apresentará necessariamente uma velocidade superior à velocidade crítica, pelo que se designará por *regime rápido, torrencial, ou supercrítico*.
- A energia específica tende assintoticamente para  $E = h$  e para  $h = 0$ .

Designando por  $Q_0$  o caudal em regime permanente, a condição de regime crítico, notado pelo índice “c”, conduz-nos a:

$$\frac{dE}{dh} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{Q_0^2}{gS_c^3} \left( \frac{dS}{dh} \right)_c = 0 \Leftrightarrow Q_0 = \sqrt{g} S_c \sqrt{\frac{S_c}{\left( \frac{dS}{dh} \right)_c}} \quad (4.36)$$

Atendendo à equação da continuidade:

$$Q_0 = U_c S_c = \sqrt{g} S_c \sqrt{\frac{S_c}{\left(\frac{dS}{dh}\right)_c}} \Rightarrow U_c = \sqrt{\frac{g S_c}{\left(\frac{dS}{dh}\right)_c}} \quad (4.37)$$

então a energia crítica vale:

$$E_c = h_c + \frac{U_c^2}{2g} = h_c + \frac{1}{2} \frac{S_c}{\left(\frac{dS}{dh}\right)_c} = h_c + \frac{1}{2} h_{mc} \quad (4.38)$$

Vejamos qual é o significado físico da quantidade,  $h_{mc}$ :

$$h_{mc} = \frac{S_c}{\left(\frac{dS}{dh}\right)_c} \quad (4.39)$$

Para tal, considere-se o caso de secções simples de geometria conhecida, como, por exemplo, as secções trapezoidais.

Do Quadro 4.1, extraímos a expressão da área da secção transversal,

$$S(h) = (b + xh)h$$

com a qual determinamos o valor da correspondente derivada,

$$\left(\frac{dS}{dh}\right)_c = b + 2xh = B_c$$

Este resultado representa a largura da superfície livre da secção molhada crítica, pelo que a Equação (4.36) pode também ser apresentada na forma:

$$\frac{Q_0^2 B_c}{g S_c^3} = 1 \quad (4.40)$$

Ao analisar agora  $h_{mc} = \frac{S_c}{B_c}$  verifica-se que se trata de uma quantidade com o significado de uma profundidade média da secção molhada crítica.

Então, escrever-se-á:

$$U_c = \sqrt{g h_{mc}} \quad (4.41)$$

Substituindo a relação traduzida pela Equação (4.41) na Equação (4.2), e considerando para comprimento característico a profundidade média da secção molhada crítica, obtém-se para o número de Froude o valor unitário  $F_{rc} = 1$ , uma vez que

$$F_r = \frac{U^2}{g L}, \quad U = U_c \quad \text{e} \quad L = h_{mc}$$

Duas conclusões são imediatas:

- O regime crítico caracteriza-se por um valor unitário para o número de Froude.
- No regime crítico, a velocidade do escoamento é igual à celeridade de propagação de ondas de gravidade,  $C$ , em águas de baixa profundidade,  $h$  (esta celeridade é dada pela expressão:  $C = \sqrt{g h}$ ).

A segunda conclusão permite compreender por que razão o regime lento é controlado por jusante e o rápido por montante.

De facto, se se provocar uma perturbação na superfície livre da água que se escoar numa vala de drenagem urbana, por exemplo, percutindo a água com um pau, as ondas de gravidade começam imediatamente a propagar-se, tanto para jusante como para montante. Se o escoamento se processa em regime rápido, o meio de propagação viaja para jusante com maior rapidez do que a propagação da onda para montante. É, portanto, impossível a progressão destas perturbações para montante.

No escoamento em regime lento, verifica-se precisamente o contrário.

E no escoamento em regime crítico?

Passa-se o mesmo que no regime rápido, ou seja, o escoamento tem de ser controlado por montante.

Se a perturbação for agora provocada pela variação de caudal devida ao accionamento da comporta representada na Figura 4.8, as conclusões serão exactamente análogas.

Repare-se que, fixado o tipo de geometria da secção transversal (rectângulo, triângulo, trapézio, etc.) de um canal prismático, é possível, em geral, promover o escoamento de um determinado caudal constante,  $Q_0$ , segundo três tipos distintos de regime:

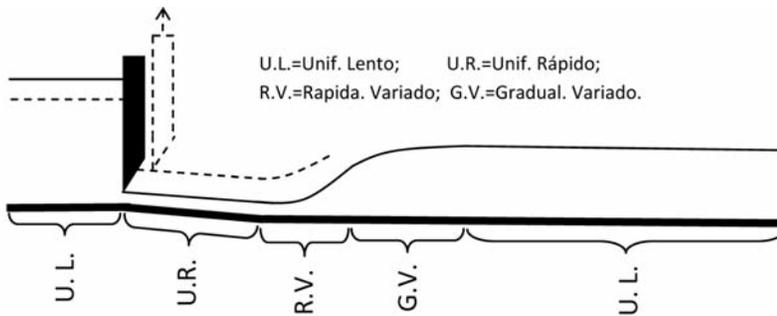


Figura 4.8 – Comporta controlando em simultâneo um escoamento lento por jusante e um escoamento rápido por montante.

1. Regime crítico (mínimo de energia específica; apenas é possível o escoamento crítico).
2. Regime lento (energia específica superior à do regime crítico, sendo a velocidade inferior à desse regime; são possíveis inúmeros escoamentos lentos com  $E(h) > E(h_c)$  e  $h > h_c$  até ao limite  $h <$  altura máxima da secção).
3. Regime rápido (tal como no regime lento, a energia específica é superior à do regime crítico, mas a sua velocidade é agora superior à desse regime; são possíveis inúmeros escoamentos rápidos com  $E(h) > E(h_c)$  e  $h < h_c$ ).

## 4.4 Dimensionamento de canais

### 4.4.1 Regime permanente/Análise na secção transversal

No dimensionamento de canais, intervêm parâmetros como as características geométricas da secção transversal, as rugosidades parietais, a inclinação longitudinal e os valores do caudal e da velocidade do escoamento.

Dada a multiplicidade de aspectos envolvidos, estes serão introduzidos de forma gradual e, sempre que possível, apoiados em exemplos de aplicação.

**Exemplo 4.1:** Comparação das características dos regimes lento, crítico e rápido em dois dispositivos de drenagem urbana: um canal de secção rectangular e um colector circular.

Pretende-se escoar um caudal de ponta de cheia de  $1 \text{ m}^3/\text{s}$ , originado numa zona verde urbana. Pode recorrer-se a um canal de drenagem com

secção rectangular de 1.50 m de largura por 1 m de altura ou fazer uso de um colector com 1.20 m de diâmetro. Calcule a altura molhada, a velocidade, a energia específica, o número de Reynolds e o número de Froude, considerando escoamentos em regime crítico, lento e rápido em ambas as secções. Adopte uma viscosidade cinemática para a água de  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .

### Resolução:

#### A) Regime crítico e secção rectangular (resolução analítica)

No caso da secção rectangular, é possível uma resolução analítica.

A Equação (4.36) toma a forma:

$$S(h) = B_c h_c \Rightarrow \left( \frac{dS}{dh} \right)_c = B_c \Rightarrow Q_0 = \sqrt{g} B_c h_c \sqrt{\frac{B_c h_c}{B_c}} \Leftrightarrow h_c = \left[ \frac{Q_0}{B_c \sqrt{g}} \right]^{2/3}$$

Substituindo os dados na equação anterior resulta imediatamente:

$$h_c \cong 0.57 \text{ m}$$

A Equação (4.41) fornece o valor da velocidade:  $U_c = \sqrt{g h_{mc}}$

Da Equação (4.39), verifica-se que  $h_{mc} = h_c$ , pelo que a simples substituição fornece:

$$U_c \cong 1.869 \text{ m/s}$$

A energia crítica calcula-se facilmente por:

$$E_c = h_c + \frac{U_c^2}{2g} \cong 0.535 \text{ m}$$

Para calcular o número de Reynolds, é preciso conhecer o raio hidráulico. Recorrendo ao Quadro 4.1, e considerando a secção trapezoidal com  $x = 0$  e  $b = B = 1.50 \text{ m}$ :

$$R_c = \frac{S_c}{P_c} = \frac{1.50h_c}{1.50 + 2h_c} \cong 0.24 \text{ m} , \quad R_e = \frac{U_c R_c}{\nu} \cong 451829$$

Para o número de Froude, obter-se-á:

$$F_r = \frac{U_c^2}{g h_{mc}} = 1$$

## B) Regime crítico e secção circular (resolução numérica)

Neste caso, a Equação (4.36) não pode ser resolvida analiticamente. Em diversas obras, podem encontrar-se pormenores relativos à implementação de métodos numéricos em calculadoras programáveis para resolução deste tipo de problemas (e. g., Quintela, 1981). No entanto, neste curso, promove-se uma abordagem simplificada baseada numa pesquisa exaustiva das raízes por cálculo enumerativo ao longo do domínio da equação. Este processo é hoje muito fácil de implementar, dada a vulgarização dos computadores pessoais e das calculadoras programáveis. Este método tem ainda a vantagem de permitir visualizar o andamento das funções envolvidas.

O problema em análise pode ser resolvido por um processo de cálculo numérico baseado nos seguintes passos:

- i) Varrimento de todo o domínio atribuindo crescentes valores a  $\beta_c^0, \beta_c^1, \beta_c^2, \dots, \beta_c^{n+1}$ .
- ii) Para os valores anteriores, calcula-se:

$$h_c^i = \frac{D}{2} \left( 1 - \cos \frac{\beta_c^i}{2} \right)$$

$$S_c^i = \frac{1}{8} \left( \beta_c^i - \sin(\beta_c^i) \right) D^2$$

$$\left( \frac{dS}{dh} \right)_c^i = \frac{S_c^{i+1} - S_c^i}{h_c^{i+1} - h_c^i}$$

$$F^i = Q_0 - \sqrt{g} S_c^i \sqrt{\frac{S_c^i}{\left( \frac{dS}{dh} \right)_c^i}}$$

- iii) Identifica-se o valor de  $\beta^i$  que conduz a  $F^i \cong 0$ , estando assim encontrado o valor de  $\beta_c = \beta^i$ . Com base neste valor, nas fórmulas do passo ii) e no Quadro 4.1, os restantes valores solicitados no problema podem ser calculados.

A adopção deste processo de cálculo conduz aos seguintes resultados:

$$\beta_c \cong 2.950 \text{ rad} \Rightarrow h_c \cong 0.542 \text{ m}; S_c \cong 0.497 \text{ m}^2; U_c = Q_0 / S_c \cong 2.014 \text{ m/s}$$

$$E_c = h_c + \frac{U_c^2}{2g} \cong 0.749 \text{ m}; P_c = \frac{1}{2} D \beta_c \cong 1.770 \text{ m}; R_c = \frac{S_c}{P_c} \cong 0.281 \text{ m}$$

$$R_e \cong 565047; \left( \frac{dS}{dh} \right)_c \cong 1.195 \text{ m}; h_{mc} = \frac{S_c}{\left( \frac{dS}{dh} \right)_c} \cong 0.416 \text{ m}; F_r = 0.996 \cong 1$$

### C) Regime lento e rápido na secção rectangular e na secção circular (resolução numérica)

Os escoamentos em regime lento e rápido apresentam maior energia específica do que em regime crítico. Para se calcularem estes regimes, atribuir-se-á à energia específica valores necessariamente superiores aos correspondentes valores da energia crítica calculados antes.

As raízes da Equação (4.31) fornecerão os valores das alturas molhadas em regime lento e rápido. O processo de resolução numérica da Equação (4.31) é análogo ao descrito na alínea B).

Considerando para a energia específica, por exemplo, o valor  $E = 0.8 \text{ m}$ , obtêm-se os seguintes resultados:

Secção Rectangular	Regime Lento	Regime Rápido
$E \text{ (m)}$	0.8	0.8
$h \text{ (m)}$	0.760	0.190
$U \text{ (m/s)}$	0.877	3.509
$R_e$	331126	531915
$F_r$	0.103	6.612

Secção Circular	Regime Lento	Regime Rápido
$E \text{ (m)}$	0.8	0.8
$h \text{ (m)}$	0.694	0.451
$U \text{ (m/s)}$	1.476	2.575
$R_e$	482288	631567
$F_r$	0.388	2.034

O regime crítico afigura-se como o que minimiza a energia específica. No entanto, a necessidade de limitar a erosão e de controlar o escoamento por jusante faz com que a maioria dos escoamentos em canais ocorra em regime lento (também nos rios este é o regime mais frequente, razão pela qual o escoamento lento é igualmente designado por escoamento fluvial).

Neste momento, formula-se a seguinte questão:

Fixado um caudal, uma geometria da secção transversal e um revestimento, quais são as inclinações longitudinais que se devem implementar num canal prismático para realizar os três tipos de escoamentos considerados – crítico, lento e rápido?

Na secção seguinte apresenta-se uma resposta para esta questão.

#### 4.4.2 Regime permanente e uniforme/Análise incorporando a inclinação longitudinal e a natureza parietal do canal

Primeiro, admita-se a existência de troços suficientemente longos de canal prismático, que permitam a ocorrência de escoamento perfeitamente formado e estabilizado de características inalteradas ao longo do percurso. Nestas condições, ocorre o chamado escoamento permanente e uniforme, pelo que:

$$\frac{dE}{ds} = 0 \quad (4.42)$$

Da Equação (4.42), resulta:  $\frac{dE}{ds} = i - J$ , pelo que se conclui que  $i = J$ .

Este resultado revela que, neste tipo de regime, a perda de carga unitária é igual à inclinação do talvegue do canal prismático. Recordando a interpretação anteriormente desenvolvida em relação à Equação (4.28), dir-se-á que *o trabalho necessário para vencer as forças de atrito é integralmente fornecido pela acção da gravidade ao longo da direcção e sentido do escoamento*. Isto só é possível dada a existência de uma inclinação negativa da massa de água induzida pela inclinação do talvegue do canal prismático.

Para se calcular a inclinação do canal, há que adoptar então uma lei de resistência que nos forneça o valor de  $J$ .

Como é sabido, o processo dissipativo tem uma expressão distinta consoante se trate do regime laminar, ou turbulento (liso, de transição ou rugoso). Nos tubos de secção cheia, em que o comprimento característico é o diâmetro hidráulico, são usuais os seguintes limites:

- Regime laminar:  $R_e < 2000$ .
- Regime turbulento:  $R_e > 4000$ .

Recordando que, no caso de canais, o comprimento característico é o raio hidráulico, o qual é  $\frac{1}{4}$  do diâmetro hidráulico, obter-se-á:

- Regime laminar:  $R_e < 500$ .
- Regime turbulento:  $R_e > 1000$ .

O valor de  $R_e$  nas situações correntes de escoamento com superfície livre em meio urbano é bastante superior a 1000, o que indica que o processo dissipativo ocorre em regime turbulento.

Considerando  $R = D/4$ , e atendendo a que  $J = i$ , é possível determinar o factor de Darcy-Weisbach, para o caso do escoamento uniforme em canais cuja rugosidade seja conhecida, utilizando o ábaco de Moody. Com iguais adaptações se pode recorrer à fórmula semiempírica de Colebrook-White. No entanto, as particularidades do escoamento em canais (note-se que a distribuição de velocidades na secção transversal de um canal se afasta bastante da distribuição axissimétrica de velocidades na secção circular de uma conduta em pressão) e a própria evolução histórica privilegiaram abordagens mais aplicadas, baseadas em leis totalmente empíricas de resistência.

Considere-se então a Figura 4.9, na qual se representa esquematicamente o equilíbrio entre a força de atrito, dada por  $\vec{\tau}LP$ , e a força gravítica que mobiliza o escoamento, dada por  $\vec{G} \sin \alpha$ . A tensão de atrito,  $\vec{\tau}$ , desenvolve-se ao longo da superfície de contacto entre o canal de inclinação,  $i$ , e o elemento de fluido de comprimento,  $L$ , secção transversal,  $S$ , e perímetro molhado,  $P$ .

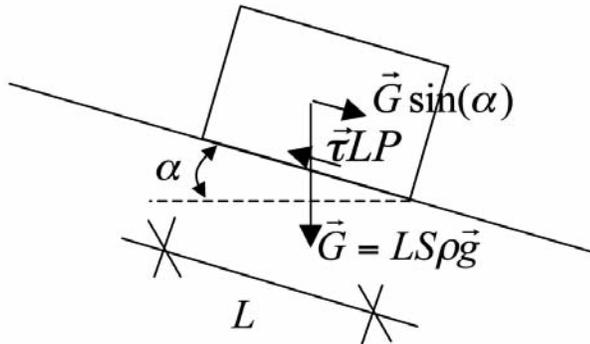


Figura 4.9 – Equilíbrio entre forças de atrito e forças de gravidade.

Do equilíbrio de forças, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \vec{G} \sin \alpha + \vec{\tau}LP &= 0 \Leftrightarrow LS\rho \vec{g} i + \vec{\tau}LP = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \tau &= \rho g \frac{S}{P} i = \rho g R i
 \end{aligned}
 \tag{4.43}$$

### Fórmula de Chézy

Se se considerar que o regime é puramente turbulento rugoso, a tensão de atrito pode ser considerada proporcional ao quadrado da velocidade, o que substituído na Equação (4.43) conduz a:

$$\tau = KU^2 = \rho g R i \Rightarrow U = \sqrt{\frac{\rho g}{K}} \sqrt{R i} \Leftrightarrow$$
$$U = C \sqrt{R i} \quad (4.44)$$

Esta é a chamada equação de Chézy, estabelecida em 1768, em que o valor de  $C$ , denominado *coeficiente de Chézy*, depende da rugosidade mas também do número de Reynolds.

Em 1869, os dois engenheiros suíços Ganguillet e Kutter propuseram uma fórmula para o coeficiente de Chézy:

$$C = 0.552 \left( \frac{41.6 + 1.811/n + 0.00281/i}{1 + [41.6 + (0.000281/i)]n/\sqrt{R}} \right) \quad (4.45)$$

em que  $n$  é um coeficiente que depende unicamente da rugosidade parietal, conhecido por *coeficiente de Kutter*.

### Fórmula de Manning

Em 1889, uma nova fórmula para o cálculo de  $C$  foi proposta pelo engenheiro irlandês Robert Manning. A forma simplificada desta fórmula é:

$$C = \frac{R^{1/6}}{n} \quad (4.46)$$

Substituindo na Equação (4.44), obtém-se sucessivamente:

$$U = \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} \quad (4.47)$$

$$Q = \frac{1}{n} \frac{S^{5/3}}{P^{2/3}} i^{1/2} \quad (4.48)$$

em que  $n$  é um coeficiente designado por *coeficiente de Manning*.

A fórmula de Manning é simples e precisa, sendo mundialmente utilizada tanto para canais naturais como para canais artificiais, desde que o escoamento ocorra no regime turbulento rugoso.

No Quadro 4.2, apresentam-se valores usuais do coeficiente de Manning.

Quadro 4.2 – Valores do coeficiente de Manning apresentados em Hamill (1995).

Tipo de tubo de fluxo	n (s/m <sup>1/3</sup> )
Canal de terra alinhado	0.018 – 0.025
Canal de terra em meandros	0.025 – 0.050
Canal em rocha alinhado	0.025 – 0.045
Canal de betão	0.012 – 0.017
Canal de betão rebocado	0.011 – 0.015
Colector circular de betão	0.011 – 0.015

Considere-se de seguida o Exemplo 4.2. Neste caso, são dadas as características do canal e a altura molhada em regime permanente e pretende-se calcular as características do escoamento.

**Exemplo 4.2:** Comparação das características do escoamento num canal de drenagem urbana em betão, considerando crescentes inclinações longitudinais.

Um canal de betão ( $n = 0.015 \text{ s/m}^{1/3}$ ), com inclinação longitudinal de  $i = 1:900$ , apresenta uma secção trapezoidal com largura de rasto de 5 m e taludes laterais com inclinação de 1:2 (v:h). A altura molhada em regime permanente uniforme é de 2 m.

Nestas condições, qual é o caudal, a velocidade média, o número de Reynolds e o número de Froude? (considere  $v = 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ )

Recalcule o problema com o dobro e o triplo da inclinação longitudinal e comente os resultados obtidos.

**Resolução** (analítica directa)

O Quadro 4.1 fornece as expressões que permitem calcular:

$$S = (5 + 2 \times 2) \times 2 = 18 \text{ m}^2; P = 5 + 2 \times 2\sqrt{1 + 2^2} \cong 13.94 \text{ m}; R = \frac{S}{P} \cong 1.29 \text{ m}$$

Da Equação (4.47) resulta:

$$\left(\frac{dS}{dh}\right) = b + 4h \Rightarrow h_m = \frac{S}{\left(\frac{dS}{dh}\right)} = \frac{(b + 2h)h}{(b + 4h)} = \frac{18}{13} \text{ m}$$

$$U = \frac{1}{0.015} 1.29^{2/3} (1/900)^{1/2} \cong 2.6 \text{ m/s}$$

$$Q = \frac{1}{0.015} \frac{18^{5/3}}{13.94^{2/3}} (1/900)^{1/2} \cong 47.4 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$R_e = \frac{2.6 \times 1.29}{10^{-6}} \cong 3.3 \times 10^6 \quad F_r = \frac{2.6^2}{9.8 \times \frac{18}{13}} \cong 0.5$$

O número de *Froude* é inferior a 1, o que mostra que o escoamento ocorre em regime lento. A inclinação de  $i = 1:900$  designa-se então por *inclinação fraca ou subcrítica*.

Recalculando o problema para uma inclinação longitudinal de  $i = 2:900$ , obtém-se:

$$U \cong 3.7 \text{ m/s}; \quad Q \cong 67.1 \text{ m}^3/\text{s}; \quad R_e \cong 4.8 \times 10^6; \quad F_r \cong 1.0$$

O número de *Froude* é igual a 1, o que mostra que o escoamento ocorre em regime crítico. A inclinação de  $i = 2:900$  designa-se assim por *inclinação crítica*.

Como seria de esperar, o aumento da inclinação provocou um aumento da velocidade e do caudal.

Recalculando o problema para uma inclinação longitudinal de  $i = 3:900$ , resulta:

$$U \cong 4.6 \text{ m/s}; \quad Q \cong 82.1 \text{ m}^3/\text{s}; \quad R_e \cong 5.9 \times 10^6; \quad F_r \cong 1.5$$

O número de *Froude* é superior a 1, o que revela que o escoamento ocorre em regime rápido. O canal diz-se então de *inclinação forte ou supercrítica*.

Como era previsível, a velocidade e o caudal atingem os seus valores máximos.

Em todos os casos, o número de Reynolds é da ordem de  $10^6$ , comprovando a validade da hipótese de considerar o escoamento turbulento rugoso.

O Exemplo 4.3 mostra como resolver um problema inverso, ou seja, conhecidas as características do canal e o caudal a escoar, como avaliar a altura molhada em regime permanente uniforme.

**Exemplo 4.3:** Determinação da altura molhada num escoamento permanente e uniforme, conhecidas as características físicas do canal e o caudal a escoar.

Determine a altura molhada em regime permanente uniforme e o número de Froude, no caso de o canal com a inclinação de  $i = 3:900$ , referido no Exemplo 4.2, passar a escoar um caudal de apenas  $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ .

**Resolução** (numérica)

A Equação (4.48), que neste caso toma a forma:

$$Q = \frac{1}{n} \frac{S^{5/3}}{P^{2/3}} i^{1/2} = \frac{1}{n} \frac{[(b + xh)h]^{5/3}}{[b + 2h\sqrt{1 + x^2}]^{2/3}} i^{1/2}$$

não permite explicitar o valor de  $h$ , pelo terá de ser resolvida numericamente.

O objectivo é então determinar os zeros da seguinte função:

$$F = Q - \frac{1}{n} \frac{S^{5/3}}{P^{2/3}} i^{1/2} = Q - \frac{1}{n} \frac{[(b + xh)h]^{5/3}}{[b + 2h\sqrt{1 + x^2}]^{2/3}} i^{1/2}$$

Mais uma vez, o processo de cálculo adoptado será análogo ao apresentado na alínea B) do Exemplo 4.1.

Os resultados são:

$$h \cong 0.11 \text{ m e } F_r \cong 0.7$$

É importante notar que a inclinação de  $i = 3:900$ , qualificada anteriormente como inclinação forte, passa agora a qualificar-se como *inclinação fraca* ( $F_r < 1$ ), o que evidencia que a qualificação da inclinação longitudinal de um canal depende do caudal.

Nota: A abordagem anterior é extensível ao caso dos colectores (secção circular), bastando para isso alterar em conformidade as características geométricas da secção.

### Capacidade de transporte

A equação de Manning pode ser escrita na forma:

$$Q = K^* i^{1/2}, \quad \text{onde } K^* = \frac{1}{n} \frac{S^{5/3}}{P^{2/3}} \quad (4.49)$$

Ao valor  $K^*$  chama-se *capacidade de transporte*, uma vez que, fixada a inclinação longitudinal, o caudal é directamente proporcional a esse parâmetro.

Nas secções compostas, as tensões nas fronteiras líquidas entre as subsecções podem ser desprezadas, quando comparadas com as tensões nas fronteiras sólidas. Resulta desta simplificação que o caudal total será a soma dos caudais em cada subsecção. O mesmo é dizer que a *capacidade de transporte de uma secção composta é a soma das capacidades de transporte de cada uma das suas  $N$  subsecções*.

A capacidade de transporte de  $N$  subsecções pode ser relacionada com os coeficientes de Coriolis e de Boussinesq recorrendo às Equações (4.15) e (4.16), respectivamente, resultando as seguintes expressões:

$$\alpha = \frac{\left(\sum_{i=1}^N S_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^N K_i^*\right)^3} \sum_{i=1}^N \frac{(K_i^*)^3}{S_i^2} \quad (4.50)$$

$$\alpha' = \frac{\sum_{i=1}^N S_i}{\left(\sum_{i=1}^N K_i^*\right)^2} \sum_{i=1}^N \frac{(K_i^*)^2}{S_i} \quad (4.51)$$

O Exercício 4.2, incluído no subcapítulo 4.6, ilustra a determinação da capacidade de transporte através dos coeficientes de Coriolis e de Boussinesq.

### **Secção hidraulicamente mais eficiente**

Fixados o material de construção do canal e a sua inclinação longitudinal, estamos agora em condições de pesquisar qual o tipo de geometria da secção transversal que é hidraulicamente mais eficiente, para escoar um regime permanente e uniforme. Das várias secções transversais com igual área, a secção hidraulicamente mais eficiente será aquela que maximiza o caudal escoado. Para maximizar o caudal escoado, há obviamente que minimizar as forças de atrito, o que equivale a minimizar o perímetro hidráulico da secção, como se depreende da análise da Equação (4.48).

A secção semicircular é a mais vantajosa do ponto de vista da minimização do perímetro hidráulico. No entanto, não é correntemente utilizada em canais, uma vez que do ponto de vista construtivo é de mais onerosa implementação, quando comparada com as secções rectangulares e trapezoidais.

Naturalmente, a análise que de seguida se apresenta só faz sentido quando não existirem restrições de outra ordem, tais como restrições urbanísticas, construtivas, geotécnicas e hidráulico-regulamentares, que possam limitar a liberdade da pesquisa do desenho óptimo da secção transversal.

A secção hidraulicamente mais eficiente obter-se-á então impondo as condições:

$$\frac{dP}{dh} = 0 \wedge \frac{d^2P}{dh^2} > 0$$

Para o caso da secção trapezoidal, a imposição das condições anteriores conduz à seguinte equação:

$$b + 2hx = 2h(x^2 + 1)^{1/2} \quad (4.52)$$

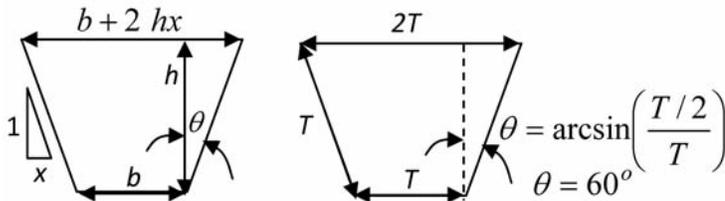


Figura 4.10 – Secção trapezoidal hidraulicamente mais eficiente.

A Equação (4.52) mostra que a secção trapezoidal hidraulicamente mais eficiente ocorre quando a largura da superfície livre é dupla do comprimento molhado do talude.

Trata-se, portanto, da secção transversal correspondente a metade de um hexágono regular de base horizontal.

De seguida, analisa-se o caso da secção circular hidraulicamente mais eficiente.

Nas redes de drenagem urbana, os colectores prefabricados de secção circular são muito utilizados. Ao contrário dos canais, no caso dos colectores, a secção transversal circular é imposta *a priori*. O problema reduz-se

então à determinação da percentagem da secção transversal circular, que deve ser ocupada pelo escoamento com superfície livre e regime permanente uniforme, de modo a maximizar o caudal escoado.

A secção molhada,  $S$ , é a fracção da secção transversal do colector circular utilizada pelo escoamento (ver Quadro 4.1):

$$S = \frac{1}{8} (\beta - \sin(\beta)) D^2$$

O perímetro molhado é dado por (ver Quadro 4.1):

$$P = \frac{1}{2} D \beta$$

Resulta então que a maximização do caudal, fixados que estão os restantes parâmetros, corresponde a:

$$\frac{dQ}{d\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\beta} \left( \frac{S^{5/3}}{P^{2/3}} \right) = 0 \wedge \frac{d^2 Q}{d\beta^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{d^2}{d\beta^2} \left( \frac{S^{5/3}}{P^{2/3}} \right) < 0$$

Ao fim de alguma manipulação analítica, obtém-se o seguinte resultado:

$$\beta = 303.5^\circ \Rightarrow h = \frac{D}{2} \left( 1 - \cos \frac{\beta}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$h = 0.94D \tag{4.53}$$

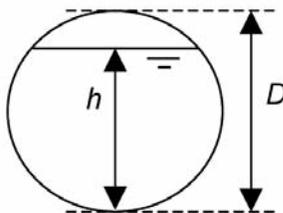


Figura 4.11 – Secção circular hidráulicamente mais eficiente.

A Equação (4.53) mostra que o caudal máximo escoado numa secção circular ocorre quando a altura uniforme é 94% do diâmetro do colector. Na prática, adoptam-se alturas inferiores (da ordem dos 80% do diâmetro) para evitar a instabilidade que resultaria da redução da capacidade de transporte provocada por um aumento pontual da altura uniforme acima de 94% do diâmetro.

No Exercício 4.3, que consta do subcapítulo 4.6, apresenta-se um exemplo com a determinação das dimensões da secção rectangular hidraulicamente mais eficiente.

## 4.5 Considerações finais

Como já foi referido, nos canais não é usual o regime crítico. No entanto, quando se pretendem instalar estruturas de medição de caudais – como, por exemplo, canais Venturi ou descarregadores Bélanger –, é este o regime de escoamento que se instala na secção de controlo. Uma vez instalado o regime crítico, bastará medir a altura molhada na secção de controlo para, de forma biunívoca, conhecer o valor do caudal.

O regime crítico também é importante para o traçado das curvas de regolfo que caracterizam o andamento da superfície livre, no caso do escoamento gradualmente variado.

O escoamento gradualmente variado, o escoamento rapidamente variado e o escoamento variável constituem outras formas de escoamento com superfície livre. A sua análise, em certos casos, introduz um novo aspecto não aplicado neste capítulo: a conservação da quantidade de movimento expressa pela Equação (4.18). As referências bibliográficas apresentadas poderão constituir um bom auxiliar para o leitor mais interessado que pretenda aprofundar os seus conhecimentos sobre estes tipos de escoamentos com superfície livre.

## 4.6 Exercícios

**Exercício 4.1:** Cálculo do coeficiente de energia na secção transversal *composta* de um canal que atravessa uma zona urbana.

Um canal que atravessa uma zona urbana apresenta uma secção transversal constituída por três subsecções com áreas  $S_1 = 3 \text{ m}^2$ ,  $S_2 = S_3 = 1.5 \text{ m}^2$ , tal como representado na Figura 4.1. Sabendo que as velocidades são  $U_1 = 1.8 \text{ m/s}$  e  $U_2 = U_3 = 1.2 \text{ m/s}$ , determine o valor do coeficiente de Coriolis da secção *composta*.

### Resolução

A Equação (4.15) toma a forma:

$$\alpha = \frac{S_1 U_1^3 + S_2 U_2^3 + S_3 U_3^3}{\bar{U}^3 (S_1 + S_2 + S_3)}, \text{ com } \bar{U} = \frac{S_1 U_1 + S_2 U_2 + S_3 U_3}{(S_1 + S_2 + S_3)} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{(S_1 U_1^3 + S_2 U_2^3 + S_3 U_3^3)(S_1 + S_2 + S_3)^2}{(S_1 U_1 + S_2 U_2 + S_3 U_3)^3}$$

Substituindo os dados do problema na expressão anterior obteremos  $\alpha = 1.12$ , ou seja, de facto  $\alpha \cong 1$ .

**Exercício 4.2:** Cálculo da capacidade de transporte da secção transversal *composta* de uma vala de drenagem de uma zona verde urbana.

Considere a vala de drenagem, em betão, de uma zona verde urbana, representada na Figura 4.12. Adoptando as três subsecções delimitadas a traço-ponto, considerando uma inclinação longitudinal de 1:1000 e um coeficiente de Manning de  $n = 0.015 \text{ s/m}^{1/3}$ , determine a capacidade de transporte, o caudal, o coeficiente de Coriolis e o coeficiente de Boussinesq.

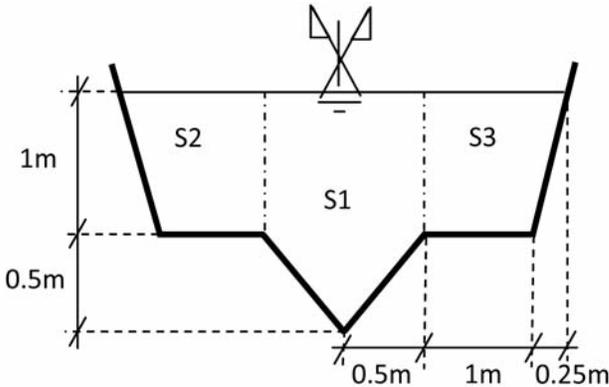


Figura 4.12 – Secção composta da vala de drenagem.

### Resolução

$$P_1 = 2\sqrt{0.5^2 + 0.5^2} \cong 1.414 \text{ m}$$

$$P_2 = P_3 = 1 + \sqrt{0.25^2 + 1^2} \cong 2.031 \text{ m}$$

$$S_1 = 1 \times 1 + 1 \times 0.5 / 2 \cong 1.250 \text{ m}^2$$

$$S_2 = S_3 = 1 \times 1 + 0.25 \times 1 / 2 \cong 1.125 \text{ m}^2$$

Pela Equação (4.49), pode-se calcular:

$$K_1^* = \frac{1}{0.015} \frac{S_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \cong 50.589 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$K_2^* = K_3^* = \frac{1}{0.015} \frac{S_2^{5/3}}{P_2^{2/3}} \cong 76.751 \text{ m}^3/\text{s}$$

A capacidade de transporte será:

$$K_1^* + K_2^* + K_3^* = 177.928 \text{ m}^3/\text{s}$$

E o caudal total é:

$$Q = 177.928 \text{ m}^3/\text{s} \times (1 : 1000)^{1/2} \cong 5.627 \text{ m}^3/\text{s}$$

Os coeficientes de Coriolis e de Boussinesq são calculados por simples substituição dos  $K_i^*$  e dos  $S_i$  nas Equações (4.50) e (4.51):

$$\alpha \cong 1.074 \cong 1; \quad \alpha' \cong 1.024 \cong 1$$

**Exercício 4.3:** Determinação das dimensões da secção transversal rectangular hidraulicamente mais eficiente de uma vala de drenagem.

Vai ser construída uma vala de drenagem, em betão, com uma secção transversal rectangular de  $2 \text{ m}^2$ . Determine as dimensões da secção transversal hidraulicamente mais eficiente.

### Resolução

Trata-se de calcular a secção hidraulicamente mais eficiente, ou seja, fixada a área da secção transversal,  $S = C^{te}$ , pretende-se determinar quais as proporções da secção rectangular que maximizam a sua capacidade de transporte.

A minimização do perímetro conduz a:

$$P = 2h + b \Leftrightarrow P = 2h + \frac{S}{h} \Rightarrow \frac{dP}{dh} = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{dS}{dh} \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} S = 0$$

$$\text{Como } \frac{dS}{dh} = 0 \text{ e } S = C^{te} = b h \Rightarrow b = 2h$$

$$S = 2h h = 2 \text{ m}^2 \Leftrightarrow h = 1 \text{ m} \Rightarrow b = 2 \text{ m}$$

Conclui-se que a secção rectangular hidraulicamente mais eficiente é aquela para a qual a largura é o dobro da altura molhada.

**Nota:** Confirmação de que o extremo identificado é um mínimo.

$$\frac{d^2 P}{dh^2} = \frac{2 S}{h^3} > 0 \text{ pois } h > 0 \Rightarrow \text{o extremo é um mínimo}$$



# 5 CONCEITOS BÁSICOS DE HIDROLOGIA

*João L. M. Pedroso de Lima*<sup>1,2</sup>

*M. Isabel Pedroso de Lima*<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra.

<sup>2</sup> Instituto do Mar – Centro do Mar e Ambiente.

<sup>3</sup> Escola Superior Agrária, Instituto Politécnico de Coimbra.

## 5.1 Nota introdutória

A hidrologia urbana é o ramo da hidrologia que estuda as zonas urbanas e metropolitanas onde predominam as superfícies quase impermeáveis e um relevo artificial do terreno, analisando em particular o impacto do desenvolvimento urbano no ciclo da água e as formas de minimizar os seus efeitos negativos.

A grande maioria dos estudos de hidrologia urbana incide sobre a análise do escoamento superficial que, por sua vez, se relaciona estreitamente com a protecção contra os fenómenos catastróficos provocados pelo movimento da água à superfície do solo (e. g., cheias, deslizamento de taludes). A análise criteriosa do escoamento superficial que inclui a determinação do caudal de ponta, do volume escoado e da forma do hidrograma para um dado período de retorno, constitui um dos mais importantes factores de sucesso de projectos de sistemas de drenagem de águas pluviais urbanas. Erros cometidos nestas estimativas poderão introduzir incoerências graves no desenvolvimento de projectos, acarretando obras subdimensionadas ou sobredimensionadas. É importante reconhecer também que os valores obtidos neste cálculo serão sempre aproximados, devido à deficiente caracterização fisiográfica e climática das bacias urbanas, às incertezas hidrológicas dos processos envolvidos, às simplificações dos métodos disponíveis e aos critérios adoptados. As bacias urbanas são entidades complexas com uma elevada variabilidade espacial das suas características fisiográficas (Figura 5.1).

No estudo de uma bacia urbana, deve-se ter especial atenção aos seguintes aspectos:

- Tipo de uso do solo previsto para a bacia, sobretudo no que se refere à impermeabilização e outras intervenções humanas que possam, por

exemplo, reduzir o tempo de concentração da bacia ou levar à ocupação de áreas inadequadas; de referir, em particular, a ocupação de leitos de cheia das linhas de água, nomeadamente as efémeras;

- Efeitos causados pelas obras em estudo, a montante e a jusante do troço em que se vai processar a intervenção.

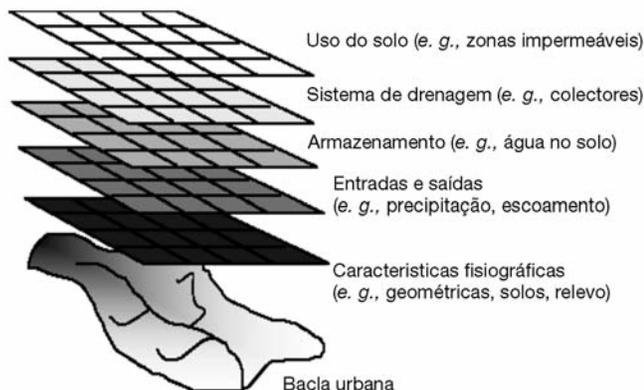


Figura 5.1 – Variabilidade espacial das características fisiográficas e hidrológicas das bacias urbanas.

É possível identificar três fases estruturantes de um projecto de drenagem urbana, cuja sequência se apresenta na Figura 5.2. A fase 1 é condicionada por aspectos socioeconómicos, e nesta se incluem análises de risco e escolha do período de retorno dos fenómenos relevantes. As fases 2 e 3 são de índole mais técnica. A fase 2 está relacionada com estudos de hidrologia urbana (determinação da chuvada de projecto e do hidrograma e caudal de projecto, nomeadamente através de modelos de precipitação-escoamento) e a fase 3, com estudos já na área da hidráulica urbana (e. g., dimensionamento de sumidouros, colectores, canais).

Neste capítulo, dedicado à hidrologia urbana, abordar-se-á de forma sucinta alguns aspectos e conceitos básicos com relevância para o estudo de sistemas de drenagem de águas pluviais. Serão focados aspectos relacionados com o balanço hidrológico, a bacia hidrográfica, o coeficiente de escoamento e o tempo de concentração. Os volumes subsequentes irão incidir mais especificamente sobre os processos hidrológicos de precipitação e escoamento superficial, e os modelos de precipitação-escoamento usados em hidrologia urbana.

A seguinte bibliografia serviu de base à construção deste capítulo: Chow *et al.* (1988), Singh (1992), Tucci (2001), Gribbin (2002) e Lencastre e Franco (2003).

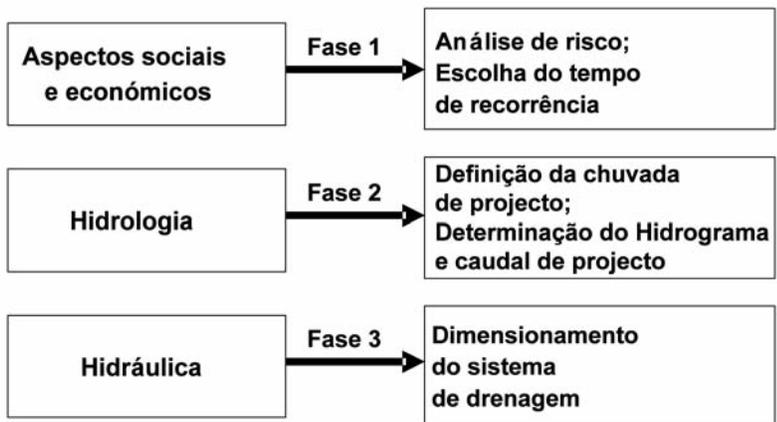


Figura 5.2 – Sequência de fases de um projecto de drenagem urbana.

## 5.2 Balanço hidrológico

O conceito de *balanço hidrológico* traduz o princípio da conservação da massa num determinado espaço e durante um determinado intervalo de tempo  $\Delta t$ :

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \bar{q}_a - \bar{q}_e \quad (5.1)$$

sendo  $\Delta S$  a variação de volume observada nesse espaço,  $\bar{q}_a$  o fluxo médio afluente e  $\bar{q}_e$  o fluxo médio efluente durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Ou seja,

$$\frac{S_2 - S_1}{\Delta t} = \frac{q_{a_1} + q_{a_2}}{2} - \frac{q_{e_1} + q_{e_2}}{2}, \Delta t \rightarrow 0 \quad (5.2)$$

em que os índices 1 e 2 se reportam, respectivamente, ao início e fim do intervalo de tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  considerado no balanço hidrológico.

Assim, por definição, uma equação do balanço hidrológico (ver Figura 5.3) relaciona as entradas e saídas de água (afluências e efluências), ocorridas num determinado espaço e durante um certo período, com a variação do volume do mesmo líquido no interior desse espaço, durante o intervalo de tempo referido, ou seja:

$$\text{Afluências} - \text{Efluências} = \text{Variação no Armazenamento de Água}$$

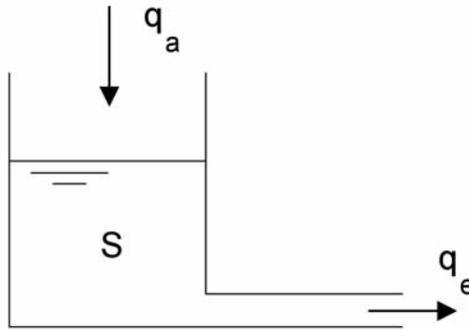


Figura 5.3 – Idealização do balanço hidrológico.

Contudo, as variáveis hidrológicas envolvidas, tais como a precipitação, evaporação, infiltração e o escoamento superficial, variam ao longo do tempo. Assim, a forma geral de uma equação do balanço hidrológico deve ser escrita da seguinte forma:

$$\int_t^{t+\Delta t} q_a(t) dt - \int_t^{t+\Delta t} q_e(t) dt = S(t + \Delta t) - S(t) \quad (5.3)$$

em que  $q_a(t)$ ,  $q_e(t)$  e  $S(t)$  representam as leis de variação com o tempo, respectivamente, das afluições, das efluências e do armazenamento de água no interior do espaço.

A Equação (5.3) assume que as entradas, saídas e o armazenamento não variam no espaço (e. g., na área da bacia de drenagem urbana); caso contrário, cada um dos termos da equação que varie no espaço deve exprimir-se por um valor agregado representativo da área.

A equação do balanço hidrológico é básica em hidrologia e todas as análises têm forçosamente de verificar esta equação. Caso contrário, a análise não estará correcta. A aparente simplicidade desta equação é enganadora. Na grande maioria dos problemas hidrológicos, várias variáveis podem ser desconhecidas ou extremamente difíceis de estimar. O termo  $S(t)$  está relacionado com o termo  $q_e(t)$ , mesmo sem existência de qualquer  $q_a(t)$ . Além disso, estes termos variam com o tempo como expresso na Equação (5.3).

Nalgumas componentes do balanço, como é o escoamento superficial  $R$ , pode considerar-se a parte que entra ( $R_1$ ) no espaço em estudo e a que sai ( $R_2$ ). Para outras variáveis, o fluxo só se faz num sentido (e. g., a precipitação só existe como entrada).

Um balanço hidrológico pode ser aplicado a qualquer espaço ou região delimitada por limites topográficos ou definida arbitrariamente, num curto ou longo intervalo de tempo. No entanto, em termos práticos, torna-se muito difícil ou mesmo impossível efectuar o balanço hidrológico nalgumas situações, nomeadamente por não ser possível conhecer todos os termos da equação. Assim, privilegia-se a aplicação do conceito de balanço hidrológico a intervalos de tempo específicos e para espaços topograficamente bem delimitados, como é o caso de bacias de drenagem.

O conceito de balanço hidrológico estabelecido à escala de uma bacia hidrográfica pode ser aplicável a intervalos de tempo iguais ao ano, desde que, no início de cada ano (ano hidrológico), o armazenamento de água na bacia seja praticamente idêntico. É o que se passa em Portugal, no final da estiagem, em que esse armazenamento é muito baixo.

O balanço hidrológico utiliza-se para:

- Aferição conjunta dos valores dos seus termos, quando os mesmos são determinados separadamente;
- Estimação de um deles, quando não há possibilidade de o medir directamente;
- Análise dos efeitos produzidos nos valores dos restantes termos da equação pelas modificações introduzidas num ou mais desses termos por diversas acções do Homem (e. g., urbanização de zonas agrícolas ou florestais, modificação do coberto vegetal devido, por exemplo, a um fogo florestal).

É importante manter actualizado o balanço hidrológico de uma determinada bacia urbana ou rural como forma de previsão, planeamento e controlo de recursos hídricos existentes.

De seguida, apresenta-se um exemplo de um balanço hidrológico numa bacia de retenção urbana e, no subcapítulo 5.5, um exercício sobre o balanço hidrológico numa bacia urbana (Exercício 5.1).

**Exemplo 5.1:** Balanço hidrológico numa bacia de retenção urbana.

Uma bacia de retenção urbana (ver Figura 5.4), num determinado instante, tinha armazenado 3000 m<sup>3</sup> de água. Nesse instante, o caudal afluente à bacia era de 1.50 m<sup>3</sup>/s e o caudal efluente de 2.00 m<sup>3</sup>/s. Ao fim de uma hora, os caudais afluente e efluente aumentaram de forma linear para 2.00 m<sup>3</sup>/s e 2.05 m<sup>3</sup>/s, respectivamente. Não houve precipitação nessa hora. Qual foi a variação do volume de água armazenado na bacia de retenção,

supondo que não há perdas por infiltração? Qual foi o volume total armazenado no final dessa hora?

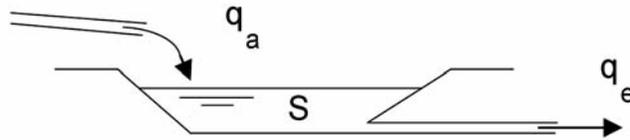


Figura 5.4 – Componentes do balanço hidrológico a considerar no estudo de uma bacia de retenção urbana.

### Resolução

Usando as Equações (5.1) ou (5.2) do balanço hidrológico, então:

$$\Delta S = \frac{q_{a1} + q_{a2}}{2} \Delta t = \frac{q_{e2} + q_{e1}}{2} \Delta t \quad (5.4)$$

Substituindo os valores, obtém-se a variação do volume de água armazenado na bacia de retenção:

$$\Delta S = \frac{1.5 + 2.0}{2} \times 3600 - \frac{2.0 + 2.05}{2} \times 3600 = -990 \text{ m}^3$$

Conclui-se que o armazenamento de água na bacia de retenção, após uma hora, é inferior ao inicial ( $\Delta S$  com sinal negativo), ou seja:

$$S_2 = S_1 + \Delta S = 3000 - 990 = 2010 \text{ m}^3$$

## 5.3 Bacia de drenagem urbana

### 5.3.1 Conceito e delimitação

Uma *bacia de drenagem urbana* é constituída por um sistema de linhas de água naturais e drenos artificiais que se interligam entre si, formando uma rede de drenagem mais ou menos hierarquizada (curso de água principal e seus afluentes e subafluentes). Uma bacia define-se para uma dada secção de uma linha de água ou de um canal e corresponde à área geográfica que capta a água da chuva que escoa pela superfície do solo e atinge essa secção considerada. Esta secção designa-se por secção de referência da bacia e é, portanto, a única saída dos volumes de água efluentes assumindo que se podem desprezar as águas subterrâneas (o que acontece por norma).

Numa bacia urbana, dependendo da sua área, o sistema de drenagem é constituído por valetas, valas, canais, tubos de drenagem perfurados, galerias, emissários e colectores pluviais e linhas de água naturais, existentes ao nível do loteamento, da rede urbana primária e da bacia hidrográfica.

As bacias de drenagem são separadas por linhas de cumeada que constituem naturalmente linhas divisórias do escoamento superficial. Estas linhas chamam-se linhas divisórias topográficas.

A *linha divisória topográfica* coincide com as linhas de cumeada que separam vertentes por onde as águas se escoam para talvegues diferentes.

A Figura 5.5 procura ilustrar a forma como se faz a delimitação de uma bacia através da linha divisória topográfica numa carta hipsométrica. Essa delimitação é determinada topograficamente, acompanhando as linhas de cumeada e cruzando sempre ortogonalmente às curvas de nível em direcção à secção de referência (*i. e.*, secção em estudo) da bacia.

A delimitação da bacia de drenagem também pode ser feita atendendo à geologia da bacia, definindo-se a linha divisória freática. Esta linha fixa os

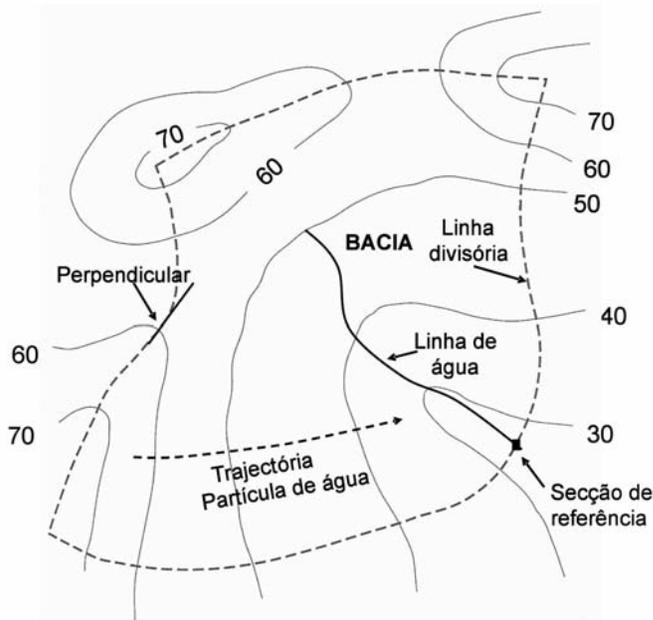


Figura 5.5 – Definição da linha divisória topográfica de uma bacia de drenagem numa carta topográfica (adaptado de Gribbin, 2002).

limites da área que contribui, com água do solo, para alimentar a bacia (Figura 5.6). Dificuldades na definição desta linha nas bacias urbanas e a sua variabilidade no tempo levam a que, na prática, se considere a delimitação da bacia de drenagem somente com base na linha divisória topográfica.



Figura 5.6 – Linha divisória topográfica e linha divisória freática (corte transversal em três bacias adjacentes).

A bacia urbana a estudar depende da obra a ser executada (e. g., ponte, açude, sarjeta ou sumidouro) e, portanto, da localização da correspondente secção transversal definida na linha de água.

Uma bacia de drenagem (urbana ou natural) diz-se *exorreica* (Figura 5.7, à esquerda), se a drenagem é feita directamente para o mar ou rio; *endorreica* (Figura 5.7, à direita), se a drenagem se dá para um lago no interior da bacia; *arreica*, se não se verifica escoamento superficial; e *criptorreica*, se a linha de água se infiltra no solo, em sumidouros ou algares (abertura no solo numa região calcária, que tem comunicação com a rede de drenagem subterrânea, através da qual a água que escorre à superfície passa para a profundidade) (LTG, 2008). A maior parte das bacias urbanas são exorreicas. A linha divisória atravessa a linha de água na secção de referência. Se a bacia é endorreica, não há uma secção de referência (Figura 5.7, à direita).

É importante distinguir entre as várias contribuições para o caudal numa dada secção de um curso de água. Na Figura 5.8, apresentam-se os três tipos básicos de escoamento numa bacia hidrográfica (e. g., superficial, hipodérmico e subterrâneo) e as correspondentes componentes do caudal numa dada secção de um curso de água: escoamento directo, intermédio e de base.

A água, ao infiltrar-se, move-se na zona não saturada do solo em direcção ao lençol freático. Contudo, parte dessa água pode criar caminhos preferenciais que geram escoamentos superficiais a jusante chamados de res-

surgências (Figura 5.9). Em bacias urbanas, normalmente, estes escoamentos hipodérmicos ou subsuperficiais consideram-se integrados no escoamento superficial.

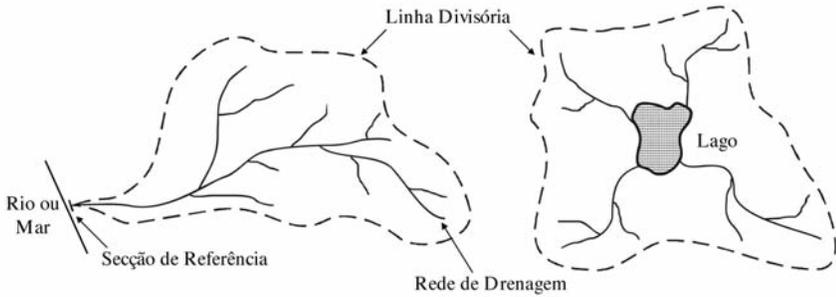


Figura 5.7 – Delimitação de bacias de drenagem através da linha divisória topográfica: bacia exorreica (à esquerda) e bacia endorreica (à direita).

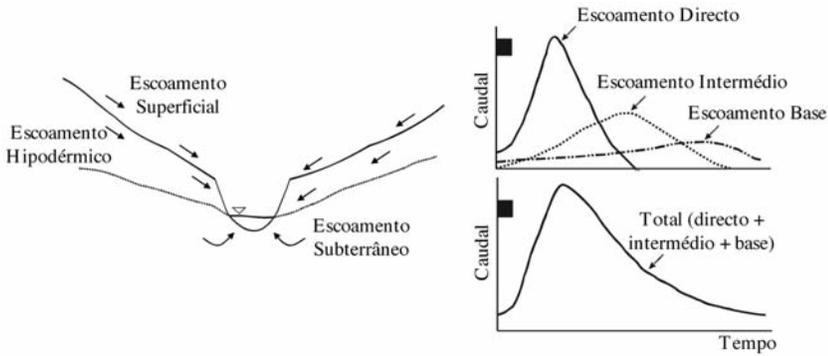


Figura 5.8 – À esquerda: tipos de escoamento numa bacia de drenagem; à direita: componentes básicas do escoamento numa dada secção de uma linha de água.

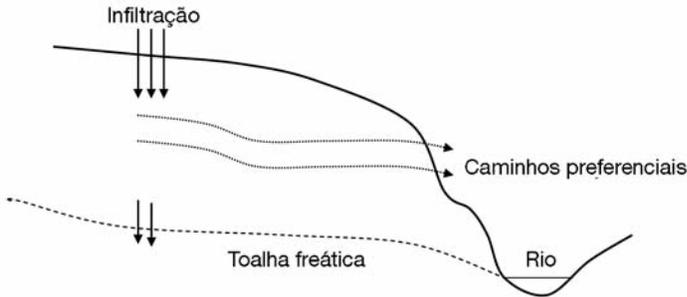


Figura 5.9 – Caminhos preferenciais da água na zona não saturada do solo dando lugar a ressurgências.

### 5.3.2 Características fisiográficas

As *características fisiográficas* das bacias de drenagem, que determinam o seu comportamento hidrológico, são:

- Geometria;
- Sistema de drenagem;
- Relevo;
- Geologia e solos;
- Vegetação.

#### Geometria

A *área da bacia* é a área plana, em projecção horizontal, definida pela linha divisória topográfica. É normalmente expressa em quilómetros quadrados (ou hectares). Do ponto de vista hidrológico, as bacias podem ser classificadas em *grandes, médias e pequenas*. Esta classificação não se baseia somente na área da bacia, mas também em factores dominantes na geração do escoamento superficial e subterrâneo. As bacias urbanas cuja área é pequena são, por norma, sensíveis a chuvas de grande intensidade e às diferenças de uso do solo, não sendo muitas vezes o escoamento superficial dominado pelas características da rede de drenagem primária.

A *forma planimétrica de uma bacia urbana* é muito importante, pois determina o tipo de resposta da bacia à precipitação e condiciona o tempo de concentração da bacia (ver secção 5.3.4).

A forma de uma bacia pode classificar-se em *arredondada, alongada e mista*.

A forma da bacia urbana indica a maior ou menor tendência para a ocorrência de cheias.

A sua forma influencia o hidrograma de cheia, especialmente em pequenas bacias de drenagem, como as bacias urbanas. Por exemplo, se a bacia for alongada, a água irá demorar mais tempo a chegar das zonas mais remotas até à secção de jusante e, conseqüentemente, o hidrograma de cheias será mais “achatado” (Figura 5.10, à esquerda). As bacias arredondadas, mais compactas, terão um caudal de ponta mais acentuado (Figura 5.10, ao centro). De referir que estas bacias mais compactas têm maior probabilidade de serem cobertas por núcleos de grande intensidade de preci-

pituação durante uma chuvada convectiva. Bacias com formas mistas têm um comportamento que traduz a sobreposição das duas situações referidas (Figura 5.10, à direita). Note-se que há outros factores que têm um efeito maior no comportamento dos hidrogramas de cheia de uma bacia hidrográfica do que a sua forma planimétrica. Nos casos **A** e **B**, representados na Figura 5.11, a forma da bacia é idêntica mas a distribuição da rede de drenagem dentro da bacia é diferente. No caso **A**, a linha de água principal corre para a parte mais larga da bacia. No caso **C**, da Figura 5.11, a forma da bacia pode originar um hidrograma com dois picos de cheia.

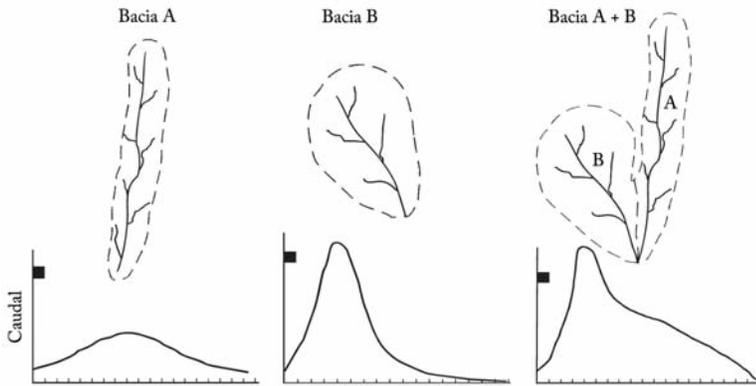


Figura 5.10 – Influência da forma da bacia de drenagem (alongada, arredondada e mista) na forma dos hidrogramas de uma bacia urbana (adaptado de Singh, 1992).

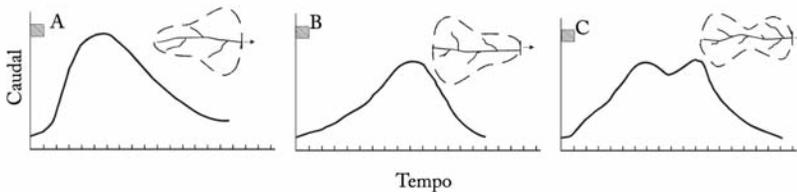


Figura 5.11 – Influência da forma da bacia de drenagem na resposta hidrológica de uma dada bacia.

Podem usar-se parâmetros empíricos para auxiliar na classificação das bacias de drenagem quanto à sua forma. Um desses parâmetros é o *Coefficiente de Compacidade*,  $K_c$ . Este parâmetro relaciona o perímetro da bacia de drenagem, com o de um círculo de raio  $r$  que tenha área igual à área da bacia:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \Rightarrow K_c = \frac{P}{2\sqrt{\pi A}} \tag{5.5a}$$

Assim,

$$K_c = \frac{0.28 P}{\sqrt{A}} \quad (5.5b)$$

sendo  $P$  o perímetro da bacia e  $A$  a área da bacia. De acordo com esta definição, um coeficiente mínimo igual à unidade corresponderia a uma bacia circular; quanto mais alongada for uma bacia, tanto maior será o coeficiente de compacidade.

Se os outros factores forem iguais, a tendência para maiores cheias numa dada bacia de drenagem é tanto mais acentuada quanto mais próximo da unidade for o valor desse coeficiente. Assim, quanto mais o valor de  $K_c$  se aproximar de 1, mais arredondada é a bacia e maior é a probabilidade de ocorrer cheia.

### Rede de drenagem

A *rede de drenagem* é constituída pelo curso de água principal e seus afluentes naturais e artificiais (e. g., valetas, canais, colectores). A disposição em planta dos cursos de água é uma característica importante que influencia a eficiência da drenagem – quanto mais eficiente for a drenagem, mais rapidamente se formará uma cheia na bacia e maior será a sua magnitude. A Figura 5.12 ilustra a influência da extensão da rede de drenagem na resposta hidrológica de uma bacia.

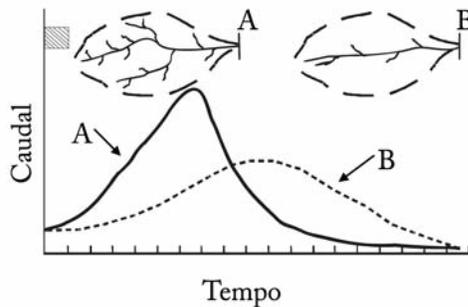


Figura 5.12 – Influência do sistema de drenagem na resposta hidrológica das bacias de drenagem.

A *natureza dos solos* e das condições superficiais de uma dada bacia também pode dar indicações sobre a eficiência da drenagem: em solos arenosos, a infiltração é elevada e existirá muito provavelmente um curso de água principal dominante; em solos argilosos, será de esperar uma rede mais ramificada (ver Figura 5.12).

Em relação à constância do escoamento, um dado curso de água pode ser simultaneamente perene, intermitente e efêmero em vários dos seus troços, se caminharmos da foz até à nascente (Quadro 5.1 e Figura 5.13).

Quadro 5.1 – Tipos de cursos de água quanto à constância do escoamento.

Tipos de curso de água	Explicação
<b>Perenes</b>	Mantém sempre um caudal permanente durante o ano todo.
<b>Intermitentes</b>	Apresenta um caudal sazonal, somente no período chuvoso, quando o nível freático se eleva e o escoamento subterrâneo passa a contribuir decisivamente para o escoamento superficial.
<b>Efêmeros</b>	Só apresenta caudal durante, e logo após, chuvas intensas.

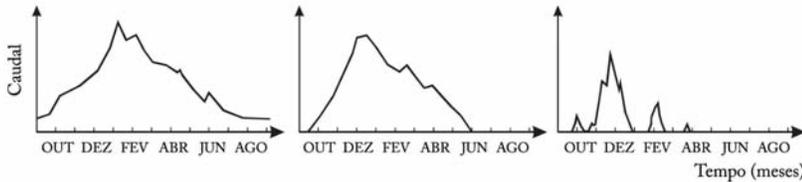


Figura 5.13 – Hidrogramas de secções transversais de cursos de água: perene (à esquerda), intermitente (ao centro), e efêmero (à direita).

A curva de duração de caudais (curva que indica o número de dias ou percentagem do ano em que um dado valor do caudal é igualado ou excedido) ilustra bem a diferença entre os vários tipos de linhas de água. Na Figura 5.14, apresentam-se as curvas de duração de caudais de linhas de água efêmeras, intermitentes e perenes, sendo evidente a não existência de caudal em linhas efêmeras e intermitentes em determinados períodos do ano.

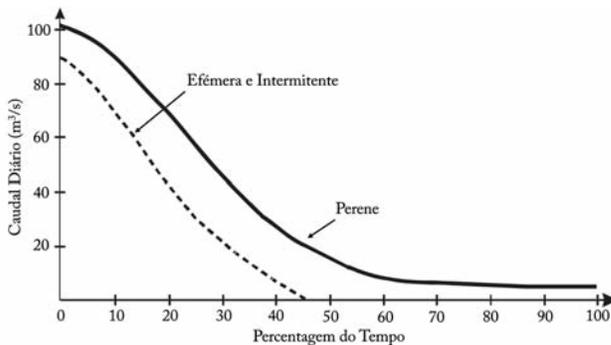


Figura 5.14 – Curvas de duração de caudais para linhas de água efêmeras, intermitentes e perenes.

O parâmetro *Densidade de Drenagem*,  $D_d$ , relaciona o comprimento total dos cursos de água dentro da bacia de drenagem com a área da bacia:

$$D_d = \frac{L_t}{A} \quad (5.6)$$

sendo  $L_t$  o comprimento total dos cursos de água existentes na bacia e  $A$  a área da bacia.  $D_d$  exprime-se geralmente em km/km<sup>2</sup> ou m/ha. Em princípio, quanto maior for a densidade de drenagem, tanto mais densa e eficiente será a drenagem das águas superficiais numa dada bacia.

Apesar de importantes, a utilização dos parâmetros empíricos que visam a caracterização fisiográfica de uma bacia, bem como da sua rede de drenagem, exige alguns cuidados. Devido à sua simplicidade, esses parâmetros podem não conseguir caracterizar de forma satisfatória, por exemplo, o sistema de drenagem. Veja-se o exemplo da Figura 5.15, onde se apresentam duas bacias de drenagem de igual área e com idêntico comprimento total das linhas de água. Conseqüentemente,  $D_d$  será o mesmo para as duas bacias, o que não traduz a realidade da qualidade da drenagem dessas bacias: a eficiência de drenagem é melhor na bacia **A** do que na bacia **B**. Neste último caso, as linhas de água estão todas concentradas numa pequena área da bacia.

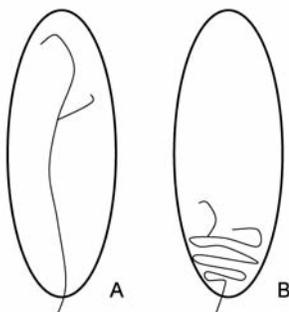


Figura 5.15 – Bacias de drenagem de igual área e com idêntico comprimento total das linhas de água, mas com eficiências de drenagem diferentes, apesar da densidade de drenagem ser a mesma.

## Relevo

O *relevo* de uma bacia de drenagem tem influência directa na velocidade e distribuição espacial do escoamento superficial, na resposta da bacia à precipitação e no tempo de concentração, na erosão hídrica do solo e no transporte de poluentes e sedimentos; a orientação das vertentes pode influenciar a ocorrência de ventos locais. Se se considerar a orientação da

bacia, o relevo também influencia a quantidade de energia solar interceptada e, conseqüentemente, o microclima, o crescimento de vegetação e a distribuição espacial e temporal da precipitação útil ao nível do solo.

O declive médio entre dois pontos do terreno é definido como:

$$s = \frac{\Delta H}{L} \tag{5.7}$$

sendo  $\Delta H$  a diferença de nível entre os pontos considerados e  $L$  a distância (na horizontal) entre os pontos. Por vezes, aplica-se a Equação (5.7) a bacias de drenagem e considera-se  $L$  a maior distância recta dentro dos limites da bacia que é possível medir ao longo de uma direcção paralela ao curso de água principal.  $L$  designa-se por comprimento axial da bacia (Figura 5.16).

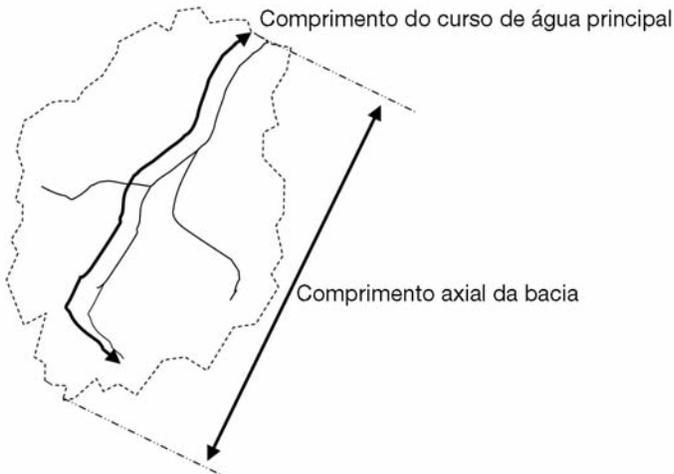


Figura 5.16 – Distinção entre o comprimento axial de uma bacia de drenagem e o comprimento da linha de água principal.

Numa bacia, o declive das encostas pode variar bastante de local para local e a Equação (5.7) não consegue representar convenientemente o declive da bacia. Esta equação não é mais do que uma aproximação grosseira da realidade, apesar de ser utilizada em alguns métodos e modelos hidrológicos mais simples.

Existem, no entanto, métodos que conduzem a valores mais realistas do declive médio de uma dada bacia de drenagem,  $i_{bacia}$ ; de entre os mais utilizados, refere-se aquele que obriga à medição do comprimento  $L_e$  de

todas as curvas de nível implantadas na bacia para uma dada equidistância,  $e$  ( $i_{bacia} = L_e e/A$ , com  $A$  a área da bacia) e o método das malhas (que divide normalmente a área da bacia em quadrículas, estima o declive em cada quadrícula e faz a média para toda a bacia).

A curva hipsométrica de uma dada bacia de drenagem retrata o relevo da bacia (Figura 5.17). Esta curva permite perceber a distribuição das altitudes na bacia: em abcissa, representam-se as áreas ou percentagens da área total da bacia que se encontram acima de determinada altitude  $e$ , e, em ordenada, o valor dessa altitude. A partir da curva hipsométrica, é possível determinar a altitude média e a altura média da bacia, bem como a altitude mediana e a altura mediana, que são parâmetros usados em modelos simplificados de precipitação-escoamento (e. g., Lencastre e Franco, 2003).

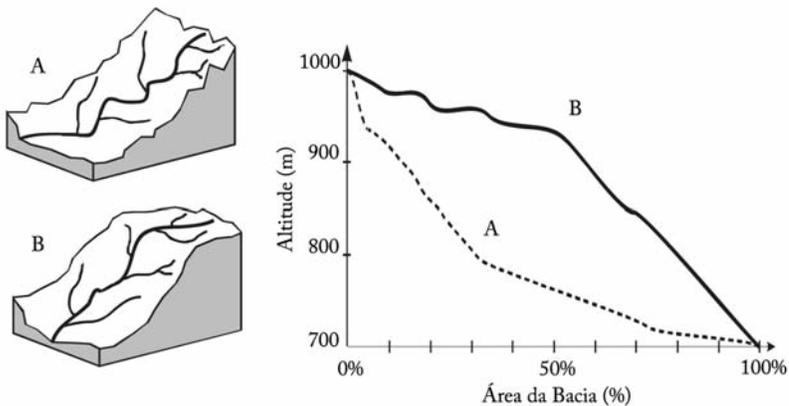


Figura 5.17 – As curvas hipsométricas representam o relevo das bacias de drenagem: **A** – bacia de drenagem de um vale aluvionar e **B** – bacia de drenagem de meseta.

- Outra forma de representação do relevo é a *curva (ou histograma) de frequências altimétricas*, que se representa sob a forma de diagrama de barras (geralmente na horizontal); este diagrama mostra as percentagens das áreas da bacia correspondentes aos escalões de altitude considerados (e. g., de 10 em 10 m ou de 20 em 20 m em algumas bacias urbanas – ver Exercício 5.2 e Figura 5.25). É ainda possível recorrer ao *rectângulo equivalente* para ilustrar o relevo de uma dada bacia de drenagem. Este será um rectângulo traçado a uma escala conveniente, com dimensões tais (comprimento  $L$  e altura  $b$ ) que o seu perímetro e área sejam iguais ao perímetro  $P$  e área  $A$  da bacia de drenagem, onde se representa a distribuição hipsométrica da bacia (ver Exercício 5.2 do subcapítulo 5.5).

## Geologia e solos

As *características geológicas* e o *tipo de solo* influenciam o regime dos caudais líquidos nas bacias de drenagem (e. g., escoamento subterrâneo, subsuperficial e superficial) e o caudal sólido (sedimentos transportados). Por exemplo, às bacias impermeáveis urbanas, associam-se linhas de água efémeras e intermitentes.

Outro aspecto relevante relaciona-se com as interações entre os cursos de água e a toalha freática (Figura 5.18). Quando uma linha de água ou dreno (e. g., vala, colector) intercepta um aquífero, fazendo baixar a toalha freática, diz-se efluente (Figura 5.18 – **A**). Se o leito da linha de água estiver acima da toalha freática, será a linha de água a alimentar o aquífero, chamando-se à linha de água influente (Figura 5.18 – **B**). Contudo, há situações em que a linha de água se mantém afastada da toalha freática, separada por rocha impermeável ou por uma zona não saturada (Figura 5.18 – **C** e **D**). Note-se que estas classificações são transitórias, porque a toalha freática vai alterando a sua posição ao longo do ano e ao longo da linha de água.

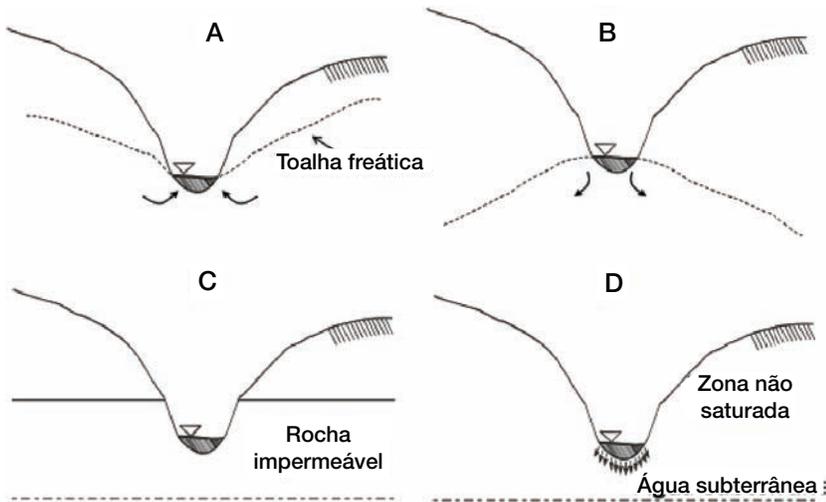


Figura 5.18 – Possíveis interações entre linhas de água e a toalha freática, a tracejado (adaptado de Singh, 1992).

## Vegetação

A *ocupação do solo* tem uma influência determinante no regime de caudais de uma qualquer bacia de drenagem, sendo esta questão particularmente importante ao nível de bacias urbanas. A urbanização, em detrimento de áreas naturais, está associada a uma maior impermeabilização e tem impactos negativos no escoamento superficial como a criação de maiores pontas de cheia e maiores volumes de escoamento superficial. A vegetação (presença, características e manutenção), em bacias de drenagem urbanas, afecta o balanço hidrológico interceptando a precipitação, dando origem a evapotranspiração, ao mesmo tempo que provoca alterações biofísicas no solo, nomeadamente aumentando a porosidade da sua camada superficial, que favorece a infiltração da água no solo (Figura 5.19).

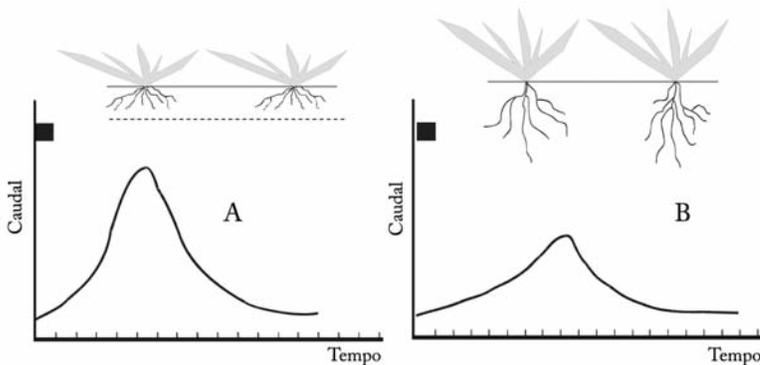


Figura 5.19 – Ilustração de como o aumento da actividade biológica no solo e a profundidade da zona radicular das plantas diminuem o caudal de ponta, aumentam a resposta hidrológica da bacia e diminuem o volume total escoado (adaptado de Macleod *et al.*, 2007).

### 5.3.3 Coeficiente de escoamento

Por o uso do solo ser determinante no processo de transformação da precipitação em escoamento, a sua caracterização é sobretudo importante em estudos hidrológicos. Em zonas urbanas, nomeadamente quando se verifica forte expansão urbana à qual está associada a impermeabilização crescente dos solos, este aspecto tem de ser estudado com cuidado. Por exemplo: áreas residenciais com alta densidade de ocupação têm taxas de impermeabilização que variam entre 40 e 70%; áreas comerciais e industriais caracterizam-se por taxas de impermeabilização de 70 a 90%. A impermeabilização de bacias urbanas não está restrita à superfície do solo: o próprio sistema de drenagem está por norma impermeabilizado,

de modo a aumentar a capacidade de escoamento da secção transversal do colector, valeta ou canal, e remover rapidamente as águas pluviais.

O *coeficiente de escoamento superficial*,  $C$ , é um dos parâmetros cruciais em hidrologia urbana. Este coeficiente, adimensional, traduz a relação entre o volume de escoamento directo (*i. e.*, precipitação útil) e o volume precipitado, ou seja, traduz a parte da precipitação total que se transforma directamente em escoamento superficial:

$$C = \frac{h_u}{h} \quad (5.8)$$

sendo  $h_u$  a precipitação útil e  $h$  a precipitação total recebida numa dada bacia de drenagem; a precipitação pode ser expressa em mm ou  $m^3$ .

A altura (total) de precipitação é igual ao volume total precipitado numa bacia hidrográfica em determinado período de tempo, dividido pela sua área.

A precipitação útil é a parte da precipitação (total) que se transforma em escoamento superficial directo num sistema de drenagem urbano.

Embora os valores do coeficiente de escoamento possam ser determinados experimentalmente, esta tarefa pode ser dificultada por ausência de dados relevantes. Por esse motivo, praticamente todos os textos de hidrologia, hidrologia urbana e os dedicados a sistemas de drenagem pluviais apresentam, para determinadas condições, valores usuais para este coeficiente, o que facilita a tarefa do técnico. Os valores do coeficiente de escoamento são dados em função do relevo da bacia, geologia, tipo de solo e uso do solo. As principais características fisiográficas da bacia de drenagem que afectam o coeficiente de escoamento são apresentadas no Quadro 5.2.

Note-se que em bacias urbanas, sobretudo nas que ocupam grandes áreas, é usual ocorrerem variações significativas das características fisiográficas de local para local. Isso faz com que, muitas vezes, seja necessário obter um valor (médio) para o correspondente coeficiente de escoamento superficial que traduza o comportamento de toda a área, calculando uma média ponderada em relação às áreas associadas a cada uma dessas características:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n C_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (5.9)$$

onde  $C$  representa o *coeficiente de escoamento médio* característico de uma área  $A$  não homogénea, e  $C_i$  e  $A_i$  são, respectivamente, o coeficiente de escoamento e a área de cada uma das  $n$  parcelas (assumidas homogéneas) em que a área  $A$  se pode considerar dividida.

Quadro 5.2 – Exemplos de características fisiográficas de bacias de drenagem, e a forma como afectam o coeficiente de escoamento superficial,  $C$ .

Características fisiográficas da bacia de drenagem	Comportamento esperado
<b>Relevo</b>	Áreas relativamente planas têm um $C$ inferior a áreas com declives elevados.
<b>Infiltração</b>	Solos com infiltração elevada (e.g., camada arenosa profunda) têm um $C$ inferior ao de solos argilosos, com baixa capacidade de infiltração.
<b>Cobertura vegetal</b>	Áreas com denso coberto vegetal (e.g., relvados, arvoredos ou cobertura equivalente) têm um $C$ inferior ao de áreas com coberto vegetal esparso, ou mesmo ausente.
<b>Retenção superficial</b>	Depressões superficiais do terreno (e.g., bacias de retenção urbana, lagos, planícies alagáveis) que dão origem a uma elevada acumulação de água conduzem a um $C$ inferior ao de terrenos em que a acumulação da água superficial é negligenciável.

Nos Quadro 5.3 e Quadro 5.4 apresentam-se exemplos de coeficientes de escoamento superficial aplicáveis a áreas urbanas para chuvadas intensas com períodos de retorno de dois a dez anos.

Quadro 5.3 – Valores do coeficiente de escoamento  $C$  usados em superfícies específicas.

Descrição da área e superfícies	$C$
<b>Pavimento:</b>	
Asfalto	0.70 - 0.95
Betão	0.80 - 0.95
Calçadas	0.75 - 0.85
Telhado	0.75 - 0.95
<b>Cobertura relvada, solo arenoso:</b>	
Declive plano (0 a 2%)	0.05 - 0.10
Declive médio (2 a 7%)	0.10 - 0.15
Declive elevado (superior a 7%)	0.15 - 0.20
<b>Cobertura relvada, solo pesado:</b>	
Declive plano (0 a 2%)	0.13 - 0.17
Declive médio (2 a 7%)	0.18 - 0.22
Declive elevado (superior a 7%)	0.25 - 0.35

Quadro 5.4 – Valores do coeficiente de escoamento  $C$  usados em zonas urbanas e periurbanas.

Descrição da ocupação da área	$C$
<b>Edificação muito densa:</b> Zonas urbanas centrais, densamente construídas, com ruas e calçadas pavimentadas.	0.70 - 0.95
<b>Edificação não muito densa:</b> Zonas urbanas adjacentes ao centro, com menos densidade de construção, mas com ruas e calçadas pavimentadas.	0.60 - 0.70
<b>Edificações com poucas superfícies livres:</b> Zonas residenciais com elevada densidade de construção, com ruas pavimentadas.	0.50 - 0.60
<b>Edificações com muitas superfícies livres:</b> Zonas residenciais com pouco densidade de construção, com ruas macadamizadas ou pavimentadas.	0.25 - 0.50
<b>Subúrbios com alguma edificação:</b> Zonas de arrabaldes e subúrbios urbanos com pequena densidade de construção.	0.10 - 0.25
<b>Matas, parques e campos de desporto:</b> Zonas rurais, áreas verdes, superfícies arborizadas, parques ajardinados, campos de desporto sem pavimentação.	0.05 - 0.20

Para obras em que se exige um período de retorno mais elevado (e. g., sistemas de drenagem em áreas sensíveis), há que aumentar o valor do coeficiente de escoamento  $C$  apresentado nos Quadro 5.3 e Quadro 5.4 através da expressão:

$$C^{T_R} = C \times C_f \quad (5.10)$$

onde  $C_f$  é o factor de correcção (Quadro 5.5) e  $C^{T_R}$  é o valor do coeficiente de escoamento a utilizar para eventos com períodos de retorno  $T_R$ .

Quadro 5.5 – Factor de correcção  $C_f$  do coeficiente de escoamento superficial  $C$  para vários períodos de retorno adoptados no dimensionamento de obras.

Período de retorno (anos)	$C_f$
2 a 10	1.00
25	1.10
50	1.20
100	1.25

### 5.3.4 Tempo de concentração

A estimativa do tempo de concentração, do tempo de resposta e das isócronas de bacias urbanas reveste-se da maior importância para a mode-

lação de sistemas hidrológicos e para o dimensionamento e a reabilitação de sistemas de drenagem de águas pluviais urbanas.

*O tempo de concentração* de uma bacia de drenagem define-se como o tempo que leva uma partícula de água (resultante de uma chuvada razoavelmente intensa) para atingir a secção de referência, partindo do ponto cinematicamente mais afastado desta, localizado nos limites da bacia.

O tempo de concentração depende das características fisiográficas da bacia, da ocupação do solo, do sistema de drenagem e da precipitação. São exemplos:

- Área da bacia;
- Comprimento e declive do curso de água principal;
- Forma da bacia;
- Declive do terreno;
- Declive e comprimento dos afluentes;
- Tipo de coberto vegetal;
- Tipo de ocupação do solo;
- Rugosidade hidráulica das várias componentes do sistema de drenagem;
- Intensidade da precipitação;
- Características pedológicas e geológicas;
- Teor de humidade da camada superficial do solo.

A determinação do tempo de concentração de bacias de drenagem está sujeita a incertezas. Em bacias urbanas, a sua estimação pode ser feita por vários processos:

- a) Recorrendo a fórmulas empíricas, aplicáveis regra geral a terrenos livres;
- b) Por medição directa usando traçadores;
- c) Através da estimativa da velocidade média do escoamento superficial na bacia até à secção em estudo, atendendo à cobertura e declive da bacia de drenagem;
- d) Através de valores tabelados, recorrendo a bibliografia existente.

Para a determinação do tempo de concentração em bacias urbanas, também é possível utilizar um sistema misto, que inclui: (1) medição directa do tempo de entrada do escoamento superficial no sistema de drenagem

(sumidouro ou sarjeta), usando traçadores (e. g., fluorescentes); (2) estimativa do tempo de trajecto da água nos colectores, canais, valetas e valas através das suas características hidráulicas.

### **Estimativa recorrendo a fórmulas empíricas**

Diversas fórmulas têm sido propostas para determinar o tempo de concentração,  $t_c$ , em função de características físicas da bacia, da sua ocupação e da intensidade da chuva. Estas fórmulas resultam da análise da informação de campo, e possibilitam a obtenção de equações de regressão. Importa lembrar que a maioria destas expressões é empírica e, portanto, só são válidas em condições semelhantes às da sua determinação. A adopção de qualquer destas fórmulas merece especial atenção, para se evitar, por exemplo, o *equivoco de utilizar, em áreas urbanas, fórmulas originalmente desenvolvidas para áreas rurais*. Estes métodos empíricos são, no entanto, expeditos; não exigem dados de entrada detalhados e são especialmente relevantes para a fase preliminar de estudo de bacias urbanas.

Muitas dessas fórmulas não permitem entrar em consideração com a heterogeneidade das características fisiográficas da bacia (e. g., uso do solo, tipo de vegetação). De facto, o tempo de concentração não é constante para uma dada bacia urbana; varia tanto com o tipo de recobrimento vegetal como com as características espaciais e temporais da precipitação. Nas bacias urbanas, o tempo de concentração é, por norma, inferior ao das bacias rurais, dada a menor intercepção pelo coberto vegetal (a quantidade de água precipitada que atinge a superfície do solo é superior), a baixa infiltração (o volume de escoamento superficial é superior) e a maior canalização do escoamento (e. g., valas, colectores, estradas com menor resistência ao escoamento). Para períodos de retorno superiores a dez anos, a influência da vegetação é muitas vezes desprezada. O tempo de concentração é tanto menor quanto maior for a intensidade da precipitação e o teor de humidade da camada superficial do solo.

Como referido anteriormente, existem muitas fórmulas empíricas que permitem estimar o tempo de concentração em função das características fisiográficas das bacias de drenagem (rurais e urbanas). Apresentam-se de seguida somente alguns exemplos.

- **Fórmula de Kirpich** (e. g., Lencastre e Franco, 2003, Chow *et al.*, 1988):

$$t_c = 0.0195 \times \left( \frac{L^2}{i} \right)^{0.385} \quad (5.11)$$

com:

$$i = \frac{\Delta H}{L} \quad (5.12)$$

sendo  $t_c$  o tempo de concentração (minutos),  $L$  o comprimento do curso de água principal (m),  $\Delta H$  a diferença de nível entre as respectivas extremidades (m) e  $i$  o respectivo declive médio (m/m).

Esta fórmula é recomendada para bacias rurais (0.50 a 45.3 ha) com canais bem definidos e declives compreendidos entre 3 e 10%. Se a aplicação em causa envolver escoamento em canal em zonas urbanas, o valor de  $t_c$  obtido através da Equação (5.11) deve ser multiplicado por 0.2 ou 0.4, conforme se trate de canais de betão ou de superfícies asfaltadas, respectivamente.

• **Fórmula de Giandotti** (e. g., Lencastre e Franco, 2003):

$$t_c = \frac{4\sqrt{A} + 1.5L}{0.80\sqrt{H}} \quad (5.13)$$

em que  $t_c$  é o tempo de concentração (horas),  $A$  é a área da bacia de drenagem (km<sup>2</sup>),  $L$  é o comprimento do curso de água principal (km) e  $\bar{H}$  é a altura média da bacia (m); esta altura média é medida em relação à secção em estudo.

• **Método FAA:**

Outro exemplo é o método da Federal Aviation Administration (FAA), mais utilizado no estudo de bacias hidrográficas urbanas (Chow *et al.*, 1988):

$$t_c = 1.8 \times (1.1 - C) \times L^{0.5} \times i^{-0.333} \quad (5.14)$$

sendo  $t_c$  o tempo de concentração (minutos),  $C$  o coeficiente de escoamento do método racional (adimensional),  $L$  o comprimento do plano de escoamento ou da linha de água (ft), e  $i$  o respectivo declive médio (%).

A vantagem deste último tipo de fórmulas empíricas, que inclui o coeficiente de escoamento, reside na maior flexibilidade que proporcionam para a consideração das características ocupacionais da bacia e sua eventual evolução temporal, à medida que mais áreas da bacia são ocupadas com zonas urbanas.

### **Medição directa usando traçadores**

Os traçadores a utilizar neste tipo de estudos deverão ser produtos solúveis na água, que acompanhem o percurso das moléculas de água. Por

definição, os traçadores devem apresentar um escoamento similar ao das moléculas de água. Alguma propriedade física ou química possibilitará a detecção da sua presença no líquido. Como exemplos de traçadores com estas características refiram-se a uranina, a sulforhodamina B e o cloreto de sódio. Nenhum destes produtos é prejudicial para o Homem ou para o ambiente. Os dois primeiros são corantes fluorescentes e a sua detecção é feita com recurso a fluorímetros; a detecção do terceiro é efectuada com condutivímetros. O registo da variação da concentração dos traçadores no tempo permite calcular, além de outros parâmetros, o tempo médio de escoamento entre dois pontos, respectivamente secção inicial e final (*i. e.*, o local da descarga do traçador e a secção de estudo monitorizada).

### ***Estimativa da velocidade média do escoamento superficial na bacia***

Uma forma mais elaborada, e talvez mais correcta, de calcular o tempo de concentração de uma bacia urbana passa pela aplicação do método cinemático, ou seja, dividindo a bacia em  $n$  troços com características homogéneas (*e. g.*, coberto e declive do solo) de comprimento  $L_i$  (m) e calculando a velocidade do escoamento superficial em cada um deles  $V_i$  (m/s). O tempo de concentração é definido pela soma dos tempos de percurso correspondentes aos diferentes troços e será dado por:

$$t_c = \frac{1}{60} \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{V_i} \quad (5.15)$$

com  $t_c$  em minutos.

Em zonas onde não existam canais naturais definidos, é necessário estimar a velocidade de escoamento superficial. Por exemplo, a Figura 5.20 apresenta um ábaco para a determinação do valor médio da velocidade do escoamento superficial em função do declive do terreno e da ocupação do solo que pode ser utilizado para este fim.

Nos restantes troços é possível recorrer às fórmulas de escoamento com superfície livre em regime uniforme (*e. g.*, Manning-Strickler, Chézy) para determinação da velocidade de escoamento.

Em áreas urbanas onde existam sistemas de drenagem instalados, o tempo de concentração  $t_c$ , tal como definido na Equação (5.15), é divisível em duas parcelas: um tempo inicial (ou tempo de entrada)  $t_i$ , correspondente ao trajecto superficial do escoamento com origem na precipitação até ao sumidouro, sarjeta, ou boca de entrada (entrada da água no sistema de

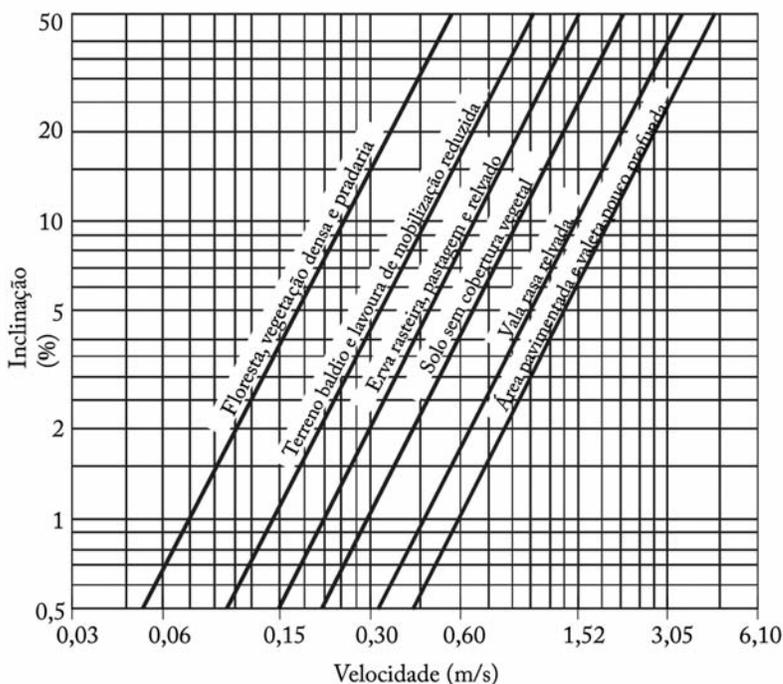


Figura 5.20 – Valores médios da velocidade do escoamento superficial em função do declive do terreno e da ocupação do solo (adaptado de Kent, 1972).

drenagem); e um *tempo de percurso*  $t_p$ , que corresponde ao trajecto dentro da rede de drenagem urbana (e. g., galerias, canais, colectores). Assim, calcula-se:

$$t_c = t_i + t_p \quad (5.16)$$

O tempo inicial  $t_i$  é obtido através de fórmulas empíricas, ábacos, ou ensaios com traçadores. O tempo de percurso  $t_p$  será calculado a partir dos parâmetros hidráulicos da rede de drenagem. No caso de sistemas a construir (e. g., novas urbanizações), é necessário fazer um pré-dimensionamento da rede. Em sistemas existentes, note-se que é possível determinar a velocidade da água também por outros métodos (e. g., caudalímetros).

No subcapítulo 5.5, apresenta-se um exercício sobre a determinação do tempo de concentração de uma bacia de drenagem urbana (Exercício 5.3).

### **Estimativa recorrendo a valores tabelados**

Em bacias urbanas, para efeitos de determinação da intensidade de precipitação de projecto, visando a estimativa de caudais de ponta por métodos simplificados, alguns estudos aconselham os tempos de concen-

tração indicados no Quadro 5.6. Como são valores independentes das dimensões e de outras características fisiográficas da bacia urbana, há que usá-los com ponderação.

Quadro 5.6 – Tempos de concentração em zonas urbanas, em minutos, em função do grau de impermeabilização e declive das superfícies.

Impermeabilização	Declive	Tempo de concentração (minutos)
Áreas urbanas com impermeabilização superior a 50%	Áreas muito inclinadas (> 8%)	5
	Áreas inclinadas (1.5% a 8%)	7.5
	Áreas planas (< 1.5%)	10
Áreas urbanas com impermeabilização inferior a 50%	Áreas muito inclinadas (> 8%)	5
	Áreas inclinadas (1.5% a 8%)	10
	Áreas planas (< 1.5%)	15

## 5.4 Considerações finais

Neste capítulo dedicado a hidrologia urbana, pretendeu-se introduzir e relembrar, de forma sucinta, conceitos fundamentais que servirão de base aos assuntos a abordar em próximos volumes, tais como os aspectos relacionados com o balanço hidrológico e a bacia de drenagem. Ao nível da caracterização da bacia, o objectivo não era fazer uma listagem exaustiva dos modelos disponíveis, mas transmitir conceitos estruturantes em hidrologia urbana. No próximo volume, serão analisados com mais profundidade dois componentes do ciclo hidrológico que se revelam da maior importância para a hidrologia urbana: a precipitação e o escoamento superficial. A abordagem a adoptar no estudo destes processos visa a perspectiva da engenharia, orientada para a resolução de problemas de drenagem de águas pluviais em ambiente urbano, quer ao nível do projecto, quer ao nível da gestão dos sistemas de drenagem.

## 5.5 Exercícios

**Exercício 5.1:** Balanço hidrológico numa bacia urbana.

Uma chuvada intensa com a duração de 90 minutos e altura de precipitação de 105 mm caiu numa pequena bacia urbana com uma área de 150 ha,

localizada numa encosta. A pequena linha de água que drena a bacia é efémera e estava seca antes da chuvada. Não existem açudes na linha de água, nem bacias de retenção. Na secção de jusante, foi observado que o escoamento resultante daquela precipitação durou dez horas, com um caudal médio de  $2.0 \text{ m}^3/\text{s}$ , tendo a linha de água ficado novamente seca.

- Faça uma estimativa das perdas no processo de precipitação-escoamento.
- Qual é a percentagem da precipitação que se transformou em escoamento?

### Resolução

- A equação do balanço hidrológico (equação da continuidade ou de conservação da massa) para uma bacia hidrográfica, num intervalo de tempo  $\Delta t$ , é

$$P - (R + G + E + T) = \Delta S \quad (5.17)$$

sendo  $P$  a precipitação,  $R$  o escoamento superficial,  $G$  o escoamento subterrâneo,  $E$  a evaporação,  $T$  a transpiração e  $\Delta S$  a variação do armazenamento de água na bacia (Figura 5.21).

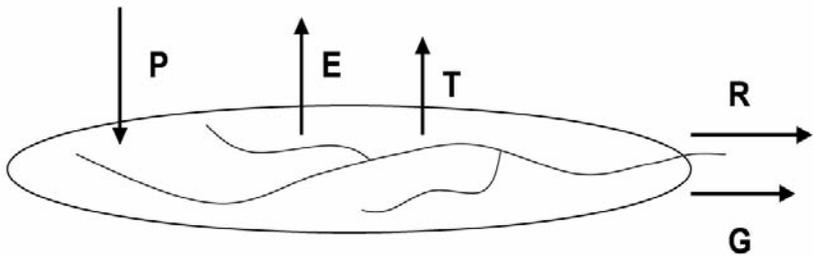


Figura 5.21 – Componentes do ciclo hidrológico a considerar no estudo de uma bacia hidrográfica.

Neste caso concreto, temos  $\Delta t = 10 \text{ h}$ , apesar de ter chovido somente durante 90 minutos. A variação do volume armazenado na bacia pode assumir-se nula ( $\Delta S \approx 0$ ). Dado que a linha de água voltou a ficar seca pouco depois de a chuvada ter terminado, pode igualmente considerar-se que não houve contribuição das águas subterrâneas para o caudal na linha de água ( $G \approx 0$ ). Na bacia, a água não disponível para escoar superficialmente infiltrou-se, aumentando o teor de água na zona não saturada do solo, ou ficou retida em depressões ou na vegetação, para depois evaporar.

Assim, as perdas são:

$$X = E + T \quad (5.18)$$

vindo neste caso

$$X = P - R \quad (5.19)$$

Sendo a altura de precipitação  $P = 105 \text{ mm} = 0.105 \text{ m}$ , obtemos, em volume,  $P = 0.105 \times 1500000 = 157500 \text{ m}^3$ .

Por outro lado, sabe-se que o caudal médio é  $Q = 2.0 \text{ m}^3/\text{s}$ . O caudal  $Q$  é a principal grandeza que caracteriza o escoamento superficial e é normalmente expresso em  $\text{m}^3/\text{s}$ .

Logo, o escoamento superficial é  $R = 2.0 \times (10 \times 3600) \text{ m}^3 = 72000 \text{ m}^3$ .

Assim, as perdas são:  $X = P - R = 157500 - 72000 = 85500 \text{ m}^3$ .

Quando se aplica o conceito de balanço hidrológico a uma bacia hidrográfica para intervalos de tempo de um ano hidrológico, assumindo que não há variação significativa do armazenamento de água na bacia, pode definir-se *Défice de Escoamento* como  $D = P - R$ .

b) A razão entre o escoamento superficial directo e a precipitação, designada por coeficiente de escoamento (ver secção 5.3.3), é

$$C = \frac{R}{P} = \frac{72000}{157500} = 0.457 = 45.7\%$$

**Exercício 5.2:** Determinação das características do relevo de uma bacia de drenagem urbana.

Considere-se a carta hipsométrica de uma bacia urbana, em Coimbra, ilustrada na Figura 5.22. O Quadro 5.7 e o Quadro 5.8 contêm informação sobre as características desta bacia. Determine o rectângulo equivalente, a curva hipsométrica e a distribuição de frequências altimétricas.

Quadro 5.7 – Características geométricas da bacia urbana da Figura 5.22.

$A$ – Área da bacia ( $\text{km}^2$ )	2.27
$P$ – Perímetro (km)	6.58

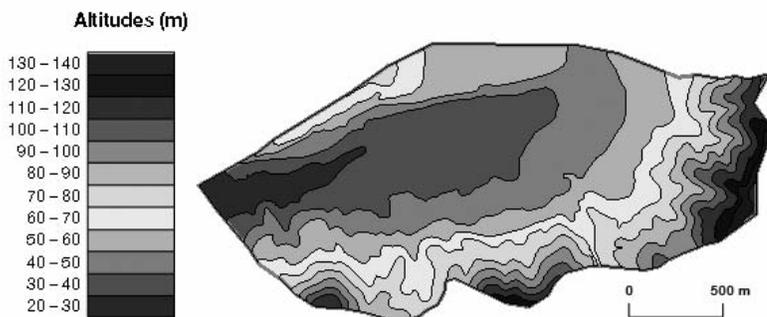


Figura 5.22 – Carta hipsométrica de uma bacia urbana, em Coimbra.

Quadro 5.8 – Áreas correspondentes a vários escalões de altitude da bacia urbana da Figura 5.22.

Altitudes (m)	Área (m <sup>2</sup> )
0-20	0
20-30	90308
30-40	427701
40-50	420088
50-60	415695
60-70	255851
70-80	226129
80-90	142965
90-100	105364
100-110	67141
110-120	63429
120-130	30786
130-140	16802
140-150	6126

### Resolução

Na Figura 5.23, Figura 5.24 e Figura 5.25, apresentam-se o rectângulo equivalente, a curva hipsométrica e a distribuição de frequências altimétricas da bacia urbana da Figura 5.22. O rectângulo equivalente terá as seguintes dimensões:

$$b = \frac{P - \sqrt{P^2 - 16A}}{4} = 0.985 \text{ km} \quad (5.20)$$

$$L = \frac{P + \sqrt{P^2 - 16A}}{4} = 2.305 \text{ km} \quad (5.21)$$

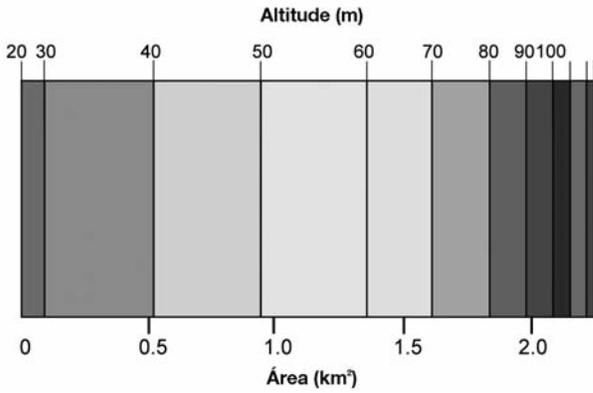


Figura 5.23 – Retângulo equivalente da bacia urbana da Figura 5.22 (Exercício 5.2).

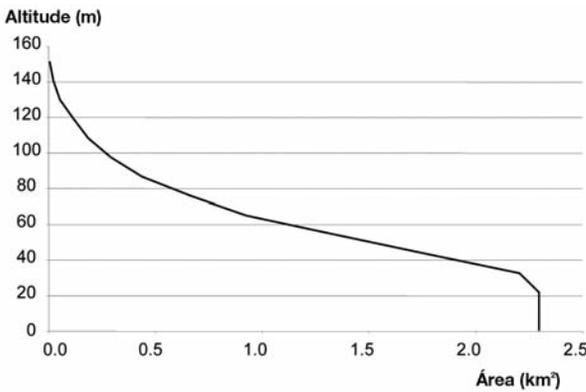


Figura 5.24 – Curva hipsométrica da bacia urbana da Figura 5.22 (Exercício 5.2).

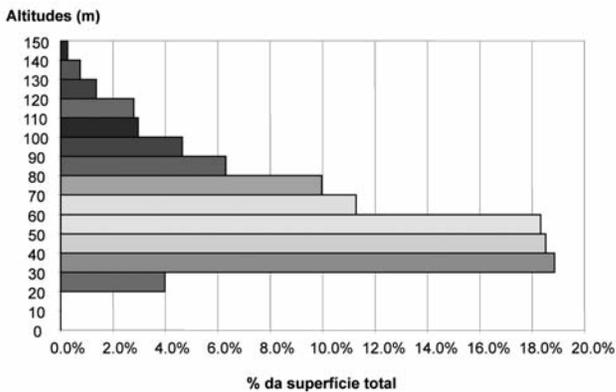


Figura 5.25 – Distribuição de frequências altimétricas da bacia urbana da Figura 5.22 (Exercício 5.2).

**Exercício 5.3:** Determinação do tempo de concentração de uma bacia de drenagem urbana.

Pretende-se determinar o tempo de concentração da bacia urbana apresentada na Figura 5.26, relativamente à secção **D**. A água escoia superficialmente numa zona de mata entre **A** e **B** e numa área pavimentada de um estacionamento, entre **B** e **C**, até entrar num sumidouro localizado em **C**; a partir desse ponto, o escoamento faz-se num colector de betão até atingir **D**. Na Figura 5.26, identificam-se três situações, correspondentes aos troços **AB**, **BC** e **CD**, em que  $i$  é o declive, e  $L$  é o comprimento dos troços.

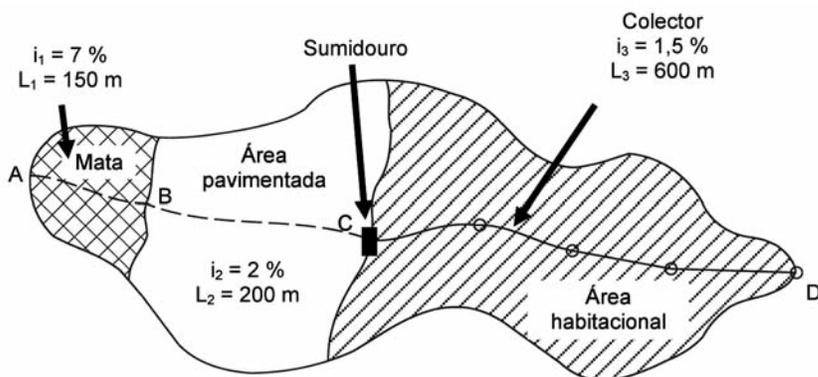


Figura 5.26 – Caracterização das condições de escoamento da água superficial numa bacia urbana para determinação do tempo de concentração da bacia,  $t_c$ .

### Resolução

O tempo de concentração  $t_c$  (minutos) pode ser determinado adaptando a Equação (5.15) ao caso concreto deste problema:

$$t_c = \frac{1}{60} \sum_{i=1}^3 \frac{L_i}{V_i} = \frac{1}{60} \left( \frac{L_1}{V_1} + \frac{L_2}{V_2} + \frac{L_3}{V_3} \right) \quad (5.22)$$

sendo  $L_i$  o comprimento (m) do percurso  $i$  com determinadas características e  $V_i$  a correspondente velocidade de escoamento superficial (m/s).

A soma dos dois primeiros termos da Equação (5.22) corresponde ao tempo inicial e o último ao tempo de percurso, definidos na Equação (5.16).

Recorrendo à Figura 5.20, que apresenta um ábaco para a determinação do valor médio da velocidade do escoamento superficial em função do

declive do terreno e da ocupação do solo, para o percurso entre **A** e **B**, a velocidade média de escoamento pode ser estimada em  $V_1 \approx 0.2$  m/s.

De igual modo, entre **B** e **C**, a velocidade média será  $V_2 \approx 0.85$  m/s.

No trajecto entre **C** e **D**, pode recorrer-se à equação de Manning-Strickler para calcular a velocidade média no colector. Contudo, como não conhecemos as dimensões do colector, assume-se que  $V_3 \approx 1$  m/s (valor aceitável num pré-dimensionamento).

Assim, vem:

$$t_c = \frac{1}{60} \left( \frac{150}{0.2} + \frac{200}{0.85} + \frac{600}{1} \right)$$

Logo, o tempo de concentração será:

$$t_c = 26.4 \text{ minutos.}$$



# BIBLIOGRAFIA

## Capítulo 2. Métodos Estadísticos

- BILLINGSLEY, P. (1999). *Convergence of probability measures*. 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons, New York.
- BEIRLANT, J., TEUGELS, J. e VYNCKIER, P. (1996). *Practical analysis of extreme values*. Leuven University Press.
- BEIRLANT, J., GOEGEBEUR, Y., SEGERS, J. e TEUGELS, J. (2004). *Statistics of Extremes: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, New York.
- CASTILLO, E., HADI, A. S., BALAKRISHNAN, N. e SARABIA, J. M. (2005). *Extreme Value and Related Models in Engineering and Science Applications*. John Wiley & Sons, New York.
- EMBRECHTS, P., KLUPPELBERG, C. e MIKOSCH, T. (1997). *Modelling Extremal Events*. Springer-Verlag.
- GNEDENKO, B. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.*, 44, 423-453.
- GONÇALVES, E., e MENDES-LOPES, N. (2000). *Probabilidades – Princípios Teóricos*, Escolar Editora, Lisboa.
- GUIMARÃES, R. C. e SARFIELD-CABRAL, J. A. (2007). *Estatística*. 2<sup>nd</sup> Edition, McGraw-Hill, Portugal.
- HOSKING, J. R. M. e WALLIS, J. R. (1987). Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution. *Technometrics* 29, 3, 339-349.
- LEADBETTER, M. R., LINDGREN, G. e ROOTZÉN, H. (1983). *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*. Springer-Verlag, Berlin.
- REISS, R. D. e THOMAS, M. (2001). *Statistical Analysis of Extreme Values, with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. 2<sup>nd</sup> Edition. Birkhauser. Verlag.
- TIAGO DE OLIVEIRA, J. (1997). *Statistical analysis of extremes*. Editora Pendor.

TIAGO DE OLIVEIRA, J. e GOMES, M. I. (1984). Two tests statistics for chise of univariate extreme models. *Statistical Extremes and Applications*. Dordrecht, Reidel. 651-668.

### **Capítulo 3. Cálculo Numérico**

ABREU, J. M. e ANTUNES DO CARMO, J. S. (2008). *Métodos Numéricos em Engenharia*. DEC-FCT da Universidade de Coimbra.

CARNAHAN, B., LUTHER, H. A. e WILKES, J. O. (1969) *Applied Numerical Methods*. John Wiley & Sons, Inc.

CHAPRA, S. C. e CANALE, R. P. (1990). *Numerical methods for engineers*. McGraw-Hill. Int. Eds. 2<sup>nd</sup> Edition.

CONTE, S. D. e DE BOOR, C. (1981). *Elementary Numerical Analysis: an algorithmic approach*. McGraw-Hill. Int. Eds., 3<sup>rd</sup> Edition.

PINA, H. L. G. (1995). *Métodos Numéricos*. McGraw-Hill.

PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. e FLANNERY, B. P. (1992). *Numerical Recipes in Fortran 77 - The art of scientific computing*. Cambridge University Press. 2<sup>nd</sup> Edition.

ROSA, M. (1992). *Tópicos de Análise Numérica*. Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

VALENÇA, M. R. (1993). *Métodos Numéricos*. Livraria Minho. 3.<sup>a</sup> edição.

### **Capítulo 4. Hidráulica**

CHADWICK, A., MORFETT, J. e BORTHWICK, M. (2004). *Hydraulics in Civil and Environmental Engineering*. London, Spon Press.

ÇENGEL, Y. e CIMBALA, J. (2007). *Mecânica dos fluidos – fundamentos e aplicações*. São Paulo, McGraw-Hill.

HAMILL, L. (1995). *Understanding Hydraulics*. London, Macmillan Press Ltd.

MANZANARES, A. (1980). *Hidráulica Geral*. Lisboa, TÉCNICA A.E.I.S.T.

OLIVEIRA, L. e LOPES A. (2006). *Mecânica dos Fluidos*. Lisboa, ETEP Edições Técnicas e Profissionais.

QUINTELA, A. (1981). *Hidráulica*. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian.

## Capítulo 5. Conceitos básicos de hidrologia

- CHOW, V. T., MAIDMENT, D. R. e MAYS, L. R. (1988). *Applied Hydrology*. New York: McGraw-Hill.
- GRIBBIN, J. E. (2002). *Introduction to Hydraulics and Hydrology with Applications to Stormwater Management*. 2<sup>nd</sup> edition. Delmar, Thomson Learning, 484 p.
- LENCASTRE, A. e FRANCO, F. M. (2003). *Lições de Hidrologia*. Fundação Armando Lencastre, Lisboa, 451 p.
- MACLEOD, C. J. A., BINLEY, A., HAWKINS, S. L., HUMPHREYS, M. W., TURNER, L. B., WHALLEY, W. R. e HAYGARTH, P. M. (2007). Genetically modified hydrographs: what can grass genetics do for temperate catchment hydrology? *Hydrological Processes*, John Wiley & Sons, 21(16), 2217-2221.
- KENT, K. (1972). Travel Time, Time of Concentration, and Lag. *National Engineering Handbook*, Section 4: Hydrology, Chapter 15. Washington, D.C.: Soil Conservation Service (SCS), U.S. Department of Agriculture.
- LTG (2008). *Léxico de Termos Geológicos – e-Geo – Sistema Nacional de Informação Geocientífica*. [http://e-geo.ineti.pt/bds/lexico\\_geologico/](http://e-geo.ineti.pt/bds/lexico_geologico/).
- SINGH, V. P. (1992). *Elementary Hydrology*. Prentice Hall, Englewood Cliffs. 973 p.
- TUCCI, C. E. M. (2001). *Hidrologia – Ciência e Aplicação*. Coleção ABRH de Recursos Hídricos (2.<sup>a</sup> Edição), Brasil. 944 p.



## SOBRE OS AUTORES



### João Pedroso de Lima

Universidade de Coimbra  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Departamento de Engenharia Civil  
Rua Luís Reis Santos  
Pólo II da Universidade de Coimbra  
3030-788 Coimbra, Portugal  
Tel.: +351 239 797 183  
Fax.: +351 239 797 179  
Email: plima@dec.uc.pt

Professor Catedrático do Departamento de Engenharia Civil, da Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade de Coimbra (FCTUC), lecciona disciplinas das áreas da Hidráulica, Hidrologia e Recursos Hídricos. Em 1982, licenciou-se em Engenharia Civil, pela Universidade de Coimbra. Em 1985, foi estudar para a Holanda, e obteve o grau de Mestre em Gestão de Recursos Hídricos, em 1987, e o Doutoramento em Ciências Ambientais, em 1989, pela Universidade de Wageningen. É Engenheiro Especialista em Hidráulica e Recursos Hídricos pela Ordem dos Engenheiros.

Tem mais de 250 trabalhos técnicos e científicos publicados, 35 dos quais em revistas científicas internacionais. Pertence às comissões editoriais, entre outras, das revistas internacionais *Journal of Hydrological Engineering* da ASCE, *Open Civil Engineering Journal* e *Open Atmospheric Science Journal* da Bentham Science Publishers. Foi *Guest-editor* de números especiais nas Revistas *Journal Physics and Chemistry of the Earth*, editado pela Elsevier, e *Non-Linear Processes in Geophysics*, publicado pela *European Geosciences Union* e pela *American Geophysical Union*. Tem participado na organização de diversos congressos científicos nacionais e internacionais, realizados em Portugal, Espanha, Áustria, França, Polónia e Índia.

Presentemente é Director do Departamento de Engenharia Civil da FCTUC. É investigador do Instituto do Mar (IMAR), onde coordena a Linha de Investigação em Hidráulica, Recursos Hídricos e Ambiente. Nesse contexto desenvolve actividade de I&D em projectos europeus e nacionais e em contratos de desenvolvimento com empresas nacionais no âmbito da hi-

drologia, hidrologia urbana, sistemas de drenagem e conservação do solo e da água. Foi investigador responsável pela participação portuguesa em Projectos TEMPUS e COST da Comunidade Europeia e em vários projectos da FCT. Foi Coordenador de várias edições do Mestrado em Hidráulica e Recursos Hídricos da FCTUC. Tem 19 orientações científicas de Mestrado e de Doutoramento (já defendidas).

Dos vários cargos já ocupados, destacam-se: Coordenador do Laboratório de Hidráulica, Recursos Hídricos e Ambiente (LHRHA) da FCTUC, 2002-2009; Presidente do *Institute for Scientific and Technological Advanced Studies* (ISTAS), 1999-2004; Presidente da Comissão Científica do Departamento de Engenharia Civil da FCTUC, 1996-2000; *Invited Professor* na Universidade de Louisiana, U.S.A. (Maio-Julho de 1997). Exerceu ainda vários cargos em organizações e comissões, nomeadamente no Conselho Directivo da Associação Nova Cultura da Água (ANCA), Comissão Portuguesa do Programa Hidrológico Internacional (PHI) da UNESCO, Conselho Directivo da Núcleo Regional do Centro da Associação Portuguesa dos Recursos Hídricos (APRH), e Comissão Executiva da Especialização em Hidráulica e Recursos Hídricos da Ordem dos Engenheiros. É membro fundador da HIDRONET-pt (Rede para o Desenvolvimento do Conhecimento em Hidráulica e Meios Hídricos).



## **Cristina Maria Tavares Martins**

Universidade de Coimbra  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Departamento de Matemática  
Largo D. Dinis, Ap. 3008  
3001-454 Coimbra, Portugal  
Tel.: +351 239 791 172  
Fax.: +351 239 793 069  
Email: [cmtm@mat.uc.pt](mailto:cmtm@mat.uc.pt)

Nasceu em Mação, em 1966, e licenciou-se em Matemática – Ramo Científico, pelo Departamento de Matemática, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, em 1988. Completou o Mestrado em Probabilidades e Estatística, no Departamento de Estatística e Investigação Operacional, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, em 1992, e obteve o grau de Doutora em Matemática (especialidade: Matemática Aplicada), pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, em 2000.

É Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da FCTUC, onde tem leccionado disciplinas da área de Probabilidades e Estatística da licenciatura em Matemática, e de outras licenciaturas da mesma Faculdade, bem como do Mestrado em Hidráulica e Recursos Hídricos, do Departamento de Engenharia Civil, da FCTUC.

A sua actividade de investigação desenvolve-se na área das Séries Temporais, tendo artigos publicados em revistas nacionais e internacionais.



## **Maria da Graça S. T. Neves Mendes**

Universidade de Coimbra  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Departamento de Matemática  
Largo D. Dinis, Ap. 3008  
3001-454 Coimbra, Portugal  
Tel.: +351 239 791 172  
Fax.: +351 239 793 069  
Email: [mgtm@mat.uc.pt](mailto:mgtm@mat.uc.pt)

Nasceu em Soure, a 23 de Junho de 1966. Licenciou-se em Matemática – Ramo Científico, pelo Departamento de Matemática, da Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade de Coimbra (FCTUC), em 1988. Completou o Mestrado em Probabilidades e Estatística, no Departamento de Estatística e Investigação Operacional, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, em 1992, e obteve o grau de Doutora, em Matemática Aplicada, pela Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade de Coimbra, em 2000.

É Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da FCTUC, onde tem leccionado disciplinas da área de Probabilidades e Estatística, da Licenciatura em Matemática, e de várias licenciaturas em Engenharia, bem como da Licenciatura em Ciências Farmacêuticas, da Faculdade de Farmácia, e da Licenciatura em Administração Pública, da Faculdade de Direito. Desde 2002, colabora com o Mestrado em Hidráulica e Recursos Hídricos, do Departamento de Engenharia Civil, da FCTUC, leccionando, sozinha ou em colaboração, uma disciplina de Análise Estatística de Dados. Tem desenvolvido a sua actividade de investigação na área da Teoria de Valores Extremos, tendo vários artigos publicados em revistas internacionais e nacionais.

É membro do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra (CMUC) e sócia da Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE).



## **José Manuel de Eça G. de Abreu**

Universidade de Coimbra  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Departamento de Engenharia Civil  
Rua Luís Reis Santos  
Pólo II da Universidade de Coimbra  
3030-788 Coimbra, Portugal  
Tel.: +351 239 797 151  
Fax.: +351 239 797 156  
Email: jabreu@dec.uc.pt

Nasceu no Porto, a 21 de Junho de 1960. Licenciou-se em Engenharia Civil, pelo Departamento de Engenharia Civil, da Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade de Coimbra (FCTUC), em 1983. Em 1991, concluiu o Master en Hidrologia y Gestion del Agua, na Universidade Politécnica de Valência (Espanha), escola onde obteve o grau de Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, em 2004.

É Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Civil, da FCTUC, onde tem leccionado disciplinas nas áreas da Hidráulica e dos Métodos Numéricos, tanto ao nível da licenciatura como de pós-graduação e mestrado.

A sua actividade de investigação desenvolve-se essencialmente na área dos Escoamentos Variáveis em Pressão, sendo co-autor e co-editor do livro *Transitorios y oscilaciones en sistemas hidráulicos a presión*, editado pela UDMF, Valência (ISBN 84-600-9146-5). Tem vários artigos publicados em revistas internacionais.



## **José Paulo Lopes de Almeida**

Universidade de Coimbra  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Departamento de Engenharia Civil  
Rua Luís Reis Santos  
Pólo II da Universidade de Coimbra  
3030-788 Coimbra, Portugal  
Tel.: +351 239 797 149  
Fax.:+351 239 797 123  
Email: [jppgla@dec.uc.pt](mailto:jppgla@dec.uc.pt)

Nasceu em Coimbra, em 1964. Em 1987, licenciou-se em Engenharia Civil, pelo Departamento de Engenharia Civil, da Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade de Coimbra (DEC-FCTUC). De 1987 a 1989, foi bolseiro de investigação da JNICT. Em 1989, iniciou a sua actividade docente como assistente estagiário do DEC-FCTUC. Em 1991, concluiu com sucesso as suas Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica na Universidade de Coimbra, passando de seguida a exercer funções de assistente até 2001.

Desde 2002, e após a obtenção do grau de *Docteur en Sciences Appliquées*, pela Universidade de Liège, na Bélgica, é Professor Auxiliar do DEC-FCTUC, onde já leccionou diversas disciplinas da área da Hidráulica e dos Recursos Hídricos em cursos de formação, de licenciatura, de pós-graduação e de mestrado.

Tem desenvolvido trabalho de investigação na área do Planeamento e Gestão de Aproveitamentos Hidráulicos de Fins Múltiplos, tendo diversos trabalhos publicados em revistas e livros, nacionais e internacionais.

Integrou a comissão científica e organizadora de diversas conferências de âmbito nacional e internacional sobre a temática da água. É membro de diversas associações ligadas aos recursos hídricos.



## **Isabel Pedroso de Lima**

Instituto Politécnico de Coimbra  
Escola Superior Agrária  
Departamento de Recursos Florestais  
Bencanta  
3040 - 316 Coimbra, Portugal  
Tel.: +351 239 402 284  
Fax.: +351 239 802 979  
Email: [iplima@esac.pt](mailto:iplima@esac.pt)

Licenciada em Engenharia Civil, pela Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade de Coimbra, em 1983, obteve o grau de Mestre em Gestão de Recursos Hídricos, em 1989, e o grau de Doutor em Ciências Ambientais, em 1998, pela Universidade de Wageningen, na Holanda.

É Professora Adjunta da Escola Superior Agrária, do Instituto Politécnico de Coimbra, desde 1994, integrando o quadro do Departamento de Recursos Florestais. Tem leccionado e sido regente de várias disciplinas das áreas da Hidráulica e da Hidrologia, no âmbito dos cursos de Licenciatura em Engenharia do Ambiente, Engenharia dos Recursos Florestais e Engenharia em Agro-Pecuária. Colaborou algumas vezes na leccionação de disciplinas do curso de Mestrado em Hidráulica, Recursos Hídricos e Ambiente do Departamento de Engenharia Civil, da FCTUC, e nos cursos de Mestrado em Gestão Ambiental e Agro-pecuária, da ESAC.

Pertence ao Centro do Mar e Ambiente (IMAR-CMA), onde desenvolve actividades de investigação, tendo coordenado vários projectos de investigação nacionais, financiados pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

A sua actividade de investigação desenvolve-se fundamentalmente na área da Hidrologia, com particular incidência no estudo da Precipitação e do Escoamento de Superfície, tendo trabalhos publicados em livros e revistas, nacionais e internacionais. Integra actualmente o Grupo de Trabalho sobre Precipitação da *International Association of Hydrological Sciences* (IAHS).



## Hidrologia urbana – Conceitos básicos

Este primeiro número da Série “Cursos técnicos”, elaborado pela Universidade de Coimbra e editado pela ERSAR, aborda os conceitos básicos da hidrologia urbana e integra um conjunto de quatro módulos que visam fornecer competências nas áreas da hidrologia urbana e da drenagem pluvial urbana, nomeadamente: conceitos básicos; águas pluviais em ambiente urbano; sistemas sustentáveis de drenagem urbana; gestão e reabilitação de sistemas de drenagem pluvial urbana.

O texto, eminentemente de carácter didáctico, tenta sistematizar e sintetizar, num único volume, conceitos considerados fundamentais para a hidrologia urbana, nomeadamente: noções de estatística, cálculo numérico, hidráulica e hidrologia, e inclui exemplos e exercícios resolvidos ilustrativos dos conceitos apresentados, que reflectem a experiência de anos de docência dos autores nos temas em análise. Esta publicação apresenta assim os conceitos básicos essenciais para uma sólida fundação do conhecimento da hidrologia urbana, tanto para técnicos das entidades gestoras como para outros interessados nestas matérias.



Entidade Reguladora dos Serviços de Águas e Resíduos